Thèse de doctorat

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Toulouse

Spécialité Mathématiques Fondamentales

délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Présentée et soutenue publiquement par

Jean-Christophe San Saturnino

le 2 juillet 2013

Théorème de Kaplansky effectif et uniformisation locale des schémas quasi-excellents

---

Thèse dirigée par

Mark Spivakovsky

et présentée devant le jury composé de

Rapporteurs :

Vincent Cossart	Professeur	Université de Versailles-Saint-Quentin
Michael Temkin	Senior Lecturer	The Hebrew University of Jerusalem

Examinateurs :

Denis-Charles Cisinski	Professeur	Institut de Mathématiques de Toulouse
***	***	***
Michel Vaquié	Chargé de Recherche	Institut de Mathématiques de Toulouse
Orlando Villamayor	Catedrático de Universidad	Universidad Autónoma de Madrid

Directeur :

Mark Spivakovsky	Directeur de Recherche	Institut de Mathématiques de Toulouse

ED Mathématiques Informatique Télécommunication de Toulouse,
Université Toulouse III - Paul Sabatier,
118 route de Narbonne,
31062 Toulouse, France.

Institut de Mathématiques de Toulouse,
UMR CNRS 5219,
Université Toulouse III - Paul Sabatier,
118 route de Narbonne,
31062 Toulouse, France.

« Il est possible que la réciproque de (7.9.5) soit vraie. »

É.G.A. IV, Alexander Grothendieck.

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à ...

à Toulouse, le ** **** 2013.

Théorème de Kaplansky effectif et uniformisation locale des schémas quasi-excellents

Résumé

La résolution de singularités des courbes sur $\mathbb{C}$ est connue depuis longtemps et possède de nombreuses preuves. L'une d'entre elles consiste à utiliser le théorème de Newton-Puiseux pour obtenir l'uniformisation locale d'une valuation centrée sur l'anneau de départ. Ce théorème fournit une série de Puiseux permettant de paramétrer les branches de la courbe ainsi qu'un ensemble de polynômes décrivant complètement la valuation.

Dans cette thèse, nous généralisons cette méthode à l'aide des polynômes-clés indexés sur un ensemble bien ordonné qui deviennent, après éclatements, des coordonnées. Notre premier résultat fournit une généralisation effective du théorème de Newton-Puiseux pour une valuation de rang 1, centrée sur un anneau local régulier et complet, ainsi que des résultats de dépendance intégrale sur les séries tronquées. Dans un second temps, nous montrons qu'il n'y a pas de polynômes-clés limites en caractéristique nulle et proposons une méthode pour obtenir l'uniformisation locale des schémas quasi-excellents. Cette méthode consiste à désingulariser l'idéal premier implicite, engendré par un polynôme, en monomialisant les polynômes-clés. Enfin, en caractéristique positive ou mixte, nous montrons que, pour obtenir l'uniformisation locale, il suffit, sous certaines conditions, de monomialiser le premier polynôme-clé limite.

Mots-clés. Uniformisation locale, polynômes-clés, séries de Puiseux, valuations, caractéristique nulle et mixte, idéal implicite, éclatements locaux, monomialisation.

Effective Kaplansky's theorem and local uniformization of quasi-excellent schemes

Abstract

The resolution of curves singularities over $\mathbb{C}$ has long been known and has many proofs. One of them consists in using the Newton-Puiseux theorem to obtain the local uniformization of a valuation centered on the starting ring. This theorem provides a Puiseux expansion to parametrize the branches of the curve and a set of polynomials describing completely the valuation.

In this thesis we generalize this method using key polynomials indexed by a well-ordered set which become coordinates after blowings up. Our first result provides an effective generalization of the Newton-Puiseux theorem for valuation of rank 1 centered on a complete regular local ring and integral relations on the truncation of the series. In the next chapter, we show that there is no limit key polynomials in characteristic zero and we propose a method for the local uniformization of quasi-excellent schemes. This method consists in resolving the singularities of the implicit prime ideal generated by a polynomial and monomializing key polynomials. Finally, in positive or mixed characteristic, we show that, under certain conditions, to obtain the local uniformization it is sufficient to monomialize the first limit key polynomial.

Keywords. Local uniformization, key polynomials, Puiseux expansions, valuations, zero and mixed characteristic, implicit ideal, locals blowings up, monomialization.

MSC2010. 13A02, 13A18, 13F25, 13F30, 13F40, 13H05, 14B05, 14E15, 14H20, 14J17.

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'uniformisation locale des schémas quasi-excellents de caractéristique nulle et mixte ainsi qu'à la construction effective d'un plongement d'un anneau local régulier complet, muni d'une valuation de rang 1, dans un anneau de séries de Puiseux généralisées. Les polynômes-clés développés par Spivakovsky dans **[HGOAS]** et **[S1]** forment l'outil principal d'approche de ces problèmes.

Les premiers résultats en résolution des singularités sont attribués à Newton au XVII$^{\text{ème}}$ siècle ainsi qu'à Puiseux au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Leur résultat permet de résoudre les singularités des courbes définies sur $\mathbb{C}$.

Considérons un élément irréductible $f \in \mathbb{C}[[u_1, u_2]] \setminus \{0\}$, à l'aide de la méthode de Newton, il existe d, $m \in \mathbb{Z}$, $m > d$ et deux séries de Puiseux :

$$\begin{cases} u_1(t) = t^d \\ u_2(t) = \sum\limits_{j \geqslant m} a_j t^j \end{cases}$$

telles que :

$$f(u_1(t), u_2(t)) = 0.$$

Cette méthode nous permet de paramétrer une branche de la courbe $f = 0$; pour paramétrer les autres branches, il faut remarquer que :

$$f(u_1(t), u_2(\zeta^j t)) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant d-1,$$

où ζ est une racine primitive d-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Comme f est irréductible, on obtient :

$$f = z \prod_{j=0}^{m-1} \left(u_2 - u_2(\zeta^j u_1^{\frac{1}{d}}) \right),$$

où $z \in \mathbb{C}[[u_1, u_2]]^{\times}$.

On obtient également une tour d'extensions galoisiennes de corps cycliques :

$$K_1 = \mathbb{C}(u_1) \hookrightarrow K_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow K_g \hookrightarrow K_{g+1} = \mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{d}}\right).$$

Notons $Q_1 = u_2$ et $Q_l \in \mathbb{C}((u_1))[u_2]$ le polynôme minimal de l'extension $K_1 \hookrightarrow K_l$, $2 \leqslant l \leqslant g+1$. Soit ν une valuation de $\mathbb{C}[[u_1, u_2]]$, vérifiant $\nu_{|\mathbb{C}} = 0$, de groupe des valeurs Γ. On considère ν comme la composée d'une valuation μ centrée en $\mathbb{C}[[u_1, u_2]]/(f)$ de groupe des valeurs $\Gamma_1 \simeq \mathbb{Z}$, premier sous-groupe isolé non-nul de Γ, et d'une valuation θ centrée en $\mathbb{C}[[u_1, u_2]]_{(f)}$ de groupe des valeurs Γ/Γ_1. Supposons de plus que $\nu(f) \notin \Gamma_1$. Alors, l'ensemble de polynômes $\{Q_l\}_{1 \leqslant l \leqslant g+1}$ est tel que pour tout élément

$h \in \mathbb{C}[[u_1, u_2]]$, il existe un développement de la forme :

$$h = \sum_{finie} a_{\alpha_1,...,\alpha_{g+1}} Q_1^{\alpha_1} ... Q_{g+1}^{\alpha_{g+1}},$$

vérifiant :

$$\nu(h) = \min_{(\alpha_1,...,\alpha_{g+1}) \in \mathbb{N}^{g+1}} \left\{ \nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_{g+1}} Q_1^{\alpha_1} ... Q_{g+1}^{\alpha_{g+1}} \right) \right\}.$$

L'ensemble $\{Q_l\}_{1 \leqslant l \leqslant g+1}$ est un premier exemple d'un *ensemble complet de polynômes-clés* pour l'extension $\mathbb{C}((u_1)) \hookrightarrow \mathbb{C}((u_1))(u_2)$.

Finalement, si on note $R = \mathbb{C}[[u_1, u_2]]/(f)$, la paramétrisation précédente nous donne un morphisme injectif d'anneaux :

$$\iota : R \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]],$$

défini par :

$$\begin{cases} \iota(u_1) = u_1(t) \\ \iota(u_2) = u_2(t) \end{cases}$$

En notant v la valuation t-adique sur $\mathbb{C}[[t]]$, on montre que, pour tout $h \in R$:

$$\mu(h) = v(\iota(h)).$$

De plus, on peut montrer que le corps des fractions de R est $\mathbb{C}((t))$ et que l'idéal maximal de R est $(t) \cap R$. On dit alors que le morphisme ι est *birationnel* et *dominant*. On obtient ainsi une uniformisation locale de μ définie sur R. Le morphisme :

$$\iota^* : Spec(\mathbb{C}[[t]]) \to Spec(R)$$

est alors propre et birationnel, c'est une *résolution des singularités* de la courbe $f = 0$.

Cette méthode n'est pas généralisable en dimensions plus grandes et surtout, elle ne s'étend pas en caractéristique positive. Par exemple, si k est un corps de caractéristique $p > 0$, la méthode de Newton ne peut s'appliquer pour résoudre des hypersurfaces de la forme :

$$X^p - g^{p-1}X + f = 0,$$

où $f, g \in k[[u_1, ..., u_n]]$, $g \neq 0$ et $f, g \notin k[[u_1, ..., u_n]]^\times$. L'équation précédente est dite d'Artin-Schreier.

En 1939, Zariski montre qu'il existe une résolution des singularités des surfaces sur un corps de caractéristique nulle en démontrant l'uniformisation locale des valuations et en recollant au niveau de la variété de Riemann-Zariski (voir **[Z1]**). L'uniformisation locale apparaît donc comme un problème essentiel dans la résolution des singularités.

En 1964, Hironaka (**[H1]**) prouve que l'on peut résoudre les singularités de toute variété algébrique définie sur un corps de caractéristique nulle. Ce résultat a permis à Grothendieck de donner des conditions minimales pour obtenir une résolution des singularités via la proposition suivante :

Proposition 1 — ([G2], *Proposition (7.9.5)*) *Soit X un schéma localement noethérien, tel que, pour tout schéma Y intègre et fini sur X, on puisse résoudre Y. Alors les anneaux des ouverts affines de X sont quasi-excellents.*

Grothendieck conjecture alors que la réciproque de la Proposition 1 est vraie. Il remarque que, par le résultat d'Hironaka, cette conjecture est vraie pour les schémas noethériens réduits dont le corps résiduel est de caractéristique nulle. Sans hypothèse sur la caractéristique, il propose de se ramener au cas des anneaux locaux noethériens intègres et complets. Si le corps résiduel k est de caractéristique $p > 0$, seule une hypothèse de la forme $[k : k^p] < +\infty$ n'est valable pour lui, si un contre-exemple vient un jour mettre en défaut sa conjecture.

Dans certains cas, plusieurs résultats l'ont confirmée : Abhyankar a démontré l'existence d'une résolution des singularités pour des surfaces en caractéristique positive ([**A1**]) ainsi que pour des variétés de dimension 3 sur des corps de caractéristique supérieure ou égale à 7 ([**A3**]) ; résultat redémontré en 2009 par Cutkosky ([**Cu4**]). Enfin, Cossart et Piltant ont démontré ce dernier résultat sans condition sur la caractéristique ([**CP1**] et [**CP2**]) et ont des résultats partiels en caractéristique mixte ([**CP3**]).

D'autres preuves du théorème d'Hironaka sont apparues depuis les années 1990, elles ont permis de mettre à jour de nouvelles techniques. On peut citer Villamayor en 1989 ([**Vi**]), Bierstone et Milman en 1990 ([**BM**]), Encinas et Villamayor en 2001 ([**EV**]), Encinas et Hauser en 2002 ([**EH**]), Włodarczyk en 2005 ([**W**]) ou Temkin en 2008 ([**Tem1**]) qui a démontré la conjecture de Grothendieck en caractéristique nulle.

Ces dernières années, une nouvelle approche a été proposée par Spivakovsky ([**S1**]) et Teissier ([**Tei1**]) pour résoudre cette conjecture. La première étape est de démontrer l'uniformisation locale d'une valuation en étudiant l'algèbre graduée qui lui est naturellement associée.

Les travaux de cette thèse viennent s'insérer dans le cadre de cette nouvelle approche. L'objectif est d'utiliser les séries de Puiseux et les polynômes-clés, outils indépendants de la caractéristique, pour proposer une preuve de l'uniformisation locale des valuations définies sur un anneau quelconque. Dans un premier temps, nous proposons une généralisation des séries de Puiseux définies par Spivakovsky ([**S1**]) à un anneau local régulier complet de caractéristique mixte muni d'une valuation de rang 1, ainsi que des résultats de dépendance intégrale pour les séries tronquées. Dans un deuxième temps, nous reprenons la méthode de Spivakovsky pour donner une nouvelle preuve de l'uniformisation locale des schémas quasi-excellents de caractéristique nulle. Enfin, nous montrons que, sous certaines hypothèses, on peut utiliser cette démarche dans le cas mixte et qu'il suffit de monomialiser le premier polynôme-clé limite.

Détaillons un peu plus le contenu de cette thèse. Le Chapitre I est consacré aux préliminaires. Nous y introduisons la notion de quasi-excellence pour les anneaux et les schémas, notion qui impose deux conditions, l'une locale et l'autre globale.

Définition 2 — *Un anneau noethérien R est* ***quasi-excellent*** *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) Pour tout $P \in Spec(R)$, le morphisme de complétion $R_P \to \widehat{R_P}$ est régulier ;

(2) Le lieu régulier de toute R-algèbre de type fini est ouvert.

Un schéma localement noethérien est dit ***quasi-excellent*** *s'il existe un recouvrement formé d'ouverts affines (U_α), $U_\alpha = Spec(R_\alpha)$, tel que, pour tout α, R_α soit un anneau quasi-excellent.*

Remarquons que dans le cas des anneaux locaux, la quasi-excellence est équivalente à (1). Comme on l'a vu précédemment, ces anneaux sont le cadre le plus général pour étudier le problème de la résolution des singularités.

Après quelques généralités sur les valuations, la composition de valuations et les algèbres graduées associées, on définit la notion essentielle de valuation monomiale. En effet, un élément dont sa valuation est égale à sa valuation monomiale, peut être monomialisé. Dans le cas où l'anneau est $k[[u_1,...,u_n]]$, cette valuation est :

$$\nu_{0,u}(f)=\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\nu(u_i)\;\middle|\; c_\alpha\neq 0\right\},$$

où $f=\sum c_\alpha u^\alpha\in k[[u_1,...,u_n]]$, $u=(u_1,...,u_n)$ et $u^\alpha=u_1^{\alpha_1}...u_n^{\alpha_n}$.

Par la suite, nous présentons les différentes notions d'uniformisation locale pour les schémas et les anneaux. Comme le problème est local, on n'étudie que les anneaux locaux. L'uniformisation locale d'une valuation ν de K, le corps des fractions d'un anneau local intègre R où est centrée la valuation, revient essentiellement à trouver un anneau R' régulier qui domine birationnellement R et tel que $R'\subset R_\nu\subset K$. On rappelle que :

$$R_\nu=\{f\in K\,|\,\nu(f)\geqslant 0\}.$$

Plus précisément, la propriété d'uniformisation locale plongée dans le cadre des anneaux locaux intègres est la suivante :

Propriété 3 — *Soient $(R,\mathfrak{m})$ un anneau local noethérien intègre et ν une valuation de K, le corps des fractions de R, centrée en R. On dit que ν admet une **uniformisation locale plongée** si, pour un nombre fini d'éléments de R, $f_1,...,f_q\in R$ tels que $\nu(f_1)\leqslant ...\leqslant\nu(f_q)$, il existe une suite d'éclatements locaux par rapport à ν :*

$$R\xrightarrow{\pi_0}R^{(1)}\xrightarrow{\pi_1}\cdots\xrightarrow{\pi_{l-2}}R^{(l-1)}\xrightarrow{\pi_{l-1}}R^{(l)}$$

telle que $R^{(l)}$ soit régulier et telle qu'il existe un système régulier de paramètres $u^{(l)}=\left(u_1^{(l)},...,u_d^{(l)}\right)$ de $R^{(l)}$ tel que les f_i soient des monômes en $u^{(l)}$ pour $1\leqslant i\leqslant q$ et f_i divise f_{i+1} dans $R^{(l)}$, $1\leqslant i\leqslant q-1$.

Cette propriété est celle que nous voulons obtenir lorsque R est quasi-excellent et de corps résiduel k de caractéristique nulle. Si k et R sont de caractéristique $p>0$, il faut ajouter l'hypothèse $[k:k^p]<+\infty$. Enfin, si R est de caractéristique mixte et Γ est le groupe des valeurs de ν, nous rajoutons comme hypothèses $[k:k^p]<+\infty$ et $\nu(p)\notin p\Gamma$.

La méthode proposée dans cette thèse est la suivante : d'après **[NS]**, pour obtenir la Propriété 3, il suffit de la démontrer pour des valuations de rang 1, valuations qui sont archimédiennes. On introduit alors un idéal de $\widehat{R}$ appelé *idéal premier implicite* défini dans **[HGOAST]** comme suit :

Définition 4 — *Soient R un anneau local noethérien intègre et ν une valuation archimédienne de K, corps des fractions de R, centrée en R. On appelle **idéal premier implicite** de R associé à ν, noté $H(R,\nu)$ ou plus simplement H s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'idéal de $\widehat{R}$ défini par :*

$$H=\bigcap_{\beta\in\nu(R\setminus\{0\})}P_\beta\widehat{R},$$

où $P_\beta=\{f\in R\,|\,\nu(f)\geqslant\beta\}$.

Cet idéal permet de décrire les éléments de $\widehat{R}$ de valuation infinie. Il possède les propriétés suivantes :

(1) $H \cap R = (0)$;

(2) $R \hookrightarrow \widehat{R}/H$;

(3) H est un idéal premier de $\widehat{R}$;

(4) ν s'étend de manière unique en une valuation $\widehat{\nu}$ centrée en $\widehat{R}/H$;

(5) Si R est un anneau local intègre quasi-excellent, alors $\widehat{R}_H$ est régulier.

Cette dernière propriété est essentielle pour montrer que R est régulier. Comme l'on suppose R local et noethérien, il suffit de démontrer que $\widehat{R}$ est régulier. Grâce au Lemme III.18, pour montrer que $\widehat{R}$ est régulier il faut montrer que $\widehat{R}_H$ et $\widehat{R}/H$ le sont. Or, par la propriété (5), il suffit de montrer que $\widehat{R}/H$ est régulier. Dans le Chapitre III, nous démontrons ce résultat en caractéristique nulle. Dans le Chapitre IV, nous montrons que, pour l'obtenir en caractéristique mixte, il suffit de démontrer la Conjecture 12, conjecture qui reste ouverte et non-démontrée à ce jour.

Dans la dernière partie du Chapitre I, nous développons la notion d'*éclatements locaux encadrés* définie dans [**S1**]. Ces éclatements sont de la forme :

$$\pi : (R,u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right),$$

où l'on impose des conditions de compatibilité entre u et $u^{(1)}$. Leur propriété essentielle est que, pour une suite d'éclatements de ce type :

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right),$$

chaque u_j peut s'exprimer comme un monôme en $u^{(i)}$ multiplié par une unité de $R^{(i)}$. De plus, cette suite fait décroître les deux invariants suivants :

$$e(R,\nu) = emb.dim\left(\widehat{R}/H\right),$$

$$r(R,u,\nu) = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\nu(u_i)\right).$$

Enfin, nous énonçons un premier théorème de monomialisation pour des éléments dont leur valuation est égale à la valuation monomiale (Théorème I.99) dont la preuve, issue de [**S1**], repose sur un cas particulier du jeu d'Hironaka (voir [**H2**] et [**S2**]). Nous terminons le Chapitre I par la construction d'une *suite élémentaire uniformisante* permettant d'obtenir l'uniformisation locale d'une valuation attachée à une hypersurface quasi-homogène satisfaisant certaines conditions vis-à-vis de l'algèbre graduée. Cette suite élémentaire uniformisante est la pièce fondamentale de l'algorithme proposé dans les Chapitres III et IV afin d'obtenir la Propriété 3 d'uniformisation locale plongée pour des anneaux locaux intègres.

Dans le Chapitre II, nous essayons d'obtenir, pour les séries de Puiseux, le même type de résultats que dans le cas des courbes sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, si R est un anneau local régulier complet muni d'une valuation de rang 1, on le plonge dans un anneau de séries généralisées de Puiseux. Ce résultat a déjà été démontré par Kaplansky ([**Ka**]) ainsi que par Poonen ([**P**]). Ici, on reprend la méthode proposée par Spivakovsky ([**S1**]) pour la généraliser au cas de caractéristique mixte. L'intérêt de cette méthode est que le plongement est construit de manière explicite. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 5 — *Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet et ν une valuation de K le corps des fractions de R, de rang 1 centrée en R. Si R est de caractéristique mixte, on suppose de plus que $p \notin \mathfrak{m}^2$. Il existe alors un anneau A_R et un monomorphisme d'anneaux :*

$$\iota : R \hookrightarrow A_R,$$

tels que ν soit la restriction à R de la valuation de Mal'cev-Neumann associée à A_R.

Ici, la valuation de Mal'cev-Neumann est la valuation t-adique (ou p-adique) et :

$$A_R = \begin{cases} \overline{k_\nu}\left[\left[t^{\Gamma'}\right]\right] & \text{si} \quad car(R) = car(k) \\ \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right] & \text{si} \quad car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

où $\overline{W}$ est un anneau local d'idéal maximal engendré par p (la caractéristique de k) et de corps résiduel $\overline{k_\nu}$, une clôture algébrique de k_ν. On rappelle que :

$$m_\nu = \{f \in K \mid \nu(f) > 0\} \text{ et } k_\nu = R_\nu / m_\nu.$$

La preuve de ce théorème utilise de manière cruciale les polynômes-clés introduits dans **[HGOAS]** et **[S1]** et dont on rappelle ici la définition :

Définition 6 — *Soit $K \hookrightarrow K(x)$ une extension de corps simple et transcendante. Soit μ' une valuation de $K(x)$, notons $\mu := \mu'_{|K}$. On note G le groupe des valeurs de μ' et G_1 celui de μ. On suppose de plus que μ est de rang 1 et que $\mu'(x) > 0$. Un* ***ensemble complet de polynômes-clés*** *pour μ' est une collection bien ordonnée :*

$$\boldsymbol{Q} = \{Q_i\}_{i \in \Lambda} \subset K[x]$$

telle que, pour tout $\beta \in G$, le groupe additif $P'_\beta \cap K[x]$ soit engendré par des produits de la forme $a \prod_{j=1}^{s} Q_{i_j}^{\gamma_j}$, $a \in K$, tels que $\sum_{j=1}^{s} \gamma_j \mu'\left(Q_{i_j}\right) + \mu(a) \geqslant \beta$.
L'ensemble est dit ***1-complet*** *si la condition a lieu pour tout $\beta \in G_1$.*

Avec cette définition, les polynômes introduits dans le cas des courbes sur $\mathbb{C}$ sont bien des polynômes-clés. De plus, on remarque qu'ils sont en nombre fini ce qui n'est pas toujours le cas. D'après **[HGOAS]** et **[S1]**, on sait qu'il existe toujours un ensemble complet de polynômes-clés. La construction se fait par récurrence transfinie et le type d'ordre de l'ensemble est au plus $\omega \times \omega$, il existe donc des *polynômes-clés limites*.

Par le théorème de structure de Cohen, on sait que R est de la forme

$$R = \begin{cases} k\,[[u_1, ..., u_{n+1}]] & \text{si} \quad car(R) = car(k) \\ W\,[[u_1, ..., u_n]] & \text{si} \quad car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

où W est un anneau complet de valuation discrète de paramètre régulier p et de corps résiduel k. La preuve du Théorème 5 consiste à construire par récurrence transfinie la série de Puiseux de u_j, en utilisant une méthode de Newton via les polynômes-clés $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ de l'extension $K_{j-1} \hookrightarrow K_{j-1}(u_j)$, où $K_{j-1} = k\left((u_1, ..., u_{j-1})\right)$ ou $W\left((u_1, ..., u_{j-1})\right)$ et, la suite croissante $(\varepsilon_{j,i})_{i \in \Lambda_j}$ définie par :

$$\varepsilon_{j,i} = \frac{\beta_{j,i} - \nu(\partial_{j, p^{b_{j,i}}} Q_{j,i})}{p^{b_{j,i}}},$$

où $b_{j,i}$ est le plus petit élément b de $\mathbb{N}$ qui maximise $\dfrac{\beta_{j,i} - \nu(\partial_{j,p^b} Q_{j,i})}{p^b}$ et $\partial_{j,s} = \dfrac{1}{s!}\dfrac{\partial^s}{\partial u_j^s}$, $s \in \mathbb{N}$, $j \in \{r, ..., n\}$ et $r = r(R, u, \nu)$.

Une autre généralisation du cas des courbes sur $\mathbb{C}$ est le fait que les séries de Puiseux tronquées sont algébriques. Notons $\mathcal{A}$ le sous-anneau de A_R engendré par $\iota(u_1), ..., \iota(u_n)$ et toutes leurs troncatures et $\mathcal{A}_{j,\beta}$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ engendré par toutes les troncatures ouvertes de la forme $u_{j'}(\beta')$, où $(j', \beta') <_{lex} (j, \beta)$ pour l'ordre lexicographique. On a alors la proposition suivante :

Proposition 7 — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$ et $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$. S'il existe $i \in \Lambda_j$ tel que $\beta \leqslant \varepsilon_{j,i}$, alors $u_j(\beta)$, la série de Puiseux de u_j tronquée en β, est entière sur $\mathcal{A}_{j,\beta}$.*

Nous terminons ce chapitre en introduisant la notion de séries de Puiseux universelles, notion qui ne dépend pas de l'ordre des variables contrairement à la construction faite dans la preuve du Théorème 5 qui dépend des polynômes-clés.

Le Chapitre III traite uniquement de l'uniformisation locale en caractéristique nulle. Nous reprenons la méthode proposée dans **[S1]** pour l'adapter à ce cas. Considérons $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet et de dimension n avec $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n)$. Soient ν une valuation de $K = Frac(R)$, centrée en R, de groupe des valeurs Γ, et Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ. On note :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

H est un idéal premier de R (voir Preuve du Théorème III.17). On suppose de plus que :

$$n = e(R, \nu)$$

c'est-à-dire que :

$$H \subset \mathfrak{m}^2.$$

On note également $r = r(R, u, \nu)$.
La valuation ν considérée est la composée de la valuation $\mu : L^* \to \Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L = Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta : K^* \to \Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta \simeq \kappa(H) = R_H/HR_H$.
L'objectif étant de rendre régulier R/H, on doit désingulariser H. La méthode consiste à utiliser des suites locales encadrées, puis de compléter à chaque étape afin d'utiliser l'idéal premier H. Ces suites sont appelées des *suites formelles encadrées*. On montre alors que l'idéal premier implicite est principal, engendré par un polynôme en u_n et que sa hauteur est au plus 1. Cette propriété reste vraie pour tous les transformés de H via des éclatements formels. On obtient alors un premier théorème de monomialisation :

Théorème 8 — *Deux cas se présentent :*

(1) Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite formelle encadrée :

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$\left(e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right), e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - r\left(R^{(l)}, u^{(l)}, \nu^{(l)}\right)\right) <_{lex} (e(R, \nu), n - r).$$

(2) Ou bien $H = (0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite formelle encadrée :

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ fois une unité de $R^{(l)}$.

La preuve de ce théorème se fait par récurrence sur $n-r$. Comme H est engendré par un polynôme, il suffit d'obtenir le résultat pour les polynômes en u_n. Celui-ci est obtenu par récurrence sur le degré et par développement standard d'éléments de R en fonction des polynômes-clés. Il faut donc monomialiser les polynômes-clés ; en utilisant les suites locales uniformisantes du Chapitre I, on se rend compte qu'il suffit de les monomialiser uniquement jusqu'au premier polynôme-clé limite, s'il existe. Or en caractéristique nulle on a le résultat suivant :

Proposition 9 — *Si* $car(k_v) = 0$*, il existe un ensemble* 1*-complet de polynômes-clés* $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ *tel que* Λ *est, soit un ensemble fini, soit* $\mathbb{N}^*$*. En particulier, il n'y a pas de polynômes-clés limites pour des valuations de rang* 1 *en caractéristique nulle.*

Ce résultat repose sur le fait qu'en caractéristique nulle, la suite formée par les valuations des polynômes-clés n'est jamais bornée. Ainsi, le Théorème 8 est vrai en caractéristique nulle mais aussi dans les cas de caractéristique positive ou mixte, chaque fois qu'il existe un ensemble 1-complet de polynômes-clés n'ayant pas de polynômes-clés limites.

Par la suite, on obtient un deuxième théorème de monomialisation mais cette fois avec des suites locales encadrées et non plus formelles encadrées. La preuve se fait par approximations $\mathfrak{m}$-adiques. Enfin, dans la dernière partie, on démontre la Propriété 3 pour des anneaux locaux intègres quasi-excellents dont le corps résiduel est de caractéristique nulle, ainsi que le théorème :

Théorème 10 — *Soit* $(S,\mathfrak{m},k)$ *un anneau local, non nécessairement intègre, quasi-excellent. Soient* P *un idéal premier minimal de* S *et* v *une valuation du corps des fractions de* S/P *centrée en* S/P *et de groupe des valeurs* Γ *telle que* $car(k_v)=0$*.*
Il existe alors un éclatement local $\pi : S \to S'$ *par rapport à* v *tel que* S'_{red} *soit régulier et* $Spec(S')$ *soit normalement plat le long de* $Spec(S'_{red})$*.*

Dans le Chapitre IV, nous reprenons la méthode du Chapitre III en essayant de la généraliser au cas des anneaux de caractéristique mixte grâce au lemme suivant :

Lemme 11 — *On suppose que :*

$$R = W[[u_1,...,u_n]]/(p-g),$$

avec $g \in W[[u_1,...,u_n]]$ *à coefficients dans* $W^\times$ *et* $\mathfrak{m} = (u_1,...,u_n)$ *son idéal maximal. Si* $v(p) \notin p\Gamma$*, alors, à une suite formelle encadrée près, on peut supposer* R *de la forme :*

$$R = R[r][[u_{r+1},...,u_n]],$$

où $R[r]$ *est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié) de dimension* r *et tel que* $v_{|R[r]}$ *soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de* $R[r]$ *et de rang rationnel maximal.*

On obtient les mêmes résultats sur l'idéal H et on applique la même méthode afin de démontrer le Théorème 8. Or, dans les cas de caractéristique positive ou mixte, il existe des polynômes-clés limites (voir **[Mah]**). Pour conclure il faut donc monomialiser le premier polynôme-clé limite ; on propose alors la conjecture suivante :

Conjecture 12 — *On suppose que* $(R,\mathfrak{m},k)$ *est de la forme* $R[r][[u_{r+1},...,u_n]]$ *où* $R[r]$ *est un anneau local régulier complet de dimension* r *et tel que* $v_{|R[r]}$ *soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de* $R[r]$ *et de rang rationnel* r*. Supposons que le premier* *polynôme-clé limite $Q_{n,\omega}$ de l'extension $K_{n-1} \hookrightarrow K_{n-1}(u_n)$ s'écrit sous la forme :*

$$Q_{n,\omega} = u_n^{p^{e_{n,\omega}}} + \sum_{j=0}^{e_{n,\omega}-1} c_{p^j} u_n^{p^j} + c_0,$$

où c_0, $c_{p^j} \in R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]]$, $1 \leqslant j \leqslant e_{n,\omega} - 1$. On suppose de plus que :

$$\left[k : k^{p^{e_{n,\omega}}}\right] < +\infty.$$

Il existe alors une suite formelle encadrée :

$$(R, u) \to (R', u'),$$

où $u = (u_1, ..., u_n)$, $u' = (u'_1, ..., u'_n)$, telle que :

(1) *$Q_{n,\omega}$ est un monôme en u' fois une unité de R' ;*

(2) *Dans R', u'_n divise $Q_{n,\omega}$ mais u'^2_n ne divise pas $Q_{n,\omega}$.*

Plus précisément, à une suite formelle encadrée près, il existe $j \in \{r + 1, ..., n - 1\}$ et $e \in \mathbb{N}$, $e < e_{n,\omega}$, tels que :

(3) *Il existe g, $h \in R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]]$ tels que $c_0 = g + h$;*

(4) *$\nu_{0,u}(h) \geqslant p^{e_{n,\omega}}\overline{\beta}_{n,\omega}$, en particulier, $h = 0$ si $\overline{\beta}_{n,\omega} = \infty$;*

(5) *g contient un monôme de la forme $\varpi u_j^{p^e}$ où ϖ est un monôme en $u_1, ..., u_r$ et, pour tous les autres monômes de la forme $\varpi' u_j^d$ avec ϖ' monôme en $u_1, ..., u_{j-1}, u_{j+1}, ..., u_n$, apparaissant dans $Q_{n,\omega}$, $\nu(\varpi') \geqslant \nu(\varpi)$;*

(6) *Si $\overline{\beta}_{n,\omega} = \infty$ alors $j = n - 1$.*

Remarquons que l'on s'est ramené à une forme bien particulière de polynôme-clé limite, on appellera cette forme un *polynôme d'Artin-Schreier généralisé*. Une fois de plus, comme dans le cas des courbes sur $\mathbb{C}$, le cas Artin-Schreier pose problème et doit concentrer toute notre attention.

Enfin, le Chapitre V reprend les théorèmes du Chapitre III pour obtenir les résultats d'uniformisation locale plongée pour des valuations centrées en des anneaux locaux quasi-excellents de caractéristique mixte dont le corps résiduel vérifie $[k : k^p] < +\infty$ et tels que $\nu(p) \notin p\Gamma$; en supposant que la Conjecture 12 soit vraie.

Table des matières

CHAPITRE I

Préliminaires

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unitaires.
Si R est un anneau, I un idéal de R, on notera $\widehat{R}$ le *complété I-adique* de R. Lorsque $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local on dira plus simplement le *complété* de R au lieu du complété $\mathfrak{m}$-adique de R.
Pour tout $P \in Spec(R)$, on note $\kappa(P) = R_P/PR_P$ le corps résiduel de R_P.
Pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ et $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble d'éléments de R, on note :

$$u^\alpha = u_1^{\alpha_1}...u_n^{\alpha_n}.$$

Pour $P, Q \in R[X]$ avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i Q^i$ et $a_i \in R[X]$ tels que le degré de a_i est strictement inférieur à celui de Q, on note :

$$d_Q^\circ(P) = n.$$

Si $Q = X$, on notera plus simplement $d^\circ(P)$ au lieu de $d_X^\circ(P)$.
Enfin, si R est un anneau intègre, on notera $Frac(R)$ son corps des fractions.

1. Structure des anneaux locaux réguliers complets

1.1. Caractéristique d'un anneau.

Le but de cette section est d'énoncer le théorème de structure de Cohen pour des anneaux locaux réguliers et complets. Par la suite, nous aurons souvent besoin de ce théorème dans les deux cas suivants : le cas équicaractéristique et le cas de caractéristique mixte. La preuve repose sur la notion de lissité formelle, on pourra consulter **[G1]**, **[ILO]**, **[Mat1]** et **[Mat2]** pour plus de détails.

Définition I.1 — *Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local. On note $car(R)$ sa caractéristique.
On dit que R est un anneau **équicaractéristique** si $car(R) = car(k)$, sinon, on dit que c'est un anneau de **caractéristique mixte**.*

Remarque I.2 — Les seuls cas possibles sont les suivants :

(1) R est équicaractéristique :
   (a) $car(k) = car(R) = 0$;
   (b) $car(k) = car(R) = p$, p un nombre premier ;
(2) R est de caractéristique mixte :
   (a) $car(R) = 0$ et $car(k) = p$, p un nombre premier ;
   (b) $car(R) = p^n$ et $car(k) = p$, p un nombre premier, $n \geqslant 2$.

Exemples I.3 — Un corps ou un anneau de séries formelles sur un corps sont des anneaux équicaractéristiques ; $\mathbb{Z}_{(p)}$, p un nombre premier, est un anneau de caractéristique mixte.

Pour les anneaux de caractéristique mixte, il se peut que p soit un paramètre régulier. Il est souvent utile de faire la distinction entre les deux cas, pour cela, nous introduisons la définition suivante :

Définition I.4 — *Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local de caractéristique mixte et $p = car(k)$. On dit que R est **ramifié** si $p \in \mathfrak{m}^2$, sinon on dit qu'il est **non-ramifié**.*

1.2. Le théorème de structure de Cohen.

Théorème I.5 — *Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet de dimension n.*

(1) Si R est équicaractéristique alors :

$$R \simeq k\left[\left[u_1, ..., u_n\right]\right].$$

(2) Si R est de caractéristique mixte, il existe un anneau complet de valuation discrète W, d'idéal maximal pW et $g \in W\left[\left[u_1, ..., u_n\right]\right]$, $g \in (u_1, ..., u_n)$ à coefficients inversibles tels que :

$$R \simeq W\left[\left[u_1, ..., u_n\right]\right] / (p - g).$$

Définition I.6 — *Un **anneau de Cohen** est soit un corps de caractéristique nulle, soit un anneau complet de valuation discrète, de corps résiduel de caractéristique $p > 0$ et d'idéal maximal engendré par p.*

Exemple I.7 — Le corps k et l'anneau W du Théorème I.5 sont des anneaux de Cohen.

Remarque I.8 — Dans le cas (2), si k est parfait alors, l'anneau de Cohen W est isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt de k (voir **[G1]**, Remarques (21.5.3), (ii)). Si de plus, R est non-ramifié alors $R \simeq W\left[\left[u_1, ..., u_{n-1}\right]\right]$.

2. Anneaux quasi-excellents

Dans **[G2]**, Grothendieck montre que tout schéma localement noethérien X, tel que tout schéma intègre et de type fini sur X admette une résolution des singularités, est quasi-excellent. De plus, il conjecture que la réciproque est probablement vraie et il avance même qu'elle est vraie en caractéristique nulle via le théorème d'Hironaka (**[H1]**), fait qui ne sera montré qu'en 2008 par Temkin (**[Tem1]**). En caractéristique positive et en caractéristique mixte le problème reste ouvert, ainsi, pour étudier le problème de l'uniformisation locale, les anneaux quasi-excellents forment la classe d'anneaux la plus générale que l'on puisse considérer.
On pourra consulter **[G2]**, **[Mat1]** et **[ILO]** pour les preuves des énoncés ci-dessous.

La quasi-excellence demande deux conditions sur l'anneau : une condition globale sur le lieu régulier et une condition locale sur les fibres formelles.
Commençons par la condition locale.

2.1. G-anneaux.

Définition I.9 — *Soient R un anneau et M un R-module.*

*(1) On dit que M est **plat** sur R si, pour toute suite exacte de R-modules :*

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0,$$

la suite induite :

$$0 \to N' \otimes_R M \to N \otimes_R M \to N'' \otimes_R M \to 0,$$

est exacte.

(2) Un morphisme d'anneaux $\sigma : R \to R'$ est un ***morphisme plat*** *si R' est plat sur R pour la structure de R-module induite par σ.*

Définition I.10 — *Soit R un anneau noethérien.*

(1) Supposons que R contienne un corps k. On dit que R est ***géométriquement régulier*** *sur k si, pour toute extension $k'|k$ telle que $[k' : k] < +\infty$, l'anneau $R \otimes_k k'$ est régulier.*

(2) Soit $\sigma : R \to R'$ un morphisme d'anneaux noethériens. Pour tout $P \in Spec(R)$, notons $\kappa(P) = R_P/PR_P$ le corps résiduel de R_P. On dit que σ est un ***morphisme régulier*** *si :*

(a) σ est un morphisme plat ;

(b) Pour tout $P \in Spec(R)$, $R' \otimes_R \kappa(P)$ est géométriquement régulier sur $\kappa(P)$.

Définition I.11 — *Un anneau noethérien R est appelé un* ***G-anneau*** *si, pour tout $P \in Spec(R)$, le morphisme de complétion $R_P \to \widehat{R_P}$ est régulier.*

Remarque I.12 —

(1) Le choix de la lettre G dans la définition est en hommage à Grothendieck qui est le premier à avoir dégagé cette notion.

(2) Un anneau local noethérien est régulier si et seulement si son complété est régulier ([**AMa**], Théorème 11.24).

(3) La notion de G-anneau est conservée par localisation, passage au quotient et passage aux algèbres de type fini.

(4) Un anneau local noethérien complet est un G-anneau ([**Mat1**], Théorème 68).

La notion de G-anneau est notre condition locale, regardons maintenant la condition globale.

2.2. Anneaux J-2.

Définition I.13 — *Soit R un anneau noethérien.*

(1) On appelle $Reg(R) = \{P \in Spec(R) \mid R_P \text{ est régulier}\}$ le ***lieu régulier*** *de R et $Sing(R) = Spec(R) \setminus Reg(R)$ le* ***lieu singulier*** *de R.*

(2) On dit que R est ***J-0*** *si $Reg(R)$ contient un ouvert non-vide de $Spec(R)$.*

(3) On dit que R est ***J-1*** *si $Reg(R)$ est ouvert dans $Spec(R)$.*

(4) On dit que R est ***J-2*** *si toute R-algèbre de type fini est J-1.*

Remarque I.14 —

(1) La lettre J vient de jacobien.

(2) La notion d'anneau J-2 est notre condition globale.

(3) Si R est un anneau noethérien réduit alors : J-1 $\Rightarrow$ J-0.

Nous allons énoncer quelques théorèmes donnant des exemples et des critères qui vérifient ces conditions.

Théorème I.15 — *Un anneau local noethérien complet est J-1, en particulier les anneaux de séries formelles sur un corps ou un anneau de valuation discrète sont J-1.*

Remarque I.16 — Ce théorème est dû à Nagata et repose sur le Théorème I.5 de structure de Cohen et le critère jacobien de Nagata. Dans [**G2**], on voit que pour obtenir le résultat, il suffit de montrer qu'un anneau local noethérien complet intègre est J-0.

Corollaire I.17 — *Un G-anneau local est J-1.*

Le théorème suivant, dû à Grothendieck, va nous donner le lien entre la notion de G-anneau et d'anneau J-2 dans le cas des anneaux locaux. On peut trouver une preuve dans [**G1**] et dans [**Mat1**].

Théorème I.18 — *Soit R' une R-algèbre de type fini. Si R est un G-anneau alors R' est un G-anneau.*

Corollaire I.19 — *Un G-anneau local est J-2.*

Passons maintenant à la notion de quasi-excellence.

2.3. Anneaux et schémas quasi-excellents.

Définition I.20 — *Un anneau est **quasi-excellent** si c'est un G-anneau J-2.*

Remarque I.21 —

(1) Remarquons que, par définition, comme un G-anneau est noethérien, un anneau quasi-excellent est noethérien.
(2) La notion de quasi-excellence est conservée par localisation, passage au quotient et passage aux algèbres de type fini.
(3) Un corps est quasi-excellent.

Grâce au Corollaire I.19, on peut affaiblir les hypothèses pour les anneaux locaux :

Proposition I.22 — *Un anneau local est quasi-excellent si et seulement si c'est un G-anneau.*

Exemples I.23 — Par le (4) de la Remarque I.12 et par la Proposition I.22, on en déduit que les anneaux de séries formelles sur un anneau de Cohen sont des anneaux quasi-excellents.

Définition I.24 — *Un schéma localement noethérien est dit **quasi-excellent** s'il existe un recouvrement formé d'ouverts affines (U_α), $U_\alpha = Spec(R_\alpha)$, tel que, pour tout α, R_α soit un anneau quasi-excellent.*

3. Valuations

Les notions de valuations et surtout de places se sont développées entre la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. C'est tout d'abord en théorie des nombres qu'est apparu le concept de places d'un corps, introduit par Dedekind et Weber en 1882. Par la suite, Hensel, en développant sa théorie des nombres p-adiques crée la notion de valeur absolue p-adique. Mais c'est Krull ([**Kr**]) qui, en 1932, définit la notion générale de valuation.

Zariski, dans le cadre de la résolution des singularités, introduit la notion de valuation en géométrie algébrique. Son objectif était de résoudre les singularités via l'uniformisation locale d'une valuation donnée. Ces dernières années, l'étude des valuations a été relancée par Spivakovsky et Teissier dans cet objectif. Enfin, Cossart et Piltant en 2008 ([**CP1**] et [**CP2**]) ont montré que l'on pouvait résoudre les singularités d'une variété algébrique de dimension 3 sur un corps de caractéristique positive via l'uniformisation locale.

Notre référence principale pour cette section est [**Va1**], on pourra également consulter [**ZS**] ou [**B**].

3.1. Premières définitions.

Définition I.25 — *Soit $(\Gamma, +, \leqslant)$ un groupe commutatif totalement ordonné. Considérons $\infty \notin \Gamma$ et munissons l'ensemble $\Gamma \cup \{\infty\}$ d'une relation d'ordre total en posant :*

$$\forall\, \alpha \in \Gamma,\ \alpha < \infty.$$

Par convention, on suppose que :

$$\forall\, \alpha \in \Gamma,\ \infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty + \infty = \infty.$$

Soient R un anneau et $\nu : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ une application. On dit que ν est une ***valuation*** *si :*

(1) $\forall\, f, g \in R,\ \nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$ *;*

(2) $\forall\, f, g \in R,\ \nu(f+g) \geqslant \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ *;*

(3) $\nu(1) = 0$ *et* $\nu(0) = \infty$.

Remarque I.26 — Lorsque R est un corps, quitte à remplacer Γ par $\nu(R \setminus \{0\})$, on peut supposer que ν est surjective.
Si R est un anneau intègre de corps des fractions K et si pour tout $f \in R \setminus \{0\}$, $\nu(f) \neq \infty$, alors il existe une unique valuation de K qui prolonge ν.

Définition I.27 — *Soit ν une valuation sur un corps K. On appelle* ***anneau de valuation de ν****, l'anneau :*

$$R_\nu = \{f \in K \mid \nu(f) \geqslant 0\}.$$

C'est un anneau local d'idéal maximal :

$$m_\nu = \{f \in K \mid \nu(f) > 0\}.$$

On note alors $k_\nu = R_\nu / m_\nu$ le corps résiduel de R_ν.

Définition I.28 — *Soient R un anneau et ν une valuation. L'ensemble :*

$$P_\infty = \nu^{-1}(\{\infty\})$$

est un idéal premier de R appelé ***support*** *de ν.*

3.2. Centre d'une valuation.

Définition I.29 — *Soient K un corps, R un sous-anneau de K, P un idéal premier de R et ν une valuation de K. On appelle* ***centre*** *de la valuation l'idéal premier $R \cap m_\nu$. On dit que ν est* ***centrée en P*** *si $R \subset R_\nu$ et $P = R \cap m_\nu$.*
Plus généralement, soient R un anneau et P un idéal premier. Une valuation de R ***centrée en P*** *est la donnée d'un idéal premier minimal P_∞ de R contenu dans P et d'une valuation du corps des fractions de R/P_∞ centrée en P/P_∞. L'idéal P_∞ est alors le support de la valuation.*
Si R est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on dira que ν est ***centrée en R*** *pour dire que ν est centrée en $\mathfrak{m}$.*

Lorsque R est un anneau local, on peut relier cette notion à la relation de domination.

Définition I.30 — *Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ et $(R', \mathfrak{m}', k')$ deux anneaux locaux. On dit que R'* ***domine*** *R si $R \subset R'$ et si $\mathfrak{m} = R \cap \mathfrak{m}'$.*
Si de plus ce sont des anneaux intègres ayant même corps des fractions, on dit que R' ***domine birationnellement*** *R.*

Remarque I.31 —

(1) L'injection de R dans R' définit un isomorphisme de k sur un sous-corps de k'.

(2) Soit R un anneau local. Une valuation est centrée en R si et seulement si R_ν domine R.

Définition I.32 — *Soit X un schéma intègre de corps des fonctions $K(X)$. Une valuation ν de $K(X)$ est **centrée en un point ξ** de X si ν est centrée en $\mathcal{O}_{X,\xi}$. On dira alors que ξ est le **centre** de ν.*

Remarque I.33 — Le centre de ν dans X, s'il existe, est l'unique point ξ tel que R_ν domine birationnellement $\mathcal{O}_{X,\xi}$.

3.3. Algèbres graduées d'une valuation.

Nous allons maintenant voir qu'à l'aide d'une valuation, nous pouvons définir, à partir d'un anneau, une algèbre graduée.

Définition I.34 — *Soient R un anneau et $\nu : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ une valuation centrée en un idéal premier de R. Pour tout $\alpha \in \nu(R \setminus \{0\})$, on définit les idéaux :*

$$P_\alpha = \{f \in R \,|\, \nu(f) \geqslant \alpha\};$$

$$P_{\alpha,+} = \{f \in R \,|\, \nu(f) > \alpha\}.$$

*L'idéal P_α est appelé le **ν-idéal** de R de valuation α.*
*On définit alors **l'algèbre graduée de R associée à ν** par :*

$$gr_\nu(R) = \bigoplus_{\alpha \in \nu(R\setminus\{0\})} P_\alpha / P_{\alpha,+}.$$

L'algèbre $gr_\nu(R)$ est un anneau intègre.
Pour $f \in R \setminus \{0\}$, on définit son image dans $gr_\nu(R)$, notée $in_\nu(f)$, comme étant l'image naturelle de f dans $P_{\nu(f)}/P_{\nu(f),+} \subset gr_\nu(R)$; c'est un élément homogène de degré $\nu(f)$.
Enfin, on définit une valuation naturelle sur $gr_\nu(R)$ de groupe des valeurs $\nu(R \setminus \{0\})$, notée ord, par :

$$ord(f) = \min \alpha,$$

où $f \in gr_\nu(R)$ s'écrit comme une somme finie $f = \sum_{\alpha \in \nu(R\setminus\{0\})} f_\alpha$, $f_\alpha \in P_\alpha / P_{\alpha,+}$.

Si R est un anneau local intègre, on définit une autre algèbre graduée comme suit :

Définition I.35 — *Soient R un anneau local intègre, $K = Frac(R)$ et $\nu : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ une valuation de K centrée en R. Pour tout $\alpha \in \Gamma$, on définit les R_ν-sous-modules de K suivants :*

$$\boldsymbol{P_\alpha} = \{f \in K \,|\, \nu(f) \geqslant \alpha\};$$

$$\boldsymbol{P_{\alpha,+}} = \{f \in K \,|\, \nu(f) > \alpha\}.$$

*On définit alors **l'algèbre graduée associée à ν** par :*

$$G_\nu = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \boldsymbol{P_\alpha} / \boldsymbol{P_{\alpha,+}}.$$

Pour $f \in K^\times$, on définit son image dans G_ν, notée $in_\nu(f)$, comme dans la Définition I.34.
Enfin, on définit une valuation naturelle sur G_ν de groupe des valeurs Γ, notée ord, comme dans la Définition I.34.

Remarque I.36 — On a l'injection naturelle :

$$gr_\nu(R) \hookrightarrow G_\nu.$$

Définition I.37 — *Soit G une algèbre graduée n'ayant pas de diviseurs de zéro. On appelle* ***saturé de G*** *l'agèbre graduée G^* définie par :*

$$G^* = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in G,\ g \text{ homogène},\ g \neq 0 \right\}.$$

On dit que G est ***saturée*** *si $G = G^*$.*

Remarque I.38 — Pour toute algèbre graduée G, on a :

$$G^* = (G^*)^* .$$

En particulier, G^* est toujours saturée.

Exemple I.39 — Soit ν une valuation centrée en un anneau local R. Alors :

$$G_\nu = (gr_\nu(R))^* .$$

En particulier, G_ν est saturée.

3.4. Rang d'une valuation.

On va définir des invariants pour une valuation donnée, reliés entre eux par l'inégalité d'Abhyankar.

Définition I.40 — *Soient K un corps et $\nu : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ une valuation de K centrée en un sous-anneau local de K. On définit le* ***rang*** *de ν, noté $rg(\nu)$, et le* ***rang rationnel*** *de ν, noté $rg.rat(\nu)$, par :*

$$rg(\nu) = \dim(R_\nu),$$

$$rg.rat(\nu) = \dim_{\mathbb{Q}} (\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) .$$

Remarque I.41 —

(1) Un sous-groupe $\Delta \subset \Gamma$ est dit **isolé** si pour $\alpha \in \Delta$ et $\beta \in \Gamma$ tels que $-\alpha < \beta < \alpha$, alors $\beta \in \Delta$.
De manière équivalente, on peut définir le rang de ν comme étant le nombre de sous-groupes distincts et isolés de Γ (en comptant Γ mais pas $\{0\}$). Il y a en fait une bijection entre les sous-groupes isolés de Γ et les idéaux premiers de R_ν qui, à un sous-groupe isolé $\Delta \subset \Gamma$, associe un idéal premier $P_\Delta = \{f \in R_\nu \mid \nu(f) \notin \Delta\}$ de R_ν.

(2) $rg(\nu) \leqslant rg.rat(\nu)$ (voir Proposition 3.5 de **[Va1]**).

Théorème I.42 — (Inégalité d'Abhyankar) *Soient K un corps et $\nu : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ une valuation de K centrée en un sous-anneau $(R, \mathfrak{m}, k)$ local noethérien de K. Par la Remarque I.31, k_ν est une extension de k, on note alors $deg.tr(k_\nu|k)$ le degré de transcendance de l'extension $k_\nu|k$. On a l'inégalité :*

$$rg.rat(\nu) + deg.tr(k_\nu|k) \leqslant \dim(R).$$

Remarque I.43 — On en déduit alors, via la Remarque I.41, que :

$$rg(\nu) \leqslant \dim(R) < +\infty.$$

3.5. Composition de valuations.

On va introduire la composition de valuations qui va nous permettre de nous ramener de l'uniformisation locale de valuations de rang quelconque à l'uniformisation locale de valuations de rang 1.

Soit $\nu : K \twoheadrightarrow \Gamma$ une valuation d'un corps K telle que $rg(\nu) > 1$. Ainsi il existe une valuation $\nu' : K \twoheadrightarrow \Gamma'$ de K telle que $\Gamma' \subsetneq \Gamma$ et $R_\nu \subset R_{\nu'}$. Alors, l'idéal $m_{\nu'} \cap R_\nu$ est un idéal premier de R_ν et $R_{\nu'} = (R_\nu)_{m_{\nu'} \cap R_\nu}$. On note $\overline{\Gamma}$ le sous-groupe isolé de Γ correspondant à l'idéal premier $m_{\nu'} \cap R_\nu$ de R_ν. On a :

$$\Gamma' \simeq \Gamma/\overline{\Gamma}.$$

Soit $\overline{\nu} : \kappa(m_{\nu'} \cap R_\nu) \twoheadrightarrow \overline{\Gamma}$ la valuation de $\kappa(m_{\nu'} \cap R_\nu)$, alors :

$$R_{\overline{\nu}} = R_\nu/(m_{\nu'} \cap R_\nu).$$

On a ainsi décomposé ν en deux valuations ν' et $\overline{\nu}$ telles que :

$$rg(\nu) = rg(\nu') + rg(\overline{\nu}).$$

On note alors $\nu = \nu' \circ \overline{\nu}$.

Réciproquement, soient ν_1 une valuation de K et ν_2 une valuation de k_{ν_1}. Soit $\varphi : R_{\nu_1} \twoheadrightarrow k_{\nu_1}$ le morphisme canonique. Alors, il existe une valuation ν de K telle que $R_\nu = \varphi^{-1}(R_{\nu_2})$ appelée **composition** de ν_1 et ν_2, notée $\nu = \nu_1 \circ \nu_2$.
L'idéal $\varphi^{-1}(m_{\nu_2})$ est un idéal premier non-nul de R_ν contenu strictement dans m_ν. Si ν est centrée en un anneau local R, alors ν_1 est centrée en $R_{\varphi^{-1}(m_{\nu_2}) \cap R}$ et $\nu_{2\,|\,\kappa(\varphi^{-1}(m_{\nu_2}) \cap R)}$ est centrée en $R/(\varphi^{-1}(m_{\nu_2}) \cap R)$.

3.6. Valuations archimédiennes et valuations monomiales.

Terminons cette section avec un exemple de valuation : la valuation monomiale. Nous suivons ici l'exposé fait par **[S1]**.
On rappelle qu'un **semi-groupe** est un ensemble muni d'une loi associative.

Définition I.44 — *Un semi-groupe ordonné Φ est dit **archimédien** si, pour tout α, $\beta \in \Phi$, $\beta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha < n\beta$.*
*Une valuation ν centrée en un anneau local R est dite **archimédienne** si $\nu(R \setminus \{0\})$ est un semi-groupe archimédien.*

Remarque I.45 — On ferra attention à ne pas confondre la notion de *valuation archimédienne*, qui correspond au fait que $\nu(R \setminus \{0\})$ possède la propriété d'Archimède au sens de **[ZS]** (p. 45), avec la notion de *valeur absolue non-archimédienne* qui correspond au fait de remplacer l'inégalité triangulaire par l'inégalité : $|x + y| \leqslant \max\{|x|, |y|\}$. En suivant la terminologie de **[B]** et **[L]**, pour éviter toute confusion, on parlera plutôt dans ce cas-là de *valeur absolue ultramétrique.*

Lemme I.46 — *Soit Γ un groupe abélien ordonné ne possédant pas de sous-groupes isolés autres que $\{0\}$ et lui-même. Soit $\Phi \subset \Gamma_+$ un semi-groupe ordonné. Alors Φ est archimédien.*

Preuve : Par l'absurde, si Φ n'est pas archimédien, il existe α, $\beta \in \Phi$, $\beta \neq 0$ tels que, pour tout $n \geqslant 1$, $n\beta \leqslant \alpha$. En particulier, l'ensemble :

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ -n\beta < \gamma < n\beta\}$$

est un sous-groupe isolé non-trivial de Γ.

□

Corollaire I.47 — *Une valuation de rang 1 centrée en un anneau local est archimédienne.*

Le Lemme I.48 suivant nous dit que pour une valuation archimédienne centrée en un anneau local noethérien, toute suite croissante dans le groupe des valeurs ne peut être bornée. Ce lemme technique nous sera utile à plusieurs reprises.

Lemme I.48 — *Soit ν une valuation archimédienne centrée en un anneau local noethérien R. Notons P_∞ le support de ν. Alors, $\nu(R \setminus P_\infty)$ ne contient aucune suite infinie croissante et bornée.*

Preuve : Soit $(\beta_i)_{i\geqslant 1}$ une suite croissante infinie de $\nu(R \setminus P_\infty)$ bornée par β. Cette suite correspond à une suite infinie décroissante d'idéaux de R/P_β. Il nous suffit donc de montrer que R/P_β est de longueur finie. Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R et $\nu(\mathfrak{m}) = \min\{\nu(R \setminus P_\infty) \setminus \{0\}\}$. La valuation étant archimédienne, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\beta \leqslant n\nu(\mathfrak{m}).$$

Ainsi, $\mathfrak{m}^n \subset P_\beta$ et donc , il existe une application surjective :

$$R/\mathfrak{m}^n \twoheadrightarrow R/P_\beta.$$

□

Lemme I.49 — *Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier. On suppose que $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n) = u$, où n est le nombre de générateurs de $\mathfrak{m}$. Soient Φ un semi-groupe ordonné archimédien et $\beta_1, ..., \beta_n \in \Phi$ tels que $\beta_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*
Notons $\Phi_* \subset \Phi$ le semi-groupe ordonné suivant :

$$\Phi_* = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pour $\gamma \in \Phi_*$, considérons l'idéal de R :

$$I_\gamma = \left\langle \left\{ u_1^{\alpha_1}...u_n^{\alpha_n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \geqslant \gamma \right\} \right\rangle.$$

Alors, pour $f \in R \setminus \{0\}$, l'ensemble :

$$\Phi_f = \{\gamma \in \Phi_* \,|\, f \in I_\gamma\}$$

est fini.

Preuve : Soit $f \in R \setminus \{0\}$. Comme Φ est archimédien alors Φ_* l'est aussi. Remarquons que Φ_* est un ensemble dénombrable et que Φ_f est un ensemble bien ordonné car à une suite décroissante de Φ_f correspond une suite croissante d'idéaux de R de la forme I_γ qui est forcément finie vu que R est noethérien. Notons γ_0 le plus petit élément non-nul de Φ_f (en fait 0 est le min de Φ_* et de Φ_f, si ce dernier ensemble est réduit à 0, la preuve est terminée).
Comme f est non-nul, il existe $i \geqslant 0$ tel que $f \notin \mathfrak{m}^i$ et donc $\Phi_f \neq \Phi_*$. Il existe donc $\gamma_1 = \sup \Phi_f \in \Phi_*$. Or Φ_* est archimédien, ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_1 < N\gamma_0$. Alors, pour tout élément $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \in \Phi_f$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, comme $\beta_i \in \Phi_f$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on en déduit :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\gamma_0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i < \gamma_1 < N\gamma_0.$$

Nécessairement, on a $\left(N - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\gamma_0 > 0$ et comme $\gamma_0 > 0$ on en déduit que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant N$, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un choix fini de n-uplets $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et donc de $\gamma \in \Phi_f$.

$\square$

Corollaire I.50 — *Sous les hypothèses du Lemme I.49, il existe une unique valuation, notée $\nu_{0,u}$, centrée en un idéal premier de R, telle que :*

$$\nu_{0,u}(u_j) = \beta_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n;$$
$$\nu_{0,u}(f) = \max\{\gamma \in \Phi_f\},\ \forall\, f \in R \setminus \{0\}.$$

*Cette valuation est appelée la **valuation monomiale** de R associée à u et à $\beta_1, ..., \beta_n$.*
*Soit ν une valuation de groupe des valeurs Γ et centrée en un idéal premier de R. On dit que ν est **monomiale** par rapport à u s'il existe $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma_+$ tels que :*

$$\forall\, f \in R \setminus \{0\},\ \nu(f) = \nu_{0,u}(f).$$

Exemple I.51 — Pour ν une valuation centrée en $R = k\left[[u_1, ..., u_n]\right]$, si $f = \sum c_\alpha u^\alpha$, alors $\nu_{0,u}(f) = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(u_i) \;\middle|\; c_\alpha \neq 0 \right\}$ est la valuation monomiale associée à u et à $\nu(u_1), ..., \nu(u_n)$.

Remarque I.52 — Si ν est une valuation centrée en R dont le groupe des valeurs est archimédien et si $\nu_{0,u}$ est la valuation monomiale associée à u et à $\nu(u_1), ..., \nu(u_n)$, alors, pour tout $\gamma \in \Phi_*$, $\nu(I_\gamma) = \min\{\nu(f) \mid f \in I_\gamma\} \geqslant \gamma$. Ainsi, pour tout $f \in R \setminus \{0\}$:

$$\nu_{0,u}(f) \leqslant \nu(f).$$

De plus, la valuation ν est monomiale si et seulement si :

$$gr_\nu(R) = k\left[in_\nu(u_1), ..., in_\nu(u_n)\right].$$

4. Différentes notions d'uniformisation locale

Dans cette section nous allons donner différentes notions d'uniformisation locale, que ce soit pour des schémas ou pour des anneaux. L'uniformisation locale est la version locale de la résolution des singularités. Résoudre les singularités d'un schéma X noethérien irréductible et réduit revient à trouver un morphisme propre et birationnel $X' \to X$ tel que X' soit régulier. Ainsi, l'uniformisation locale d'une valuation ν de K, le corps des fractions d'un anneau local intègre R où est centrée la valuation, revient à trouver un anneau R' régulier qui domine birationnellement R et tel que $R' \subset R_\nu \subset K$. Les références utilisées pour cette partie sont **[S1]**, **[CP1]** et **[NS]**.

4.1. Uniformisation locale des schémas.

Définition I.53 — *Soient X un schéma noethérien et Y un sous-schéma de X. Soit $\mathcal{I}_Y$ le faisceau d'idéaux définissant Y dans X.*
*On dit que X est **normalement plat** le long de Y si, pour tout point $\xi \in Y$, $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{I}^n_{Y,\xi}/\mathcal{I}^{n+1}_{Y,\xi}$ est un $\mathcal{O}_{Y,\xi}$-module libre.*

Propriété I.54 — (d'uniformisation locale des schémas). *Soit S un schéma noethérien (non nécessairement intègre). Soient X une composante irréductible de S_{red} et ν une valuation de $K(X)$ centrée en un point $\xi \in X$. Il existe alors un éclatement $\pi : S' \to S$ le long d'un sous-schéma de S, ne contenant aucune composante irréductible de S_{red} et ayant la propriété suivante :*

soit X' le transformé strict de X par π et soit ξ' le centre de ν sur X', alors ξ' est un point régulier de X' et S' est normalement plat le long de X' en ξ'.

Propriété I.55 — (d'uniformisation locale des schémas intègres). *Soit X un schéma noethérien réduit et irréductible et ν une valuation de $K(X)$ centrée en un point $\xi \in X$. Alors, il existe un éclatement $\pi : X' \to X$ tel que le centre de ν sur X' soit un point régulier de X'.*

Le problème étant local, on peut juste l'exprimer en termes d'anneaux. Avant, nous allons rappeler la notion d'éclatement local par rapport à une valuation.

4.2. Éclatements locaux et uniformisation locale des anneaux.

Définition I.56 — *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien intègre de corps des fractions K. Soit ν une valuation de K centrée en R. Soient $u_1, ...u_r \in R$ et $v_1, ..., v_r \in R$ tels que $\nu(v_i) \leqslant \nu(u_i)$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$. Notons R' l'anneau :*

$$R' = R\left[\frac{u_1}{v_1}, ..., \frac{u_r}{v_r}\right].$$

Alors l'anneau $R^{(1)} = R'_{m_\nu \cap R'}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}^{(1)} = (m_\nu \cap R')R'_{m_\nu \cap R'}$.
Un ***éclatement local de R par rapport à ν*** *est un morphisme local d'anneaux locaux de la forme :*

$$\pi : (R, \mathfrak{m}) \to (R^{(1)}, \mathfrak{m}^{(1)}).$$

Soient I un idéal de R et $u_0 \in I$ tel que $\nu(u_0) \leqslant \nu(f)$, pour tout $f \in I$. Complétons u_0 en un ensmble $\{u_0, u_1, ..., u_s\}$ de générateurs de I. Le morphisme précédent est appelé un ***éclatement local de R par rapport à ν le long de I*** *si $r = s$ et $v_i = u_0$ pour tout $i \in \{1, ..., s\}$; conditions auxquelles on peut toujours se ramener sans perte de généralité en posant $u_0 = v_1 ... v_r$ et $u_i = \dfrac{u_i}{v_i} u_0$, $i \in \{1, ..., r\}$.*

Remarque I.57 — À isomorphisme près, la définition précédente est indépendante du choix de l'ensemble de générateurs de I, c'est-à-dire qu'un autre choix de générateurs donne un anneau isomorphe.

Propriété I.58 — (d'uniformisation locale des anneaux locaux). *Soient $(S, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien (non nécessairement intègre), P un idéal premier minimal de S et ν une valuation du corps des fractions de S/P centrée en S/P. Alors, il existe un éclatement local $\pi : S \to S'$ par rapport à ν tel que S'_{red} soit régulier et $Spec(S')$ soit normalement plat le long de $Spec(S'_{red})$.*

Propriété I.59 — (d'uniformisation locale des anneaux locaux intègres). *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien intègre, ν une valuation du corps des fractions de R centrée en R. Il existe alors un éclatement local $\pi : R \to R'$ par rapport à ν tel que R' soit régulier.*

Nous finissons cette section avec la notion de croisements normaux et d'uniformisation locale plongée.

4.3. Croisements normaux et uniformisation locale plongée.

Définition I.60 — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et ν une valuation centrée en R, au sens de la Définition I.29, de groupe des valeurs Γ. Soit $u = \{u_1, ..., u_n\} \subset \mathfrak{m}$ tel que $(u) + \sqrt{(0)} = \mathfrak{m} + \sqrt{(0)}$. Enfin, pour $f \in R$, on note $\overline{f} \in R/\sqrt{(0)} = R_{red}$ l'image de f dans R_{red} par le morphisme de passage au quotient.*

*(1) Un monôme $u^\alpha = u_1^{\alpha_1}...u_n^{\alpha_n}$ est dit **minimal par rapport à ν** si la famille $\{\nu(u_j) \mid \alpha_j \neq 0\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est $\mathbb{Z}$-libre dans Γ.*

*(2) Soit I un idéal de R. On dit que le triplet (R, I, u) est à **croisements normaux** si :*

(a) R_{red} est un anneau local régulier et $(\overline{u_1}, ..., \overline{u_n})$ est un système régulier de paramètres de R_{red} ;

(b) $Spec(R)$ est normalement plat le long de $Spec(R_{red})$;

(c) $I / \left(I + \sqrt{(0)}\right)$ est un idéal principal engendré par un monôme en $\overline{u_1}, ..., \overline{u_n}$ (avec la possibilité que $I = (1)$ et donc $I / \left(I + \sqrt{(0)}\right) = (1)$).

*(3) Soit I un idéal de R, le triplet (R, I, u) est à **croisements normaux standards** par rapport à ν si (R, I, u) est à croisements normaux et $I / \left(I + \sqrt{(0)}\right)$ est engendré par un monôme minimal par rapport à ν.*

*(4) Soit I un idéal de R, on dit que (R, I) est à **croisements normaux** (resp. à **croisements normaux standards**) s'il existe u tel que (R, I, u) soit à croisements normaux (resp. à croisements normaux standards).*

*(5) On dit que R est **désingularisé** si (R, R) est à croisements normaux.*

Définition I.61 — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et ν une valuation centrée en R au sens de la Définition I.29. Soit I un idéal de R, on dit que la paire (R, I) admet une **uniformisation locale plongée** (resp. une **uniformisation locale plongée standard**) s'il existe une suite :*

$$R \xrightarrow{\pi_0} R^{(1)} \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} R^{(l-1)} \xrightarrow{\pi_{l-1}} R^{(l)}$$

où, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, π_i est un éclatement local par rapport à ν le long d'un idéal $J^{(i)}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) Pour $1 \leqslant i \leqslant l$, $J^{(i)} \not\subset P_\infty^{(i)}$, $P_\infty^{(i)}$ étant le support de ν dans $R^{(i)}$.

(2) $\left(R^{(i)}, IR^{(i)}\right)$ est à croisements normaux (resp. à croisements normaux standards).

*Enfin, on dit que R admet une **uniformisation locale plongée** (resp. une **uniformisation locale plongée standard**) si, pour tout idéal I de R, (R, I) admet une uniformisation locale plongée (resp. une uniformisation locale plongée standard).*

Propriété I.62 — (d'uniformisation locale plongée des schémas). *Soit S un schéma noethérien (non nécessairement intègre). Soient X une composante irréductible de S_{red} et ν une valuation de $K(X)$ centrée en un point $\xi \in X$. Il existe alors un éclatement $\pi : S' \to S$ le long d'un sous-schéma de S, ne contenant aucune composante irréductible de S_{red} et ayant la propriété suivante :*
soient X' le transformé strict de X par π, ξ' le centre de ν sur X' et D le diviseur exceptionnel de π, alors $(\mathcal{O}_{X',\xi'}, \mathcal{I}_{D,\xi'})$ admet une uniformisation locale plongée.

Dans le cas des anneaux locaux noethériens intègres, on peut énoncer la propriété de manière un peu plus simple :

Propriété I.63 — (d'uniformisation locale plongée des anneaux locaux intègres). *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien intègre et ν une valuation de K, le corps des fractions de R, centrée en R. On dit que ν admet une **uniformisation locale plongée** si, pour un nombre* *fini d'éléments de R, $f_1, ..., f_q \in R$ tels que $\nu(f_1) \leqslant ... \leqslant \nu(f_q)$, il existe une suite d'éclatements locaux par rapport à ν :*

$$R \xrightarrow{\pi_0} R^{(1)} \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} R^{(l-1)} \xrightarrow{\pi_{l-1}} R^{(l)}$$

telle que $R^{(l)}$ soit régulier et telle qu'il existe un système régulier de paramètres $u^{(l)} = \left(u_1^{(l)}, ..., u_d^{(l)}\right)$ de $R^{(l)}$ tel que les f_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, soient des monômes en $u^{(l)}$ et $f_1 / ... / f_q$ dans $R^{(l)}$.

5. L'idéal premier implicite

Pour une valuation donnée, l'idéal premier implicite est un des objets centraux de l'uniformisation locale. En effet, cet idéal va être l'idéal à désingulariser. C'est un idéal du complété qui nous décrit les éléments de valuation infinie. Enfin, via le Lemme III.18, pour rendre R régulier (en fait $\widehat{R}$, voir la Remarque I.12), il nous suffit de rendre régulier $\widehat{R}_H$ et $\widehat{R}/H$, où H est l'idéal premier implicite associé à une valuation centrée en R. L'intérêt de l'idéal premier implicite est que $\widehat{R}_H$ est automatiquement régulier sous l'hypothèse de quasi-excellence. Ainsi il nous suffira de démontrer l'uniformisation locale pour des valuations centrées en $\widehat{R}/H$.
On ne va présenter ici que les idéaux premiers implicites pour des valuations archimédiennes car cela étant suffisant dans le cadre de l'uniformisation locale vu que d'après **[NS]**, il suffit de considérer des valuations de rang 1 qui sont archimédiennes (voir Corollaire I.47).
On va suivre les exposés fait par **[S1]** et **[HGOAST]**.

5.1. Définition et premières propriétés.

Définition I.64 — *Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien, P_∞ un idéal premier minimal de R et ν une valuation archimédienne de R_{P_∞} centrée en R. On appelle* ***idéal premier implicite*** *de R associé à ν, noté $H(R, \nu)$ ou plus simplement H s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'idéal de $\widehat{R}$ définit par :*

$$H = \bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)} P_\beta \widehat{R},$$

où P_β est le ν-idéal de R de valuation β selon la Définition I.34.

Remarque I.65 —

(1) Si l'on suppose de plus que R est intègre, alors $P_\infty = (0)$.

(2) Comme la valuation est archimédienne, pour tout $\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n \subset P_\beta$. Il y a donc équivalence entre :

(a) $f \in H$;

(b) Il existe une suite de Cauchy $(f_n)_n \subset R$ telle que, si $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$, alors $\nu(f_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$;

(c) Pour toute suite de Cauchy $(f_n)_n \subset R$ telle que, si $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$, alors $\nu(f_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Lemme I.66 — *Sous les hypotèses de la Définition I.64, si H est l'idéal premier implicite de R associé à ν, alors :*

$$H \cap R = P_\infty$$

et il existe une inclusion naturelle :

$$R/P_\infty \hookrightarrow \widehat{R}/H.$$

Preuve : Comme le morphisme de complétion est fidèlement plat, alors :

$$\forall\, \beta \in \nu(R \setminus P_\infty),\ P_\beta \widehat{R} \cap R = P_\beta$$

(voir [**Mat1**], (4.C) (ii)). Ainsi :

$$H \cap R = \left(\bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)} P_\beta \widehat{R} \right) \cap R = \bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)} P_\beta = P_\infty.$$

□

Théorème I.67 — *Reprenons les hypothèses de la Définition I.64. Soit H l'idéal premier implicite de R associé à ν, alors :*

(1) H est un idéal premier de $\widehat{R}$;

(2) ν s'étend de manière unique en une valuation $\widehat{\nu}$ centrée en $\widehat{R}/H$.

Preuve : Soit $\overline{f} \in \widehat{R}/H$, $\overline{f} \neq \overline{0}$. Soit $f \in \widehat{R}$ un représentant de $\overline{f}$, comme $\overline{f} \neq \overline{0}$, alors $f \notin H$, c'est-à-dire qu'il existe $\beta_0 \in \nu(R \setminus P_\infty)$ tel que $f \notin P_{\beta_0}\widehat{R}$.
Remarquons que l'ensemble $\{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty) \mid \beta < \beta_0\}$ est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerais alors une suite infinie croissante d'éléments de $\nu(R \setminus P_\infty)$ bornée par β_0, or, par le Lemme I.48 ceci est impossible.
On en déduit alors qu'il existe un unique $\beta_{\overline{f}} \in \nu(R \setminus P_\infty)$ tel que :

$$f \in \left(P_{\beta_{\overline{f}}}\widehat{R}\right) \setminus P_{\beta_{\overline{f}},+}\widehat{R}.$$

Grâce au (2) de la Remarque I.65 et au Lemme I.66, on voit que cet élément $\beta_{\overline{f}}$ ne dépend que de $\overline{f}$ et pas du choix du représentant de $\overline{f}$. On définit alors l'application :

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\nu} : & \left(\widehat{R}/H\right) \setminus \{\overline{0}\} & \to & \nu(R \setminus P_\infty) \\ & \overline{f} & \mapsto & \beta_{\overline{f}} \end{array}$$

Par le Lemme I.66, pour tout $f \in R \setminus P_\infty$, $\nu(f) = \widehat{\nu}\left(\overline{f}\right)$.
Par définition et grâce au (2) de la Remarque I.65, il est clair que, pour tout $\overline{f}, \overline{g} \in \widehat{R}/H$,

$$\widehat{\nu}\left(\overline{f} + \overline{g}\right) \geqslant \min\left\{\widehat{\nu}\left(\overline{f}\right), \widehat{\nu}\left(\overline{g}\right)\right\}$$

$$\widehat{\nu}\left(\overline{f}\overline{g}\right) \geqslant \widehat{\nu}\left(\overline{f}\right) + \widehat{\nu}\left(\overline{g}\right).$$

Montrons que, pour tout $\overline{f}, \overline{g} \in \left(\widehat{R}/H\right) \setminus \{\overline{0}\}$:

(i) : $\overline{f}\overline{g} \neq \overline{0}$;
(ii) : $\widehat{\nu}\left(\overline{f}\overline{g}\right) = \widehat{\nu}\left(\overline{f}\right) + \widehat{\nu}\left(\overline{g}\right)$.

En effet, notons $\alpha = \widehat{\nu}\left(\overline{f}\right)$ et $\beta = \widehat{\nu}\left(\overline{g}\right)$. Soit $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$, alors, comme $\mathfrak{m}P_\gamma \subset P_{\gamma,+}$, on a :

$$\begin{aligned} P_\gamma / P_{\gamma,+} &\simeq P_\gamma / \left(P_{\gamma,+} + \mathfrak{m}P_\gamma\right) \\ &\simeq \left(P_\gamma / P_{\gamma,+}\right) \otimes_R k \\ &\simeq \left(P_\gamma / P_{\gamma,+}\right) \otimes_R \left(\widehat{R}/\mathfrak{m}\widehat{R}\right) \\ &\simeq P_\gamma \widehat{R} / \left(\left(P_{\gamma,+} + \mathfrak{m}P_\gamma\right)\widehat{R}\right) \\ &\simeq P_\gamma \widehat{R} / P_{\gamma,+}\widehat{R}. \end{aligned}$$

On en déduit donc qu'il existe $a \in P_\alpha$ et $b \in P_\beta$ tels que :

$$a \equiv f \mod P_{\alpha,+}\widehat{R},$$

$$b \equiv g \mod P_{\beta,+}\widehat{R}.$$

Il en suit que :

$$ab \equiv fg \mod P_{\alpha+\beta,+}\widehat{R}.$$

Comme ν est une valuation, alors $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b) = \alpha + \beta$ et donc $ab \in P_{\alpha+\beta} \setminus P_{\alpha+\beta,+}$. Via le Lemme I.66, on en déduit que :

$$fg \in P_{\alpha+\beta}\widehat{R} \setminus P_{\alpha+\beta,+}\widehat{R},$$

c'est-à-dire que $f, g \notin H$ (donc que $\overline{f}\overline{g} \neq \overline{0}$) et que $\widehat{\nu}\left(\overline{f}\overline{g}\right) = \alpha + \beta = \widehat{\nu}\left(\overline{f}\right) + \widehat{\nu}\left(\overline{g}\right)$. Ainsi, (i) et (ii) sont démontrés.
Par (i), H est un idéal premier de $\widehat{R}$, ce qui démontre (1). Le fait que $\widehat{\nu}$ soit une valuation centrée en $\widehat{R}/H$ découle de (ii). Pour achever la preuve de (2), il faut montrer que $\widehat{\nu}$ est unique. Comme R est noethérien, il existe $u_1, ..., u_n \in P_{\alpha,+}$ et $v_1, ..., v_n \in \widehat{R}$ tels que :

$$f = a + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

En passant au quotient, on obtient :

$$\overline{f} = \overline{a} + \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i}\,\overline{v_i} \in \widehat{R}/H.$$

Ainsi, pour toute extension $\widehat{\nu}'$ de ν centrée en $\widehat{R}/H$, $\widehat{\nu}'\left(\overline{f}\right) = \alpha = \widehat{\nu}\left(\overline{f}\right)$.

□

Remarque I.68 — Dans la preuve, on a montré que :

$$P_\gamma / P_{\gamma,+} \simeq P_\gamma \widehat{R} / P_{\gamma,+}\widehat{R}.$$

On en déduit alors les isomorphismes d'algèbres graduées :

$$gr_\nu(R) \simeq gr_{\widehat{\nu}}\left(\widehat{R}/H\right),$$

$$G_\nu \simeq G_{\widehat{\nu}}.$$

5.2. Idéal premier implicite et anneaux quasi-excellents.

Corollaire I.69 — *Soient R un anneau local quasi-excellent réduit, P_∞ un idéal premier minimal de R et ν une valuation archimédienne de R_{P_∞} centrée en R. Alors, $\widehat{R}_H$ est un anneau local régulier.*

Preuve : Comme R est noethérien et réduit, $(0) = P_1 \cap ... \cap P_n$ où les P_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des idéaux premiers minimaux distincts et $P_\infty \in \{P_1, ..., P_n\}$. Montrons que :

$$(0) = P_\infty R_{P_\infty}.$$

Comme $(0) \subset P_\infty$ alors $(0) \subset P_\infty R_{P_\infty}$. Réciproquement, comme les P_i sont distincts, quitte à renuméroter, supposons que $P_1 = P_\infty$. Il existe alors $p_i \in P_i \setminus P_\infty$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Pour un élément $p\frac{a}{b} \in P_\infty R_{P_\infty}$, $p \in P_\infty$, $a \in R$, $b \notin P_\infty$, on a :

$$p\frac{a}{b} = pp_2...p_n \frac{a}{bp_2...p_n} \in (P_1 \cap ... \cap P_n) R_{P_\infty},$$

vu que P_∞ est premier et donc que $bp_2...p_n \notin P_\infty$.
On en déduit que :

$$(0)R_{P\infty} = P_\infty R_{P_\infty}.$$

Ainsi, $\kappa(P_\infty) = R_{P\infty}/P_\infty R_{P_\infty} \simeq R_{P_\infty}$ est un corps.
Comme R est local, par la Proposition I.22, R est un G-anneau et donc, pour tout $P \in Spec(R)$, $R_P \to \widehat{R_P}$ est régulier. En particulier, pour $P = \mathfrak{m}$, $R \to \widehat{R}$ est un morphisme régulier. Ainsi, vu la Définition I.10, pour tout $P \in Spec(R)$, $\widehat{R} \otimes_R \kappa(P)$ est géométriquement régulier sur $\kappa(P)$. En particulier, $\widehat{R} \otimes_R \kappa(P_\infty)$ est géométriquement régulier sur $\kappa(P_\infty)$. Or, par le Lemme I.66, on a :

$$\widehat{R}_H \simeq \left(\widehat{R} \otimes_R \kappa(P_\infty)\right)_{H\widehat{R}_H \cap \left(\widehat{R} \otimes_R \kappa(P_\infty)\right)}.$$

On en conclut que $\widehat{R}_H$ est géométriquement régulier sur $\kappa(P_\infty)$. En particulier, $\widehat{R}_H$ est régulier.

□

5.3. Effet des morphismes locaux sur l'idéal premier implicite.

Pour terminer cette section nous allons étudier l'effet sur H d'un éclatement local de R par rapport à ν.

Lemme I.70 — *Soit $(R, \mathfrak{m}) \to (R', \mathfrak{m}')$ un morphisme local d'anneaux locaux noethériens. Soient P_∞ un idéal premier minimal de R et ν une valuation archimédienne de R_{P_∞} centrée en R. Supposons qu'il existe un idéal premier minimal P'_∞ de R' tel que $P_\infty = P'_\infty \cap R$ et que ν s'étend en une valuation archimédienne ν' telle que son groupe des valeurs contienne celui de ν.*
Comme dans la Définition I.34, pour $\beta \in \nu'(R' \setminus \{0\})$, notons P'_β le ν'-idéal de R' de valuation β. Enfin, notons $H' = H(R', \nu')$ l'idéal premier implicite de R' associé à ν'.
Alors, pour tout $\beta \in \nu(R \setminus \{0\})$,

$$\left(P'_\beta \widehat{R'}\right) \cap \widehat{R} = P_\beta \widehat{R}.$$

Preuve : Soit $\beta \in \nu(R \setminus \{0\})$, par définition de ν', $P'_\beta \cap R = P_\beta$. Ainsi,

$$\left(P'_\beta \widehat{R'}\right) \cap \widehat{R} \supset P_\beta \widehat{R}.$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, considérons un élément $f \in \left(P'_\beta \widehat{R'}\right) \cap \widehat{R}$. Il existe alors une suite de Cauchy $(f_n)_n$ de R pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, convergeant vers f. Notons $\widehat{\pi} : \widehat{R} \to \widehat{R'}$ le morphisme local d'anneaux locaux induit par le morphisme local $\pi : (R, \mathfrak{m}) \to (R', \mathfrak{m}')$. Ainsi la suite $(\pi(f_n))_n$ de R' converge vers $\widehat{\pi}(f)$ pour la topologie $\mathfrak{m}'$-adique. En appliquant la Remarque I.65 à R', pour n suffisamment grand, $\nu(f_n) \equiv \nu'(f_n) \geqslant \beta$. Toujours en appliquant la Remarque I.65 mais cette fois à R, on en déduit que $f \in P_\beta \widehat{R}$.

□

Corollaire I.71 — *Avec les hypothèses du Lemme I.70, on a :*

$$H' \cap \widehat{R} = H.$$

Preuve : Comme ν' est archimédienne, pour tout $\alpha \in \nu'\left(R' \setminus P'_\infty\right)$, il existe $\beta \in \nu\left(R \setminus P_\infty\right)$ tel que $\alpha \leqslant \beta$. Ainsi :

$$H' = \bigcap_{\beta \in \nu'(R' \setminus P'_\infty)} P'_\beta \widehat{R'} = \bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)} P'_\beta \widehat{R'}.$$

Par le Lemme I.70, on en conclut que :

$$\begin{aligned} H &= \bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)} P_\beta \widehat{R} \\ &= \bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)} \left(P'_\beta \widehat{R'} \cap \widehat{R}\right) \\ &= \left(\bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus P_\infty)} P'_\beta \widehat{R'}\right) \cap \widehat{R} = H' \cap \widehat{R}. \end{aligned}$$

□

Corollaire I.72 — *Reprenons les hypothèses du Lemme I.70 et supposons de plus que $(R, \mathfrak{m}) \to (R', \mathfrak{m}')$ est un éclatement local par rapport à ν le long d'un idéal J non-nul de R et que ν reste archimédienne sur R'. On a :*

$$ht(H') \geqslant ht(H) \text{ et}$$

$$\dim\left(\widehat{R'}/H'\right) \leqslant \dim\left(\widehat{R}/H\right).$$

Preuve : Nous donnerons seulement une idée de preuve. Notons :

$$\overline{R} = \left(\widehat{R} \otimes_R R'\right)_{\mathfrak{m}'\widehat{R'} \cap \left(\widehat{R} \otimes_R R'\right)},$$

$$\overline{H} = H' \cap \overline{R}.$$

Soit $f \in J$ tel que $\nu(f) = \min\limits_{g \in J}\{\nu(g)\}$, alors $f \notin H'$ et en particulier, $f \notin H$. Comme $R'_f \simeq R_f$, il vient que $\widehat{R_f} = \overline{R_f}$. Grâce au Corollaire I.71, on a :

$$H\,\widehat{R_f} = \overline{H}\,\overline{R_f}.$$

Ainsi :

$$ht(H) = ht\left(\overline{H}\right).$$

Comme $\overline{R}$ est un anneau local noethérien dont le complété est $\widehat{R'}$ et, vu que le morphisme local $\overline{R} \to \widehat{R'}$ est fidèlement plat et satisfait le théorème de « going-down » (voir (5.A) de [**Mat1**]), on en déduit que :

$$ht(H') \geqslant ht\left(\overline{H}\right).$$

Pour montrer la deuxième inégalité du Corollaire I.72, on utilise le fait qu'un éclatement n'augmente pas la dimension (Lemme 2.2 de [**S3**]), ainsi :

$$\dim\left(\widehat{R'}\right) = \dim(R') \leqslant \dim(R) = \dim\left(\widehat{R}\right).$$

On conclut en utilisant la première inégalité du Corollaire I.72 et le fait que les anneaux locaux complets sont caténaires (voir (14.B) de [**Mat1**]).

□

6. Suites d'éclatements locaux encadrés

Comme on a vu précédemment, les éclatements locaux sont un outil essentiel en vue d'obtenir un résultat d'uniformisation locale. Ces éclatements sont dépendants du choix des différents paramètres réguliers possibles pour l'anneau d'arrivée. Les éclatements locaux encadrés vont imposer un système de générateurs de l'idéal maximal d'arrivée pour permettre de faire décroître des invariants que l'on verra par la suite (dimension de plongement et rang rationnel d'un sous-groupe de l'enveloppe divisible du groupe des valeurs de la valuation).
Pour cette section nous reprenons en grande partie [**S1**] : § 6, § 7, § 8.

6.1. Définitions et premières propriétés.

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien. Notons :

$$u = (u_1, ..., u_n)$$

un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$. Pour un sous-ensemble $I \subset \{1, ..., n\}$, notons :

$$u_I = \{u_i \mid i \in I\}.$$

Fixons un sous-ensemble $J \subset \{1, ..., n\}$ et un élément $j \in J$. Notons :

$$J^c = \{1, ..., n\} \setminus J.$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, considérons les changements de variables suivants :

$$u'_i = \begin{cases} u_i & \text{si} \quad i \in J^c \cup \{j\} \\ \dfrac{u_i}{u_j} & \text{si} \quad i \in J \setminus \{j\} \end{cases}$$

On note alors :

$$u' = (u'_1, ..., u'_n).$$

Rappelons que pour $f \in R$, l'**annulateur de f**, noté $Ann_R(f)$, est l'idéal de R défini par :

$$Ann_R(f) = \{g \in R \mid gf = 0\}.$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, notons :

$$Ann_R\left(u_i^\infty\right) = \bigcup_{l \geqslant 1} Ann_R\left(u_i^l\right),$$

$$R_i = R / Ann_R\left(u_i^\infty\right) \text{ et } R' = R_j\left[u'_{J \setminus \{j\}}\right].$$

Notons $(R^{(1)}, \mathfrak{m}^{(1)}, k^{(1)})$ le localisé de l'anneau R' en un idéal premier de R'.

Remarque I.73 — Le schéma $Spec\left(R'\right)$ est un sous-schéma affine de l'éclaté de $Spec(R)$ le long de l'idéal (u_J).

Enfin, nous réalisons une partition de $\{1,...,n\}$ comme suit :

$$J^\times = \{i \in J \setminus \{j\} \mid u'_i \in R^{(1)\times}\},$$
$$J^{\times c} = \{i \in J \setminus \{j\} \mid u'_i \notin R^{(1)\times}\}.$$

On a donc :

$$\{1,...,n\} = J^c \amalg J^\times \amalg J^{\times c} \amalg \{j\},$$
$$u' = u'_{J^c} \cup u'_{J^\times} \cup u'_{J^{\times c}} \cup \{u'_j\},$$

où les réunions sont disjointes dans la dernière égalité si R est un anneau régulier avec u pour système régulier de paramètres.
Notons $u^{(1)} = \left(u_1^{(1)},...,u_{n_1}^{(1)}\right)$ un système de générateurs de $\mathfrak{m}^{(1)}$ et

$$\pi : (R,u) \to \left(R^{(1)},u^{(1)}\right)$$

le morphisme naturel entre ces deux anneaux locaux.

Définition I.74 — *On dit que $\pi : (R,u) \to \left(R^{(1)},u^{(1)}\right)$ est un **éclatement encadré** de (R,u) si $n_1 \leqslant n$ et s'il existe un sous-ensemble $D_1 \subset \{1,...,n_1\}$ tel que :*

$$u'_{\{1,...,n\}\setminus J^\times} = u'_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}} = u^{(1)}_{D_1}.$$

*Si de plus, R est régulier, u est un système régulier de paramètres de R et $J^\times = \emptyset$ (c'est-à-dire si $n = n_1$ et $u' = u^{(1)}_{D_1}$), on dit que π est un **éclatement monomial**.*
*Enfin, une **suite locale encadrée** est une suite de la forme :*

$$(R,u) = \left(R^{(0)},u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right),$$

*où chaque $\pi_i : \left(R^{(i)},u^{(i)}\right) \to \left(R^{(i+1)},u^{(i+1)}\right)$, $0 \leqslant i \leqslant l-1$, est un éclatement encadré. Si de plus, pour tout i, les π_i sont des éclatements monomiaux, on dit que la suite est **monomiale**.*

Définition I.75 — *Soient $\pi : (R,u) \to \left(R^{(1)},u^{(1)}\right)$ un éclatement encadré et $T \subset \{1,...,n\}$. Supposons que R est régulier et que u est un système régulier de paramètres de R.*
*On dit que π est **indépendante de u_T** si $T \cap J = \emptyset$ (c'est-à-dire, $T \subset J^c$).*

Remarque I.76 — Si un éclatement encadré est indépendant de u_T, alors :

$$u_T \subset \left\{u_1^{(1)},...,u_{n_1}^{(1)}\right\}.$$

On définit par récurrence l'indépendance pour une suite locale encadrée en supposant qu'elle est déjà définie pour des suites de longueur $l-1$.

Définition I.77 — *Une suite locale encadrée de la forme :*

$$(R,u) = \left(R^{(0)},u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

*est dite **indépendante de u_T** si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

(1) la suite $\pi_{l-2} \circ ... \circ \pi_0$ est indépendante de u_T ;

(2) si $u_T \subset \left\{u_1^{(i)},...,u_{n_i}^{(i)}\right\}$, $0 \leqslant i \leqslant l-1$, alors π_{l-1} est indépendante de u_T.

Remarque I.78 — Soit $q \in \{1, ..., n\}$, on peut alors écrire u'_q sous la forme :

$$u'_q = u_1^{m_{1,q}} ... u_n^{m_{n,q}},$$

où $m_{p,q} \in \mathbb{Z}$, $p \in \{1, ..., n\}$. On peut donc décrire le changement de variables $u \to u'$ par la matrice $M = (m_{p,q})_{p,q} \in SL_n(\mathbb{Z})$ avec, par définition :

$$m_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = q \\ -1 & \text{si} \quad p = j \text{ et } q \in J \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q \text{ et, ou bien } q \neq j \text{, ou bien } q \notin J \end{cases}$$

En particulier, si $q \in J^c$, alors $u'_q \in u_{J^c}$ et si $q \in J$ alors u'_q est un monôme en u_J.
De même, on peut décrire le changement de variables $u' \to u$ par la matrice $N = (n_{p,q})_{p,q} = M^{-1} \in SL_n(\mathbb{Z})$ avec :

$$n_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si} \qquad \text{ou bien } p = q \text{, ou bien } p = j \text{ et } q \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, si $q \in J^c$, alors $u_q \in u'_{J^c}$ et si $q \in J$, alors u_q est un monôme en u'_J.
Si on note $e = \#(J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\})$, on en déduit qu'il existe $\beta_q \in \mathbb{N}^q$ et $z_q \in R'^{\times}$ tels que :

$$u_q = \left(u_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}}\right)^{\beta_q} z_q.$$

De plus, si $q \in J$, alors $\left(u_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}}\right)^{\beta_q}$ est un monôme en $u'_{J^{\times c} \cup \{j\}}$ uniquement. On a également :

$$\mathfrak{m}R' = \left(u_{J^c \cup \{j\}}\right) R'.$$

Enfin, si $J^{\times} = \emptyset$ alors, $z_q = 1$. Pour terminer cette remarque, on va étudier le cas où l'éclatement encadré est indépendant d'un sous ensemble. Soit $T \subset J^c$, notons :

$$t = \#(T) \text{ et } r = n - t.$$

Soit $v = \{v_1, ..., v_t\} = u_T$, $w = \{w_1, ..., w_r\} = u_{\{1,...,n\} \setminus T}$ et $u' = (v, w')$ où $w' = \{w'_1, ..., w'_r\}$. Pour $1 \leqslant q \leqslant r$, on écrit :

$$w'_q = w^{\gamma_q},$$

où $\gamma_q \in \mathbb{Z}^r$. Alors les r vecteurs $\gamma_1, ..., \gamma_r$ forment une matrice de $SL_r(\mathbb{Z})$ notée M_r. Quitte à renuméroter les lignes de la matrice M, on peut écrire M sous la forme d'une matrice diagonale par blocs où un bloc est M_r et l'autre est I_t la matrice identité de taille t.
Ainsi, pour tout $\delta \in \mathbb{Z}^r$, on a :

$$w'^{\delta} = w^{\gamma},\ \gamma = \delta F_r.$$

De même pour le changement de variables inverse, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^r$, on a :

$$w^{\gamma} = w'^{\delta},\ \delta = \gamma F_r^{-1}.$$

Nous allons généraliser cette remarque dans le cadre des suites locales encadrées.

Proposition I.79 — *Considérons une suite locale encadrée de la forme :*

$$(R, u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

Pour $0 \leqslant i \leqslant l-1$, notons n_{i+1} l'entier correspondant à l'entier n_1 de la Définition I.74, D_{i+1} l'ensemble correspondant à D_1 et $e_{i+1} = \#(D_{i+1})$.
Soient $0 \leqslant i < i' \leqslant l$, $q \in \{1, ..., n_i\}$, $q' \in \{1, ..., n_{i'}\}$. Alors :

(1) *$\exists\, \delta_q^{(i',i)} \in \mathbb{N}^{e_i}$, $z_q^{(i',i)} \in R^{(i')\times}$ tels que $u_q^{(i)} = \left(u_{D_{i'}}^{(i')}\right)^{\delta_q^{(i',i)}} z_q^{(i',i)}$.*

(2) *Supposons de plus que la suite soit indépendante de u_T avec $T \subset \{1, ..., n\}$ et $u_q^{(i)} \notin u_T$. Alors $\left(u_{D_{i'}}^{(i')}\right)^{\delta_q^{(i',i)}}$ est un monôme uniquement en $u_{D_{i'}}^{(i')} \setminus u_T$.*

(3) *Supposons que pour tout $i'' > 0$ tel que $i \leqslant i'' < i'$, $D_{i''} = \{1, ..., n_{i''}\}$ et $q' \in D_{i'}$. Il existe alors $\gamma_{q'}^{(i,i')} \in \mathbb{Z}^{n_i}$ tel que $u_{q'}^{(i')} = \left(u^{(i)}\right)^{\gamma_{q'}^{(i,i')}}$.*

(4) *Supposons de plus que la suite soit indépendante de u_T avec $T \subset \{1, ..., n\}$ et $u_{q'}^{(i')} \notin u_T$. Alors $u_{q'}^{(i')}$ est un monôme uniquement en $u_{\{1,...,n_i\}}^{(i)} \setminus u_T$.*

Preuve : Il suffit de montrer le cas où $i' = i+1$, le cas général se faisant par récurrence. Or ce cas n'est qu'une application des définitions et de la Remarque I.78.

□

Proposition I.80 — *Considérons les mêmes hypothèses que dans la Proposition I.79 et supposons de plus que la suite locale encadrée est monomiale et indépendante de u_T, $T \subset \{1, ..., n\}$. Notons $t = \#(T)$ et $r = n - t$. On pose :*

$$v = \{v_1, ..., v_t\} = u_T,$$

$$w = \{w_1, ..., w_r\} = u_{\{1,...,n\} \setminus T}.$$

Alors :

(1) *$\forall\, i \in [\![0, l]\!]$, $n_i = n$.*

(2) *$\forall\, i \in]\!]0, l]\!]$, $D_i = \{1, ..., n\}$.*

(3) *Pour $0 \leqslant i < i' \leqslant l$, notons $u^{(i)} = \left(v, w^{(i)}\right)$ où $w^{(i)} = \left(w_1^{(i)}, ..., w_r^{(i)}\right)$ et $u^{(i')} = \left(v, w^{(i')}\right)$ où $w^{(i')} = \left(w_1^{(i')}, ..., w_r^{(i')}\right)$. Alors, pour tout $1 \leqslant q \leqslant r$, $w_q^{(i)}$ est un monôme en $w^{(i')}$ ayant des exposants positifs.*

(4) *Pour $1 \leqslant q \leqslant r$, notons $w_q^{(i')} = \left(w^{(i)}\right)^{\gamma_q}$, $\gamma_q \in \mathbb{Z}^r$. Alors, les r vecteurs colonnes $\gamma_1, ..., \gamma_r$ forment une matrice $F_r^{(i',i)} \in SL_r(\mathbb{Z})$. Réciproquement, notons $w_q^{(i)} = \left(w^{(i')}\right)^{\delta_q}$, $\delta_q \in \mathbb{N}^r$. Alors, les r vecteurs colonnes $\delta_1, ..., \delta_r$ forment la matrice $\left(F_r^{(i',i)}\right)^{-1} \in SL_r(\mathbb{Z})$.*

Preuve : Comme dans la preuve de la Proposition I.79, il suffit de montrer le cas où $i' = i+1$, le cas général se faisant par récurrence (et en remarquant que $SL_r(\mathbb{Z})$ est un groupe). Or ce cas n'est qu'une application des définitions et de la Remarque I.78.

□

6.2. Construction d'un éclatement local encadré.

Gardons les mêmes notations que dans la sous-section 6.1. Nous donnons un éclatement encadré $\pi : (R, u, k) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}, k^{(1)}\right)$ très utilisé dans la suite de cette thèse. Nous allons décrire, en terme de générateurs et relations, l'extension de corps $k \hookrightarrow k^{(1)}$ induite par π.

Rappelons que R' est l'anneau :

$$R' = R_j \left[u'_{J\setminus\{j\}}\right].$$

Notons :

$$\begin{aligned} h &= \#(J) \\ h^c &= \#\left(J^c\right) = n - h \\ h^{\times c} &= \#\left(J^{\times c}\right) + 1 \\ h^{\times} &= \#\left(J^{\times}\right) = h - h^{\times c}. \end{aligned}$$

Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que :

$$\begin{aligned} J &= \{1, ..., h\} \\ J^c &= \{h+1, ..., n\} \\ j &= 1 \\ J^{\times c} &= \{2, ..., h^{\times c}\} \\ J^{\times} &= \{h^{\times c}+1, ..., h\}. \end{aligned}$$

Les changements de variables deviennent alors :

$$u'_i = \begin{cases} u_i & \text{si} \quad i \in \{1\} \cup \{h+1, ..., n\} \\ \dfrac{u_i}{u_j} & \text{si} \quad i \in \{2, ..., h\} \end{cases}$$

Comme on a vu précédemment, prenons $\mathfrak{m}' \in Spec(R')$ tel que $u'_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}} \subset \mathfrak{m}'$, ainsi $R^{(1)} = R'_{\mathfrak{m}'}$ et $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}' R^{(1)}$. De plus, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap R = \mathfrak{m}' \cap R$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $z_i \in k^{(1)}$ l'image de $u'_1 \in R'$ dans $k^{(1)}$. On remarque alors que :

$$z_i = 0, \; \forall\, i \in J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}.$$

Remarque I.81 — Notons $\overline{R} = R'/\mathfrak{m}R'$ et $\overline{u_i} \in \overline{R}$ l'image de $u'_i \in R'$ dans $\overline{R}$, $i \in J \setminus \{j\}$. Alors, $\overline{R} = k\left[\overline{u_{J^{\times c}}}, \overline{u_{J^{\times}}}^{\pm 1}\right]$. Les éléments $\overline{u_{J^{\times c}}}$ et $\overline{u_{J^{\times}}}^{\pm 1}$ sont algébriquement indépendants sur k, lorsque R est régulier avec u comme système régulier de paramètres. Or, on a les morphismes :

$$R \to R' \to R'_{\mathfrak{m}'} \to k^{(1)}.$$

En passant modulo $\mathfrak{m}$, on obtient :

$$k \to \overline{R} \to \overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}} \to k^{(1)},$$

où $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}R'$. On en déduit que $k^{(1)}$ est engendré sur k, en tant que corps, par $z_{J^{\times}}$.

Notons $t = deg.tr\left(k^{(1)}|k\right) + h^{\times c}$, par la Remarque I.81 :

$$deg.tr\left(k^{(1)}|k\right) \leqslant h^{\times}.$$

On en déduit les inégalités :

$$h^{\times c} \leqslant t \leqslant h^{\times} + h^{\times c} = h \leqslant n.$$

De plus, on peut supposer que $z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t$ sont algébriquement indépendants sur k dans $k^{(1)}$, tant que $z_{t+1}, ..., z_h$ sont algébriques sur $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)$.
Pour $t < i \leqslant h$, notons $P_i(X_i)$ le polynôme minimal de z_i sur $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)$. On a l'isomorphisme :

$$k^{(1)} \simeq \frac{k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[X_{t+1}, ..., X_h\right]}{\left(P_{t+1}(X_{t+1}), ..., P_h(X_h)\right)}.$$

Quitte à réduire au même dénominateur, pour $t < i \leqslant h$, on peut choisir $P_i \in k\left[z_{h^{\times c}+1}, ..., z_{i-1}\right]\left[X_i\right]$, mais les P_i ne sont plus des polynômes unitaires. Notons :

$$P_i(X_i) = \sum_m p_{i,m} X_i^m,$$

où $p_{i,m} \in k\left[z_{h^{\times c}+1}, ..., z_{i-1}\right]$, $t < i \leqslant h$. Notons alors $q_{i,m}$ l'élément de $R\left[u'_{h^{\times c}+1}, ..., u'_{i-1}\right]$ obtenu à partir de $p_{i,m}$ en remplaçant chaque $z_{i'}$ par $u_{i'}$, $t < i' < i$ et en remplaçant chaque coefficient de $p_{i,m}$ par un représentant dans R (on voit $p_{i,m}$ comme un polynôme en $z_{i'}$ à coefficients dans $k = R/\mathfrak{m}$).
En particulier, on remarque que $p_{i,m} \equiv q_{i,m} \mod \mathfrak{m}^{(1)}$. Enfin, notons :

$$Q_i(X) = \sum_m q_{i,m} X^m.$$

Pour $t < i \leqslant h$, comme $P_i(z_i) = 0$ dans $k^{(1)}$, on en déduit que :

$$Q_i(u'_i) \in \mathfrak{m}^{(1)}.$$

Proposition I.82 — *Notons $n_1 = n - t - h^{\times c}$ et posons le changement de variables suivant :*

$$u_i^{(1)} = \begin{cases} Q_{i+n-n_1}(u'_{i+n-n_1}) & \text{si} \quad h^{\times c} < i \leqslant h - (n - n_1) \\ u'_i & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant j^{\times c} \\ u'_{i+n-n_1} & \text{si} \quad h - (n - n_1) < i \leqslant n_1 \end{cases}$$

Alors :

(1) $u^{(1)} = \left(u_1^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right)$ est un système de générateurs de $\mathfrak{m}^{(1)}$.

(2) $\pi : (R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ est un éclatement local encadré.

(3) Si R est régulier avec u pour système régulier de paramètres, alors $u^{(1)}$ est un système régulier de paramètres de $R^{(1)}$.

Preuve : Nous allons donner une idée de preuve. Pour (1), il suffit de remarquer que, par construction :

$$u_i^{(1)} \in \mathfrak{m}^{(1)}, \ 1 \leqslant i \leqslant n_1.$$

Réciproquement, par la Remarque I.78 :

$$\mathfrak{m}R^{(1)} = \left(u_1^{(1)}, u_{h+1-(n-n_1)}^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right) R^{(1)} \subset \left(u_1^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right) R^{(1)}.$$

Rappelons que $\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)$ sont les images de $u_2^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}$ dans $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]$, en particulier, ce sont des éléments de

$\overline{\mathfrak{m}}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$. Enfin, $\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)$ engendrent un idéal maximal de $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]$ vu que :

$$\frac{k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]}{\left(\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)\right)} \simeq \frac{k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_{h^{\times c}}\right)\left[\overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]}{\left(Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)\right)} \simeq k^{(1)}.$$

Comme :

$$\begin{aligned}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}} &\simeq k\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_h}\right]_{\overline{\mathfrak{m}}} \\ &\simeq k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]_{\overline{\mathfrak{m}}k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]}.\end{aligned}$$

Tout ceci montre que les images de $u_2^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}$ engendrent l'idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$ de $\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$. Or par définition de $\overline{R}$ et de $\overline{\mathfrak{m}}$, on en déduit que $u_1^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}$ engendrent l'idéal $\mathfrak{m}'R_{\mathfrak{m}'} \equiv \mathfrak{m}^{(1)}$ dans $R'_{\mathfrak{m}'} \equiv R^{(1)}$.
Par définition, (2) est évidente, l'ensemble D_1 étant :

$$D_1 = \{1, ..., h^{\times c}\} \cup \{h - (n - n_1) + 1, ..., n_1\}.$$

Pour montrer (3), on remarque que, R étant régulier avec u comme système régulier de paramètres, alors, $\overline{R}$ est régulier et $\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)$ forment un système régulier de paramètres de l'anneau local régulier $\overline{\mathfrak{m}}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$ qui est de dimension $h - (n - n_1) - 1$. Enfin, on montre par récurrence sur $n - h$ que :

$$(0) \subsetneq \left(u_1^{(1)}\right) \subsetneq \left(u_1^{(1)}, u_{h-(n-n_1)+1}^{(1)}\right) \subsetneq ... \subsetneq \left(u_1^{(1)}, u_{h-(n-n_1)+1}^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right)$$

forme une chaîne de $n - h + 1$ idéaux premiers de $R^{(1)}$ distincts.

□

Corollaire I.83 — *Considérons une suite locale encadrée monomiale de la forme :*

$$(R, u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right).$$

Alors, pour $0 \leqslant i \leqslant l$, le corps résiduel de $R^{(i)}$ est $k = R/(u)$.

Preuve : Il suffit de considérer le cas $i = 1$, on montre le cas général par récurrence. Par définition des suites monomiales, $h^{\times c} = t = h$. Ainsi $n_1 = n$ et par définition, $k \simeq k_1$.

□

Pour terminer cette section nous allons interpréter les résultats précédents en termes d'éclatements encadrés par rapport à une valuation donnée.

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien, u un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$. Soit ν une valuation centrée en R. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons :

$$\beta_i = \nu(u_i),$$

$$x_i = in_\nu(u_i).$$

Soit $T \subset \{1, ..., n\}$, $E = \{1, ..., n\} \setminus T$ et $k\left[x_E\right]$ la sous-algèbre graduée de G_ν. Notons :

$$G = k\left[x_E\right]^* = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in k\left[x_E\right], g \text{ homogène}, g \neq 0 \right\}.$$

Considérons $J \subset E$ et choisissons $j \in J$ tel que :

$$\beta_j = \min_{i \in J}\{\beta_i\}.$$

Soit $\pi : (R, \mathfrak{m}) \to \left(R^{(1)}, \mathfrak{m}^{(1)}\right)$ un éclatement local par rapport à ν (voir Définition I.56) et considérons $R^{(1)}$ comme le localisé de R' en le centre de ν. On a donc :

$$J^{\times c} = \{i \in J \mid \beta_i > \beta_j\},$$
$$J^{\times} = \{i \in J \setminus \{j\} \mid \beta_i = \beta_j\}.$$

Notons alors :

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad i \in J^c \cup \{j\} \\ \dfrac{x_i}{x_j} & \text{si} \quad i \in J \setminus \{j\} \end{cases}$$
$$\overline{z}_i = \begin{cases} u'_i & \text{si} \quad i \in J^{\times} \\ 1 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., n\} \setminus J^{\times} \end{cases}$$
$$z_i = \begin{cases} x'_i & \text{si} \quad i \in J^{\times} \\ 1 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., n\} \setminus J^{\times} \end{cases}$$
$$\beta'_i = ord(x'_i), 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$E' = E \setminus J^{\times}.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, x'_i est homogène et $ord(x'_i) \geqslant 0$. On a :

$$ord(x'_i) > 0 \Leftrightarrow \beta_i > \beta_j \Leftrightarrow i \in E',$$
$$ord(z_i) = 0, \; \forall \, i \in J^{\times}.$$

Remarquons que $k^{(1)} = k\left(z_{J^{\times}}\right)$. Considérons le morphisme $\rho : R' \to k^{(1)}$, extension de $R \to k$, défini en envoyant u'_i sur z_i si $z \in J^{\times}$ et sur 0 si $i \in J^{\times c}$. L'idéal $\mathfrak{m}' = \ker \rho$ est le centre de ν dans R' et $R^{(1)} = R'_{\mathfrak{m}'}$.

Définition I.84 — *Considérons $u^{(1)}$ comme dans la Proposition I.82, l'éclatement local encadré $\pi : (R, \mathfrak{m}) \to \left(R^{(1)}, \mathfrak{m}^{(1)}\right)$ qui en résulte est appelé l'**éclatement local encadré le long de (u_J) par rapport à ν**.*

Soit $\varphi : D_1 \to J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}$ la bijection résultante de l'éclatement encadré. Notons alors :

$$E^{(1)} = \varphi^{-1}(E') \subset D_1,$$
$$x_i^{(1)} = x'_{\varphi(i)},$$
$$\beta_i^{(1)} = ord\left(x_i^{(1)}\right) = \beta'_{\varphi(i)}.$$

Remarque I.85 — Pour tout $i, i' \in E$, il existe $\delta_i \in \mathbb{N}^{\#(E^{(1)})}$, $\gamma_{i'} \in \mathbb{Z}^{\#(E)}$ tels que :

$$u_{i'}^{(1)} = u_E^{\gamma_{i'}},$$
$$u_i = \left(u_{E^{(1)}}^{(1)}\right)^{\delta_i} \overline{z_i}.$$

On a les mêmes transformations dans les algèbres graduées :

$$x_{i'}^{(1)} = x_E^{\gamma_{i'}},$$
$$x_i = \left(x_{E^{(1)}}^{(1)}\right)^{\delta_i} z_i.$$

On a également :

$$\beta_i = \left\langle \delta_i, \beta_{E^{(1)}}^{(1)} \right\rangle,$$

où $\langle .,. \rangle$ représente le produit scalaire de vecteurs de taille $\#(D_1)$. On en déduit les égalités d'algèbres graduées suivantes :

$$k[x]^* = k\left[z_{J^\times}, x^{(1)}_{D_1}\right]^* = k_1\left[x^{(1)}_{D_1}\right]^*,$$
$$k[x_E]^* = k\left[z_{J^\times}, x^{(1)}_{E^{(1)}}\right]^* = k_1\left[x^{(1)}_{E^{(1)}}\right]^*.$$

Nous allons considérer le cas où les éclatements sont indépendants d'un sous-ensemble de générateurs de l'idéal maximal.
Soit $r \leqslant n$, notons $u = (w, v)$ où $w = (w_1, ..., w_r) = (u_1, ..., u_r)$ et $v = (v_1, ..., v_{n-r}) = (u_{r+1}, ..., u_n)$. Pour une suite locale encadrée π indépendante de v de la forme :

$$(R, u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right),$$

notons, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, $u^{(i)} = (w^{(i)}, v)$ où $u^{(i)} = \left(u^{(i)}_1, ..., u^{(i)}_{n_i}\right)$, $w^{(i)} = \left(w^{(i)}_1, ..., w^{(i)}_{r_i}\right)$, avec $r_i = r + n_i - n$. Comme π est une suite locale encadrée, on a :

$$r_{i+1} \leqslant r_i \leqslant r.$$

Proposition I.86 — *Soit π la suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v précédente. Alors :*

(1) Si π est monomiale, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, $r_i = r$.

(2) Si $\beta_1, ..., \beta_r$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, π est monomiale.

(3) Supposons que π est monomiale. Par la Proposition I.80, il existe r vecteurs colonnes $\gamma^{(l)}_1, ..., \gamma^{(l)}_r$ formant une matrice $F^{(l)}_r \in SL_r(\mathbb{Z})$ tels que $w^{(l)}_i = w^{\lambda^{(l)}_i}$. Ainsi :

$$\beta^{(l)} = \beta F^{(l)}_r$$

(où l'ont voit β et $\beta^{(l)}$ comme des vecteurs ligne).

(4) Notons $x_i = in_\nu(w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Alors, $x^{(l)}_i = x^{\lambda^{(l)}_i}$ et si $\delta^{(l)}_1, ..., \delta^{(l)}_r$ sont les lignes de la matrice $\left(F^{(l)}_r\right)^{-1} \in SL_r(\mathbb{Z})$, alors, $x_i = x_l^{\delta^{(l)}_i}$. En particulier :

$$k[x]^* = k\left[x^{(l)}\right]^*.$$

Preuve : Nous donnerons seulement une idée de preuve. (1) découle de la Proposition I.80. (3) se montre par récurrence, le cas $l = 1$ découlant immédiatement des définitions et les $\gamma^{(1)}_i$ peuvent s'écrire de manière explicite. (2) se montre aussi par récurrence en utilisant (3) ainsi que de la construction faite précédemment de l'éclatement local encadré par rapport à ν. Enfin, on montre (4) par récurrence en utilisant bien les définitions et en observant certains cas particuliers.

□

6.3. Deux invariants pour l'uniformisation locale.

Nous allons définir deux invariants qui vont nous permettre de stopper les suites d'éclatements et donc nous fournir des théorèmes d'uniformisation locale.

Rappelons que, pour un anneau local $(R, \mathfrak{m}, k)$, on définit la **dimension de plongement**, notée *emb.dim*(R), par :

$$emb.dim(R) = \dim_k\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right).$$

Définition I.87 — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien, $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$. Soit ν une valuation centrée en S qui se décompose en $\nu = \nu_2 \circ \nu_1$ avec $rg(\nu_1) = 1$. Notons Γ le groupe des valeurs de ν et Γ_1 celui de ν_1 (qui est aussi le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ).*
Notons $I = \{f \in S \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}$, ν_1 induit alors une valuation de rang 1 sur S/I.
Notons $\overline{H}$ l'idéal premier implicite de $\widehat{S}/I\widehat{S}$ par rapport à ν_1 et H sa préimage dans $\widehat{S}$.

(1) On définit $\boldsymbol{e(S,\nu)} \in \mathbb{N}$ par :

$$e(S,\nu) = emb.dim\left(\widehat{S}/H\right).$$

(2) Supposons que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\nu(u_i) \in \Gamma_1$. On définit $\boldsymbol{r(S,u,\nu)} \in \mathbb{N}$ par :

$$r(S,u,\nu) = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\nu(u_i)\right).$$

Proposition I.88 — *Gardons les notations de la Définition I.87. Considérons $J \subset \{1, ..., n\}$ et $(S, u) \to \left(S^{(1)}, u^{(1)}\right)$ un éclatement encadré le long de (u_J) par rapport à ν avec $u^{(1)} = \left(u_1^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right)$. Reprenons les notations $J^c, J^\times, J^{\times c}$ et D_1 de la Définition I.74. Notons $J^{\times\prime} = \{1, ..., n_1\} \setminus D_1$.*
Supposons que les u_J sont k-linéairement indépendants dans $\mathfrak{m}\widehat{S}/\left(H + \mathfrak{m}^2\widehat{S}\right)$, il existe alors une partition de $J^c = J^{c\prime} \amalg J^{c\prime\prime}$ telle que les $u_J \cup u_{J^{c\prime}}$ soient k-linéairement indépendants modulo $H + \mathfrak{m}^2\widehat{S}$ et les $u_{J^{c\prime\prime}}$ appartiennent au k-espace vectoriel engendré par $u_J \cup u_{J^{c\prime}}$ modulo $H + \mathfrak{m}^2\widehat{S}$.
Identifions $J^{c\prime} \cup J^{\times c} \cup \{j\}$ à un sous-ensemble de D_1.
Notons $I^{(1)} = \{f \in S^{(1)} \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}$, $\overline{H}_1$ l'idéal premier implicite de $\widehat{S^{(1)}}/I^{(1)}\widehat{S^{(1)}}$ par rapport à ν_1 et $H^{(1)}$ sa préimage dans $\widehat{S^{(1)}}$. Notons $\mathfrak{m}^{(1)}$ l'idéal maximal de $S^{(1)}$ et $k^{(1)}$ son corps résiduel. Alors :

(1) $r(S,u,\nu) \leqslant e(S,\nu)$.

(2) $e(S^{(1)},\nu) \leqslant e(S,\nu)$. De plus, si les $u_{J^{c\prime} \cup J^{\times c} \cup \{j\} \cup J^{\times\prime}}$ sont $k^{(1)}$-linéairement indépendants alors :

$$e(S^{(1)},\nu) < e(S,\nu).$$

(3) $r(S,u,\nu) \leqslant r\left(S^{(1)}, u^{(1)}, \nu\right)$. En particulier, on a l'inégalité suivante, pour l'ordre lexicographique :

$$\left(e(S^{(1)},\nu), e(S^{(1)},\nu) - r\left(S^{(1)}, u^{(1)}, \nu\right)\right) \leqslant_{lex} \left(e(S,\nu), e(S,\nu) - r\left(S,u,\nu\right)\right).$$

Sous les mêmes hypothèse qu'en (2), l'inégalité est stricte.

Preuve : (1) est immédiat par la Définition I.87. Pour montrer (2), il faut remarquer que, $u^{(1)}$ étant un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}^{(1)}$, il induit un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}_1\left(\widehat{S^{(1)}}/H_1\right)$. Comme $n_1 \leqslant n$ (Définition I.74), il vient que $\#\left(J^{\times\prime}\right) \leqslant \#\left(J^\times\right)$. Or, $e(S,\nu) = \#(J) + \#\left(J^{c\prime}\right)$ et $u^{(1)}_{D_1 \setminus (J^{c\prime} \cup J^{\times c} \cup \{j\})}$ est contenu dans le $k^{(1)}$-espace vectoriel engendré par $u_{J^{c\prime} \cup J^{\times c} \cup \{j\} \cup J^{\times\prime}}$ modulo $H^{(1)} + \left(\mathfrak{m}^{(1)}\right)^2 \widehat{S^{(1)}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} e\left(S^{(1)},\nu\right) &\leqslant \#\left(J^{c\prime}\right) + \#\left(J^{\times c}\right) + 1 + \#\left(J^{\times\prime}\right) \\ &\leqslant \#\left(J^{c\prime}\right) + \#\left(J^{\times c}\right) + 1 + \#\left(J^\times\right) = \#\left(J^{c\prime}\right) + \#(J) = e(S,\nu). \end{aligned}$$

Enfin, si les $u_{J^{c\prime}\cup J^{\times c}\cup\{j\}\cup J^{\times\prime}}$ sont $k^{(1)}$-linéairement indépendants, la première inégalité est stricte ce qui nous donne le résultat.
L'assertion (3) est immédiate par les remarques I.78 et I.85.

□

6.4. Monomialisation d'éléments non-dégénérés.

Nous allons voir l'effet des éclatements encadrés sur les monômes. Une conséquence sera qu'un élément non-dégénéré, c'est-à-dire qu'en cet élément, la valuation est égale à la valuation monomiale, peut être transformé en un monôme via une suite locale encadrée.
Toute cette partie est en fait un cas particulier du jeu d'Hironaka (voir **[H2]** et **[S2]**).

Pour un élément $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note :

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Définition I.89 — *Soient $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons :*

$$\delta_i = \min\{\alpha_i, \gamma_i\}.$$

Posons alors $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n) \in \mathbb{N}^n$, $\tilde{\alpha} = \alpha - \delta$, $\tilde{\gamma} = \gamma - \delta$. Quitte à échanger α et γ, on peut supposer que $|\tilde{\alpha}| \leqslant |\tilde{\gamma}|$. On définit $\boldsymbol{\tau(\alpha,\gamma)}$ par :

$$\tau(\alpha,\gamma) = (|\tilde{\alpha}|, |\tilde{\gamma}|).$$

Remarque I.90 —

(1) Si $\tilde{\alpha} = (0, ..., 0)$, alors u^α divise u^γ dans R.

(2) Quitte à renuméroter les variables de $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\gamma}$, on peut supposer qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a < n$, tel que :

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_a, \underbrace{0, ..., 0}_{n-a}),$$
$$\tilde{\gamma} = (\underbrace{0, ..., 0}_{a}, \tilde{\gamma}_{a+1}, ..., \tilde{\gamma}_n).$$

On peut également supposer que, pour $1 \leqslant i \leqslant a$, $\tilde{\alpha}_i > 0$.

Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien tel que $\mathfrak{m}$ soit non-nilpotent et $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$. Soit ν une valuation centrée en R de groupe des valeurs Γ.
Considérons $J \subset \{1, ..., n\}$ le sous-ensemble le plus petit possible au sens de l'inclusion tel que :

$$\{1, ...a\} \subset J \text{ et } \sum_{i\in J} \tilde{\gamma}_i \geqslant |\tilde{\alpha}|.$$

En reprenant les notations de la Définition I.74, considérons $\pi : (R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ un éclatement encadré le long de (u_J), selon la Définition I.84. Notons :

$$\tilde{\alpha}'_i = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

$$\tilde{\gamma}'_i = \begin{cases} \tilde{\gamma}_i & \text{si} \quad i \neq j \\ \sum\limits_{i\in J} \tilde{\gamma}_i - |\tilde{\alpha}| & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}' = (\tilde{\alpha}'_1, ..., \tilde{\alpha}'_n),$$
$$\tilde{\gamma}' = (\tilde{\gamma}'_1, ..., \tilde{\gamma}'_n),$$

$$\delta' = (\delta_1, ..., \delta_{j-1}, \delta_j + |\tilde{\alpha}|, \delta_{j+1}, ..., \delta_n).$$

Avec ces notations on obtient :

$$u^\alpha = (u')^{\delta'+\tilde{\alpha}'},$$

$$u^\gamma = (u')^{\delta'+\tilde{\gamma}'}.$$

Posons $\alpha' = \delta' + \tilde{\alpha}'$ et $\gamma' = \delta' + \tilde{\gamma}'$.

Proposition I.91 — *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\tau(\alpha', \gamma') <_{lex} \tau(\alpha, \gamma),$$

pour l'ordre lexicographique.

Preuve : Nous ne donnerons qu'une idée de preuve. Il suffit de montrer que :

$$\left(|\tilde{\alpha}'|, |\tilde{\gamma}'|\right) <_{lex} \left(|\tilde{\alpha}|, |\tilde{\gamma}|\right).$$

Si $j \in \{1, ..., a\}$, alors par définition et par la Remarque I.90, on a :

$$|\tilde{\alpha}'| = |\tilde{\alpha}| - \tilde{\alpha}_j < |\tilde{\alpha}|.$$

Si $j \in \{a+1, ..., n\}$, alors $|\tilde{\alpha}'| = |\tilde{\alpha}|$. Par minimalité de J, il vient que :

$$\sum_{i \in J \setminus \{j\}} \tilde{\gamma}_i < |\tilde{\alpha}|.$$

On en conclut que $|\tilde{\gamma}'| < |\tilde{\gamma}|$.

□

Corollaire I.92 — *Soit $s = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid u'_i \notin R^{(1)\times}\}$. Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que u'_i n'est pas inversible dans $R^{(1)}$, pour $1 \leqslant i \leqslant s$ et, inversible pour $s < i \leqslant n$.*
Comme π est un éclatement encadré, $\{u'_1, ..., u'_s\} \subset u^{(1)}$. Quitte à renuméroter les variables, on peut suppsoser que $u'_i = u_i^{(1)}$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Notons les vecteurs de taille n_1 par :

$$\alpha^{(1)} = (\tilde{\alpha}'_1, ..., \tilde{\alpha}'_s, \underbrace{0, ..., 0}_{n_1 - s}),$$

$$\tilde{\gamma} = (\gamma'_1, ..., \gamma'_s, \underbrace{0, ..., 0}_{n_1 - s}).$$

Alors,

$$\tau\left(\alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}\right) <_{lex} \tau(\alpha, \gamma).$$

Preuve : Par la Proposition I.91 et par définition :

$$\tau\left(\alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}\right) \leqslant_{lex} \tau(\alpha', \gamma') <_{lex} \tau(\alpha, \gamma).$$

□

Remarque I.93 — Soit $T \subset \{1, .., n\}$ tel que $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\gamma}_i = 0$, pour tout $i \in T$. Alors, tout éclatement encadré le long de (u_J), avec J définit comme précédemment, est indépendant de u_T.

Corollaire I.94 — *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien tel que $\mathfrak{m}$ soit non-nilpotent et $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant r \leqslant n$. Notons $u = (w, v)$ avec :*

$$w = (w_1, ..., w_r) = (u_1, ..., u_r),$$

$$v = (v_1, ..., v_{n-r}).$$

Soit ν une valuation centrée en R, prenons j dans J vérifiant :

$$\nu(u_j) = \min_{i \in J}\{\nu(u_i)\}.$$

Soient $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$. Il existe alors une suite locale encadrée par rapport à ν (Définition I.84) et indépendante de v :

$$(R, u) \to \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que w^α divise w^γ ou bien w^γ divise w^α dans $R^{(l)}$.

Preuve : On itère le processus de construction de la Proposition I.91 en choisissant des éclatements locaux encadrés par rapport à ν, qui sont, par construction et par la Remarque I.93, indépendants de v. Par le Corollaire I.92, cette construction s'arrête après un nombre fini d'itérations. On conclut alors grâce au (1) de la Remarque I.90.

□

Proposition I.95 — *Gardons les notations du Corollaire I.94. Alors :*

$$w^\alpha \text{ divise } w^\gamma \text{ dans } R^{(l)} \Leftrightarrow \nu\left(w^\alpha\right) \leqslant \nu\left(w^\gamma\right).$$

Preuve : Notons $u^{(l)} = \left(w_1^{(l)}, ..., w_{r_l}^{(l)}, v\right)$. Par le (1) de la Proposition I.79, il existe $\alpha^{(l)}, \gamma^{(l)} \in \mathbb{N}^{r_l}$ et $y, z \in R^{(l)\times}$ tels que :

$$w^\alpha = y\left(w^{(l)}\right)^{\alpha^{(l)}},$$

$$w^\gamma = z\left(w^{(l)}\right)^{\gamma^{(l)}}.$$

Comme $\nu\left(w_1^{(l)}\right), ..., \nu\left(w_{r_l}^{(l)}\right) \geqslant 0$ et que, par construction, l'un des $\alpha^{(l)}, \gamma^{(l)}$ est plus grand que l'autre, composante par composante, on a :

$$\left(w^{(l)}\right)^{\alpha^{(l)}} \text{ divise } \left(w^{(l)}\right)^{\gamma^{(l)}} \text{ dans } R^{(l)} \Leftrightarrow \nu\left(\left(w^{(l)}\right)^{\alpha^{(l)}}\right) \leqslant \nu\left(\left(w^{(l)}\right)^{\gamma^{(l)}}\right).$$

□

Corollaire I.96 — *Gardons les notations du Corollaire I.94. Soit I un idéal de R engendré par des monômes en w. Considérons $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_b \in \mathbb{N}^r$ une collection minimale d'éléments de $\mathbb{N}^r$ telle que $(w^{\varepsilon_0}, ..., w^{\varepsilon_b}) = I$.*
Enfin, supposons que $\nu\left(w^{\varepsilon_0}\right) \leqslant \nu\left(w^{\varepsilon_i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant b$. Il existe alors une suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v :

$$(R, u) \to \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$IR^{(l)} = \left(w^{\varepsilon_0}\right) R^{(l)}.$$

Preuve : On définit l'entier suivant :

$$\tau(I,w) = \left(b, \min_{0\leqslant i<i'\leqslant b}\{\tau\left(w^{\varepsilon_i}, w^{\varepsilon_{i'}}\right)\}\right).$$

On suppose que $\tau(I,w) = (0,1)$ si $b = 0$. Si $b \geqslant 1$, on applique la Proposition I.91 à la paire $\{w^{\varepsilon_i}, w^{\varepsilon_{i'}}\}$ pour laquelle le minimum est atteint dans $\{\tau\left(w^{\varepsilon_i}, w^{\varepsilon_{i'}}\right)\}$. On obtient alors un sous-ensemble J de $\{1,...,n\}$ telle que tout éclatement encadré le long de (u_J) fait décroître $\tau(I,w)$ pour l'ordre lexicographique. On conclut en utilisant la Proposition I.95.

□

Définition I.97 — *Soient R un anneau local régulier et $u = (u_1,...,u_n)$ un système régulier de paramètres de R. Soit ν une valuation centrée en R. On dit que $f \in R$ est* ***non-dégénéré*** *par rapport à ν et u si :*

$$\nu_{0,u}(f) = \nu(f),$$

où $\nu_{0,u}$ est la valuation monomiale de R par rapport à u (Corollaire I.50).

Remarque I.98 —

(1) $f \in R$ est non-dégénéré par rapport u si et seulement s'il existe un idéal I de R, monomial par rapport à u, tel que $\nu(f) = \min\limits_{g\in I}\{\nu(g)\}$.

(2) Considérons une suite locale encadrée $(R,u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ et $f \neq 0$. Par le (1) de la Proposition I.79, chaque u_j est un monôme en $u^{(1)}$ multiplié par une unité de $R^{(1)}$. Ainsi, si f est non-dégénéré par rapport à u alors, f est aussi non-dégénéré par rapport à $u^{(1)}$.

Le Théorème I.99 suivant peut être vu comme un théorème « d'uniformisation locale plongée » de f, f étant un élément non-dégénéré par rapport à ν.

Théorème I.99 — *Considérons les mêmes hypothèses que celle de la Définition I.97. Soit f un élément non-dégénéré par rapport à u. Il existe alors une suite locale encadrée $(R,u) \to \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$ telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ multiplié par une unité de $R^{(l)}$.*
De plus, soit I un idéal de R tel que $\nu(f) = \min\limits_{g\in I}\{\nu(g)\}$. Notons $u = (w,v)$ et supposons que I est engendré uniquement par des monômes en w. Alors, la suite locale encadrée précédente peut être choisie indépendante de v.

Preuve : La suite locale encadrée par rapport à ν provient du Corollaire I.96. Ainsi, comme $f \in I$, il existe $z \in R^{(l)}$ tel que $f = zw^{\varepsilon_0}$ (selon les notations du Corollaire I.96). Comme I est engendré par w^{ε_0} (Corollaire I.96) et par hypothèses, on en conclut que :

$$\nu(z) = \nu(f) - \nu(w^{\varepsilon_0}) = \nu(f) - \min_{g\in I}\{\nu(g)\} = 0.$$

Or ν est centrée en $R^{(l)}$, donc, $z \in R^{(l)\times}$.

□

6.5. Suite élémentaire uniformisante.

Nous allons construire une uniformisation locale, par rapport à une valuation ν, d'une hypersurface quasi-homogène satisfaisant certaines conditions vis-à-vis de l'algèbre graduée $G_\nu = (gr_\nu(R))^*$. Cette construction est basée sur tout ce que l'on vient d'exposer dans la Section 6.

Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier, $u = (u_1, ..., u_n)$ un système régulier de paramètres de R et ν une valuation centrée en R de groupe des valeurs Γ. Notons :

$$\beta_i = \nu(u_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Pour $r \in \{1, ..., n-1\}$ posons $t = n - r - 1$.
Supposns que $r = r(R, u, \nu)$, c'est-à-dire que, quitte à renuméroter les variables, $\beta_1, ..., \beta_r$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants dans $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et qu'en particulier β_n est $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de $\beta_1, ..., \beta_r$.
Notons $u = (w, v)$ avec :

$$v = (v_1, ..., v_t) = (u_{r+1}, ..., u_{n-1}),$$

$$w = (w_1, ..., w_r, w_n) = (u_1, ..., u_r, u_n).$$

Soit $\Delta = \langle \beta_1, ..., \beta_r \rangle$ le sous-groupe de Γ engendré par $\beta_1, ..., \beta_r$. Notons :

$$\overline{\alpha} = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid m\beta_n \in \Delta\}.$$

Par hypothèses, $\overline{\alpha} < +\infty$. Pour $i \in \{1, ..., r, n\}$, on note $x_i = in_\nu(u_i)$, on a donc $ord(x_i) = \beta_i$.
Par le Corollaire 4.6 de **[S1]**, on peut montrer que les $x_1, ..., x_r$ sont algébriquement indépendants sur k dans G_ν. Si x_n est algébrique sur $k[x_1, ..., x_r]$, notons P le polynôme minimal de x_n sur $k[x_1, ..., x_r]^*$, choisi unitaire et de plus bas degré possible ; sinon posons $P = 0$. Si $P \neq 0$, notons $\alpha = d^\circ(P)$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\overline{\alpha}\beta_n - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i = 0.$$

On peut montrer (Lemme 4.5 de **[S1]**) que $d = \dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}} \in \mathbb{N}$. On note alors :

$$\overline{y} = x_1^{\alpha_1} ... x_r^{\alpha_r},$$

$$y = w_1^{\alpha_1} ... w_r^{\alpha_r},$$

$$\overline{z} = \frac{x_n^{\overline{\alpha}}}{\overline{y}},$$

$$z = \frac{w_n^{\overline{\alpha}}}{y}.$$

Si $P \neq 0$, alors P est de la forme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d} c_i \overline{y}^{d-i} X^{i\overline{\alpha}},$$

où $c_i \in k$, pour $0 \leqslant i \leqslant d$, $c_d = 1$ et $\sum_{i=0}^{d} c_i X^i$ est le polynôme minimal de $\overline{z}$ sur k dans G_ν.
Enfin, pour $0 \leqslant i \leqslant d$, fixons un élément $b_i \in R$ tel que $c_i \equiv b_i \mod \mathfrak{m}$. On pose alors :

$$Q = \sum_{i=0}^{d} b_i y^{d-i} w_n^{i\overline{\alpha}}.$$

Proposition I.100 — *Avec les hypothèses et les notations précédentes, il existe une suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v :*

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right),$$

telle que, pour $0 \leqslant i \leqslant l$, si on note :

$$u^{(i)} = \left(u_1^{(i)}, ..., u_{n_i}^{(i)}\right)$$

et $k^{(i)}$ le corps résiduel de $R^{(i)}$, alors :

(1) Les éclatements encadrés $\pi_0, ..., \pi_{l-2}$ sont monomiaux. En particulier, $n_i = n$, $k^{(i)} = k$, pour $1 \leqslant i < l$. De plus, $z \in R^{(l)\times}$.

(2) $n_l = \begin{cases} n & \text{si} \quad P \neq 0 \\ n-1 & \text{si} \quad P = 0 \end{cases}$

(3) Notons :

$$u^{(l)} = \begin{cases} \left(w_1^{(l)}, ..., w_r^{(l)}, v, w_n^{(l)}\right) & \text{si} \quad P \neq 0 \\ \left(w_1^{(l)}, ..., w_r^{(l)}, v\right) & \text{si} \quad P = 0 \end{cases}$$

Alors, pour $j \in \{1, ..., r, n\}$, w_j est un monôme en $w_1^{(l)}, ..., w_r^{(l)}$ multiplié par une unité de $R^{(l)}$.

(4) Pour $j \in \{1, ..., r\}$, $w_j^{(l)}$ est un monôme en w dont les exposants peuvent être négatifs.

(5) Si $P \neq 0$, alors :

$$w_n^{(l)} = \sum_{i=0}^{d} b_i z^i = \frac{Q}{y^d}.$$

(6) $k^{(l)} \simeq k\left(\overline{z}\right) \simeq \begin{cases} k(X) & \text{si} \quad P = 0 \\ k[X] / \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{d} c_i X^i\right) & \text{si} \quad P \neq 0 \end{cases}$

Preuve : Nous ne donnerons qu'une idée de preuve. Sans pertes de généralités, on peut supposer qu'il existe $\delta = (\delta_1, ..., \delta_r, \delta_n)$ et $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r, \gamma_n)$ tels que $z = \dfrac{w^\delta}{w^\gamma}$ et $\nu(w^\gamma) = \nu(w^\delta)$. En appliquant le Corollaire I.94, on obtient l'existence de la suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v telle que w^γ divise w^δ dans $R^{(l)}$. En appliquant la Proposition I.95, on en déduit que $z, z^{-1} \in R^{(l)}$.
On montre (1) par récurrence. Plus précisément, la Proposition I.80 implique des relations de dépendance entre les images des β_i dans les $R^{(i')}$ et les images des δ et γ ainsi que $z^{\pm 1} = \dfrac{w_j^{(i')}}{w_1^{(i')}}$, où $j \neq 1$ est tel que $\beta_j^{(i')} = \min\limits_{i \in \{1,...,r,n\}} \left\{\beta_i^{(i')}\right\} = \beta_1^{(i')}$. La Proposition I.95 permet de conclure que $z, z^{-1} \in R^{(i'+1)}$. En particulier si $i' = l-1$ on a (1).
En reprenant les notations de la Proposition I.82, on remarque qu'on est dans le cas où $h^\times \leqslant 1$ (plus précisément, le cas $h^{\times c} = h-1$, $t = h$ et le cas $h^{\times c} = t = h-1$). En utilisant la Proposition I.80 et quitte à interchanger, on peut supposer que $\overline{z} = \dfrac{x_j^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}}$. Le

cas $h^{\times c} = h - 1$, $t = h$ arrive si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{x_j^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}}$ est transcendant sur k (et donc $P = 0$). Le cas $h^{\times c} = t = h - 1$ arrive si et seulement si z est algébrique sur k (c'est-à-dire $P \neq 0$). Ainsi (2) et (6) proviennent de l'étude directe de ces deux cas particuliers. Pour terminer, (3) et (4) sont une application directe de la Proposition I.79 avec $i = 0$ et $i' = l$.

□

Proposition I.101 — *Reprenons les notations et les hypothèses de la Proposition I.100. Notons $\tilde{Q} = Q + h$, où $h \in R$ est tel que $\nu_{0,u}(h) > \nu_{0,u}(Q)$. Alors, la Proposition I.100 est vraie avec $\tilde{Q}$ à la place de Q dans (5).*

Preuve : Par hypothèses, on peut écrire h comme une somme finie $h = \sum_{\gamma} h_\gamma u^\gamma$ où $h_\gamma \in R$ et $\nu(u^\gamma) > \nu_{0,u}(Q)$. Soit $N = \max\{|\gamma| \mid h_\gamma \neq 0\}$. Après une suite locale encadrée indépendante de $u_{r+1}, ..., u_n$, on peut supposer que :

$$\nu(w_1) < \frac{1}{N}\left(\nu_{0,u}(h) - \nu_{0,u}(Q)\right).$$

Pour tout $i \in \{r+1, ..., n\}$, effectuons $\left\lfloor \dfrac{\nu(u_i)}{\nu(w_1)} \right\rfloor$ éclatements le long de l'idéal (u_i, w_1). On peut alors supposer que, pour $h_\gamma \neq 0$, u^γ est divisible par un monôme ϖ_γ en $w_1, ..., w_r$ tel que $\nu(\varpi_\gamma) \geqslant \nu_{0,u}(Q)$. En appliquant le Corollaire I.96 à l'idéal monomial engendré par $\{y^d\} \cup \{\varpi_\gamma \mid h_\gamma \neq 0\}$, on construit une suite locale encadrée monomiale indépendante de $u_{r+1}, ..., u_n$ telle que y^d divise h.
Ainsi, avec cette hypothèse, on peut considérer la suite locale encadrée construite dans la Proposition I.100. Comme y^d divise Q dans $R^{(l)}$ et comme y^d divise h, on en déduit que y^d divise $\tilde{Q}$ dans $R^{(l)}$. Le $w_n^{(l)}$ de la Proposition I.100 diffère alors de $\dfrac{\tilde{Q}}{y^d}$ par des éléments appartenant à l'idéal $\left(u_1^{(l)}, ..., u_{n-1}^{(l)}\right)$.

□

Définition I.102 — *Reprenons les notations et les hypothèses de la Proposition I.101. La suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v construite dans la Proposition I.101 sera appelée* ***la suite élémentaire uniformisante associée à*** $\boldsymbol{(R, u, \nu, n, \tilde{Q})}$*, ou plus simplement,* ***la n-suite élémentaire uniformisante****, lorsque il n'y a pas d'ambiguïtés possibles dans le choix de R, u, ν et $\tilde{Q}$.*

Remarque I.103 — L'entier n de la Définition I.102 fait référence au fait que la suite est dépendante uniquement des variables $u_1, ..., u_r, u_n$. Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, on peut définir une j-suite élémentaire en remplaçant les variables $u_1, ..., u_r, u_n$ par $u_1, ..., u_r, u_j$.

Proposition I.104 — *Reprenons les notations et les hypothèses de la Proposition I.100. Si x_n est transcendant sur $k[x_1, ..., x_r]$ ou si $r\left(R^{(l)}, u^{(l)}, \nu\right) > r$, alors, pour l'ordre lexicographique :*

$$\left(e\left(R^{(l)}, \nu\right), e\left(R^{(l)}, \nu\right) - r\left(R^{(l)}, u^{(l)}, \nu\right)\right) <_{lex} (n, n-r),$$

Preuve : Remarquons que :

$$e\left(R^{(l)}, \nu\right) \leqslant emb.dim\left(R^{(l)}\right) \leqslant n_l.$$

Le résultat découle alors du (2) de la Proposition I.100.

□

CHAPITRE II

Séries de Puiseux

On sait, depuis Newton et Puiseux que, pour un corps k de caractéristique 0 et algébriquement clos, le corps $k(t)$ peut être plongé dans le corps $\bigcup_{i\geqslant 1} k\left(\left(t^{1/i}\right)\right)$ *des séries de Puiseux* qui est algébriquement clos. De plus, si k est muni de la valuation triviale et $k(t)$ de la valuation t-adique, on peut alors munir le corps des séries de Puiseux d'une valuation de telle sorte que la restriction à $k(t)$ soit la valuation t-adique : c'est un exemple d'*extension maximalement complète* (voir **[Kr]** et **[P]**). Rappelons qu'une *extension de corps valués* $(k,\nu) \hookrightarrow (K,\mu)$ est une extension de corps $k \hookrightarrow K$ telle que $\mu_{|k} = \nu$; si deplus, ν et μ ont même groupe des valeurs et $k_\nu = k_\mu$, on dit que l'extension est *immédiate*. Un corps muni d'une valuation est alors appelé un corps *maximalement complet* s'il ne possède aucune extension immédiate de corps valués autre que l'identité.
Krull (**[Kr]**) montra, à l'aide du Lemme de Zorn, que tout corps muni d'une valuation possède une extension maximale et que tout corps de séries de Puiseux, muni de sa valuation naturelle, est maximal. L'existence et l'unicité de cette extension maximale furent posées par Kaplansky (**[Ka]**) qui les démontra en caractéristique nulle ainsi que sa non-unicité en caractéristique positive. De plus, Poonen (**[P]**) a montré que si le groupe des valeurs de la valuation est divisible et si le corps est algébriquement clos, alors l'extension maximalement complète est algébriquement close.
La question qui vient alors naturellement est : quelle est la forme de cette extension ? En caractéristique positive, on sait qu'elle n'est pas de la forme $\bigcup_{i\geqslant 1} k\left(\left(t^{1/i}\right)\right)$ puisque l'équation d'Artin-Schreier n'y possède aucune solution (voir **[A2]**, **[Ch]**). Il est alors naturel de considérer des anneaux de séries généralisées où les puissances de t varient sur un ensemble bien ordonné. De tels anneaux sont appelés des *anneaux de Mal'cev-Neumann* introduits en premier par Hahn en 1908 puis étudiés par Krull en 1932 (voir **[Kr]**).

En 1942, Kaplansky (**[Ka]**) montre que tout corps muni d'une valuation ayant un groupe des valeurs divisible et un corps résiduel algébriquement clos se plonge dans une extension maximalement complète. Remarquons que deux cas se présentent : ou bien la restriction à $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$ est la valuation triviale (cas équicaractéristique), ou bien la restriction à $\mathbb{Q}$ est la valuation p-adique (cas mixte). Il a également montré que dans le cas équicaractéristique, l'extension maximalement complète est un anneau de Mal'cev-Neumann.
En 1993, Poonen (**[P]**) décrit explicitement les extensions dans les deux cas. Si (k,ν) est un corps valué de groupe des valeurs Γ divisible et de corps résiduel k_ν algébriquement clos, il existe alors des plongements dans des anneaux de Mal'cev-Neumann maximalement complets :

(1) $k \hookrightarrow k_\nu\left(\left(t^\Gamma\right)\right)$ (cas équicaractéristique) ;

(2) $k \hookrightarrow C(k_\nu)\left(\left(p^\Gamma\right)\right)$ (cas mixte) ;

où $C(k_\nu)$ est l'anneau de Cohen de k_ν. Dans tous les cas les preuves ne construisent pas explicitement le plongement. On se propose donc de décrire de manière explicite un plongement d'un anneau local régulier et complet muni d'une valuation de rang 1 à l'aide des polynômes-clés, résultat qui généralise ceux de Kaplansky et Poonen.

Mis à part la Remarque II.21, la sous-section 2.4 et la Section 5, les résultats du Chapitre II sont issus de **[SS]**.

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local, régulier, complet de dimension $n+1$. On note :

$$p = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad car(k) = 0 \\ car(k) & \text{si} \quad car(k) > 0 \end{cases}$$

Si R est de caractéristique mixte, on suppose de plus que $p \notin \mathfrak{m}^2$. Par le Théorème I.5 de Cohen, on peut supposer que :

$$R = \begin{cases} k\,[[u_1, ..., u_{n+1}]] & \text{si} \quad car(R) = car(k) \\ W\,[[u_1, ..., u_n]] & \text{si} \quad car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

où W est un anneau complet de valuation discrète de paramètre régulier p et de corps résiduel k. On note, pour tout $j \in \{1, ..., n+1\}$:

$$K_0 = \begin{cases} k & \text{si} \quad car(R) = car(k) \\ Frac(W) & \text{si} \quad car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

$$K_j = \begin{cases} k\left((u_1, ..., u_j)\right) & \text{si} \quad car(R) = car(k) \\ W\left((u_1, ..., u_j)\right) & \text{si} \quad car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

avec $u_{n+1} = p$ dans le cas de caractéristique mixte (on notera parfois $K = K_{n+1}$).
Soit ν une valuation de K, centrée en R, de groupe des valeurs Γ, telle que $\nu_{|K_{n-1}}$ soit de rang 1 ($\nu_{|K_n}$ dans le cas équicaractéristique). On suppose que k_ν est algébrique sur k. On note, Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ et :

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q};$$

$$\Gamma' = \bigcup_{i \geqslant 1} \frac{1}{p^i}\Gamma.$$

Posons r le plus petit j tel que les $\nu(u_{i_1}), ..., \nu(u_{i_j})$ soient $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, si R est équicaractéristique (en fait, $r = r(R, u, \nu)$ selon les notations de la Définition I.87), ou bien le plus petit j tel que les $\nu(p), \nu(u_{i_1}), ..., \nu(u_{i_j})$ soient $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, si R est de caractéristique mixte.
On supposera alors, quitte à renuméroter les variables, que :
$\nu(u_1), ..., \nu(u_r)$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes et $\nu(u_{r+1}), ..., \nu(u_{n+1})$ sont $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires de $\nu(u_1), ..., \nu(u_r)$, si R est équicaractéristique ;
$\nu(p), \nu(u_1), ..., \nu(u_r)$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes et $\nu(u_{r+1}), ..., \nu(u_n)$ sont $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires de $\nu(p), \nu(u_1), ..., \nu(u_r)$, si R est de caractéristique mixte.
On note ν_0 la valuation monomiale de R associée à $\mathfrak{m}$ (voir Corollaire I.50), c'est-à-dire, si $f = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha u^\alpha \in R$ où α est un multi-indice, $a_\alpha \in k$ (resp. $a_\alpha \in W$), $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} ... u_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ (resp. $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} ... u_n^{\alpha_n}$) et $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_{n+1})$ (resp. $\mathfrak{m} = (p, u_1, ..., u_n)$), alors :

$$\nu_0(f) = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \nu(u_i) \;\middle|\; a_\alpha \neq 0 \right\} \left(\text{resp. } \nu_0(f) = \min\left\{ \alpha_0 \nu(p) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(u_i) \;\middle|\; a_\alpha \neq 0 \right\} \right).$$

1. Anneaux des séries généralisées

On va définir des anneaux de séries généralisées (également appelés anneaux de Mal'cev-Neumann) en suivant les constructions données par **[Ke]** et **[P]**.

1.1. Définitions des anneaux et des valuations de Mal'cev-Neumann.

Définition II.1 — *Soient A un anneau intègre et G un groupe abélien ordonné. On appelle* ***anneau des séries formelles généralisées****, noté $A\left[\left[t^G\right]\right]$, l'anneau où les éléments sont de la forme $\sum_{\gamma \in G_+} a_\gamma t^\gamma$, avec les $a_\gamma \in A$ tels que l'ensemble $\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$ soit bien ordonné.*
Si A est un anneau intègre local de caractéristique mixte dont le corps résiduel est de caractéristique p et d'idéal maximal engendré par p, on appelle ***anneau des p-séries formelles généralisées****, noté $A\left[\left[p^G\right]\right]$, l'anneau $A\left[\left[t^G\right]\right]/N$ où N est l'idéal de $A\left[\left[t^G\right]\right]$ formé par les $f = \sum_{\gamma \in G_+} a_\gamma t^\gamma$ tels que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n+\gamma} p^n = 0$, pour tout $\gamma \in G$.*

Remarque II.2 — L'anneau $A\left[\left[t^G\right]\right]$ (resp. l'anneau $A\left[\left[p^G\right]\right]$) est muni de la *valuation t-adique* (resp. *valuation p-adique*) v, à valeurs dans G, définie par :

$$v(f) = inf\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}\,,\ \forall f = \sum_{\gamma \in G_+} a_\gamma t^\gamma \ \in\ A\left[\left[t^G\right]\right]$$

$$(resp.\ \forall f = \sum_{\gamma \in G_+} a_\gamma p^\gamma \ \in\ A\left[\left[p^G\right]\right]).$$

Définition II.3 — *Un anneau de séries formelles généralisées (resp. de p-séries formelles généralisées) muni de sa valuation t-adique (resp. p-adique) sera appelé un* ***anneau de Mal'cev-Neumann****.*
Sa valuation t-adique (resp. p-adique) associée sera appelée ***valuation de Mal'cev-Neumann****.*

Définition II.4 — *Soient $f = \sum_{\gamma \in G_+} a_\gamma t^\gamma \in A\left[\left[t^G\right]\right]$ (resp. $f = \sum_{\gamma \in G_+} a_\gamma p^\gamma \in A\left[\left[p^G\right]\right]$) et $\beta \in G_+$, on appelle* ***troncature ouverte de f en β*** *la série généralisée $f(\beta) = \sum_{\gamma<\beta} a_\gamma t^\gamma$ (resp. $f(\beta) = \sum_{\gamma<\beta} a_\gamma p^\gamma$) et* ***troncature fermée de f en β*** *la série généralisée $f[\beta] = \sum_{\gamma\leqslant\beta} a_\gamma t^\gamma$ (resp. $f[\beta] = \sum_{\gamma\leqslant\beta} a_\gamma p^\gamma$). Pour $\beta, \beta' \in G_+$, $\beta < \beta'$, on note $f[\beta, \beta'[= f(\beta') - f(\beta)$.*

1.2. Construction d'un anneau de Mal'cev-Neumann.

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet de dimension $n+1$. On va construire un anneau de Mal'cev-Neumann A_R dans lequel plonger R.

Si R est équicaractéristique, on prend $A_R = \overline{k_\nu}\left[\left[t^{\Gamma'}\right]\right]$, où $\overline{k_\nu}$ est une clôture algébrique de k_ν.

Si R est de caractéristique mixte, on va construire, par récurrence transfinie, un anneau local $(\overline{W}, p\overline{W}, \overline{k_\nu})$ qui soit une extension de W. Dans ce cas, on pose $A_R = \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$.
Soit $\overline{k_\nu}$ une clôture algébrique de k_ν, on peut la voir comme limite inductive d'extensions algébriques simples de k puisque k_ν est algébrique sur k. Plus précisément,

$\overline{k_\nu} = k(\{\alpha_i\}_{i\in I})$ où I est un ensemble bien ordonné et les α_i des éléments algébriques sur k, $i \in I$. Le système inductif est alors donné par les inclusions provenant de l'ordre total de I. Supposons que $i \in I$ possède un prédécesseur immédiat, on est alors emmené à considérer une extension de la forme :

$$\kappa \hookrightarrow \kappa(\alpha)$$

où, par hypothèse de récurrence, α est algébrique sur κ et κ est le corps résiduel d'un anneau local (A, m_A). Soit Q le polynôme minimal unitaire de α et P un relevé unitaire dans A. On pose alors $A' = A[\alpha]/(P(\alpha))$ et on a un morphisme d'inclusion :

$$A \hookrightarrow A'$$

Lemme II.5 — *A' est un anneau local d'idéal maximal $m_A A'$ et de corps résiduel $\kappa(\alpha)$.*

Preuve : L'idéal $m_A A'$ est maximal dans A' car $A'/m_A A' \simeq \kappa(\alpha)$. Soit M un autre idéal maximal de A', alors $M \cap A = m_A$. Pour montrer ceci il suffit de remarquer que $A/(M \cap A)$ est un corps. Soit $a \in A/(M \cap A)$, $a \neq 0$, l'extension entière $A \hookrightarrow A'$ induit une extension d'anneaux intègres entière $A/(M \cap A) \hookrightarrow A'/M$, ainsi $a \in A'/M$ qui est un corps et donc $a^{-1} \in A'/M$. Il existe alors des éléments $a_0, ..., a_{m-1} \in A/(M \cap A)$ et $m \geqslant 1$ tels que $a^{-m} + a_{m-1}a^{-m+1} + ... + a_0 = 0$ et donc $a^{-1} = -(a_{m-1} + ... + a_0 a^{m-1}) \in A/(M \cap A)$. On remarque enfin que $m_A A' = (M \cap A)A' \subset M$ et donc A' est un anneau local.

□

Si i est un ordinal limite, notons $\kappa_l = k(\{\alpha_j\}_{j\leqslant l})$, pour tout $l \leqslant i$. On suppose, par hypothèse de récurrence, que l'on a construit les anneaux locaux A_l dont les corps résiduels respectifs sont κ_l pour tout $l < i$. On pose alors $A_i = \bigcup_{l<i} A_l$, c'est un anneau local de corps résiduel κ_i. On a donc créé un système inductif d'anneaux locaux, on note $\overline{W}$ la limite inductive, c'est un anneau local d'idéal maximal $p\overline{W}$, de corps résiduel $\overline{k_\nu}$ et on a $W \hookrightarrow \overline{W}$.

Remarque II.6 — On a un résultat similaire si k_ν est une extension transcendante de k. En effet, si $deg.tr(k_\nu|k) = l$ alors il existe $t_1, ..., t_l$ transcendants tels que $k_\nu = k(t_1, ..., t_l)$. On pose $W' = W[t_1, ..., t_l]$ et on considère l'anneau local $\overline{W'_{pW'}}$, son corps résiduel est $\overline{k_\nu}$ et, $W \hookrightarrow \overline{W'_{pW'}}$.

Remarque II.7 — Remarquons que W est intégralement clos dans K_0, de plus on a :

$$W \subsetneq \overline{W}\left[p^{\mathbb{Q}}\right] \hookrightarrow \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}\right]\right].$$

Ce dernier morphisme est induit par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\hookrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}} \\ 1 &\mapsto \nu(p) \end{aligned}$$

On peut résumer cette sous-section par la proposition suivante :

Proposition II.8 — *Les anneaux $\overline{k_\nu}\left[\left[t^{\Gamma'}\right]\right]$ et $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ sont des anneaux de Mal'cev-Neumann au sens de la Définition II.3.*

2. Rappels sur les polynômes-clés

On va faire quelques rappels sur les polynômes-clés introduits dans **[HGOAS]** et **[S1]** pour des valuations de rang 1. Pour une présentation plus axiomatique des polynômes-clés, on pourra consulter la présentation faite par M. Vaquié (**[Va2]**, **[Va3]**, **[Va4]**, **[Va5]**, **[Va6]**). Un lien entre les deux constructions des polynômes-clés est faite dans les travaux de W. Mahboub (**[Mah]**).

2.1. Définition et théorème d'existence.

Soit $K \hookrightarrow K(x)$ une extension de corps simple et transcendante. Soit μ' une valuation de $K(x)$, notons $\mu := \mu'_{|K}$. On note G le groupe des valeurs de μ' et G_1 celui de μ. On suppose de plus que μ est de rang 1 et que $\mu'(x) > 0$. Enfin, pour $\beta \in G$, on pose :

$$P'_\beta = \{f \in K(x) \mid \mu'(f) \geqslant \beta\} \cup \{0\};$$

$$P'_{\beta,+} = \{f \in K(x) \mid \mu'(f) > \beta\} \cup \{0\};$$

$$G_{\mu'} = \bigoplus_{\beta \in G} P'_\beta / P'_{\beta,+};$$

et $in_{\mu'}(f)$ l'image de $f \in K(x)$ dans $G_{\mu'}$.

Définition II.9 — *Un* ***ensemble complet de polynômes-clés*** *pour μ' est une collection bien ordonnée :*

$$\mathbf{Q} = \{Q_i\}_{i \in \Lambda} \subset K[x]$$

telle que, pour tout $\beta \in G$, le groupe additif $P'_\beta \cap K[x]$ soit engendré par des produits de la forme $a \prod_{j=1}^{s} Q_{i_j}^{\gamma_j}$, $a \in K$, tels que $\sum_{j=1}^{s} \gamma_j \mu'\left(Q_{i_j}\right) + \mu(a) \geqslant \beta$.
L'ensemble est dit ***1-complet*** *si la condition a lieu pour tout $\beta \in G_1$.*

Théorème II.10 — ([**HGOAS**], Théorème 62) *Il existe une collection $\mathbf{Q} = \{Q_i\}_{i \in \Lambda}$ qui soit un ensemble* 1*-complet de polynômes-clés.*

Remarque II.11 — La preuve consiste à construire par récurrence transfinie l'ensemble de polynômes-clés de type d'ordre au plus $\omega \times \omega$.

2.2. Développements standards et valuations tronquées.

Définition II.12 — *Soit $l \in \Lambda$, un indice $i < l$ est dit* ***l-essentiel*** *s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $i + n = l$ ou $i + n < l$ et $d^\circ_{Q_{i+n-1}}(Q_{i+n}) > 1$. Dans le cas contraire, on dit que i est* ***l-inessentiel****.*

Soit $l \in \Lambda$, on note :

$$\alpha_i = d^\circ_{Q_{i-1}}(Q_i), \ \forall\, i \leqslant l;$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{l+1} = \{\alpha_i\}_{i \leqslant l};$$

$$\mathbf{Q}_{l+1} = \{Q_i\}_{i \leqslant l}.$$

On utilise également la notation $\overline{\gamma}_{l+1} = \{\gamma_i\}_{i \leqslant l}$ où les γ_i sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'entres eux, $\mathbf{Q}_{l+1}^{\overline{\gamma}_{l+1}} = \prod_{i \leqslant l} Q_i^{\gamma_i}$.

Pour $i < l$, on note :

$$i_+ = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \text{ est } l\text{-essentiel} \\ i+\omega & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition II.13 — *Un multi-indice $\overline{\gamma}_{l+1}$ est dit* ***standard par rapport à $\boldsymbol{\alpha_{l+1}}$*** *si $0 \leqslant \gamma_i < \alpha_{i_+}$, pour $i \leqslant l$ et, si i est l-inessentiel, l'ensemble $\{j < i_+ \mid j_+ = i_+,\ \gamma_j \neq 0\}$ est de cardinal au plus 1.*
Un ***monôme l-standard en $\boldsymbol{Q_{l+1}}$*** *est un produit de la forme $c_{\overline{\gamma}_{l+1}} \mathbf{Q}_{l+1}^{\overline{\gamma}_{l+1}}$, où $c_{\overline{\gamma}_{l+1}} \in K$ et $\overline{\gamma}_{l+1}$ est standard par rapport à $\boldsymbol{\alpha_{l+1}}$.*
Un ***développement l-standard n'impliquant pas $\boldsymbol{Q_l}$*** *est une somme finie $\sum\limits_{\beta} S_\beta$ de monômes l-standards n'impliquant pas Q_l, où β appartient à un sous-ensemble fini de G_+ et $S_\beta = \sum\limits_{j} d_{\beta,j}$ est une somme de monômes standards de valuation β vérifiant $\sum\limits_{j} in_{\mu'}(d_{\beta,j}) \neq 0$.*

Définition II.14 — *Soient $f \in K[x]$ et $i \leqslant l$, un* ***développement i-standard de f*** *est une expression de la forme :*

$$f = \sum_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j,$$

où $c_{j,i}$ est un développement i-standard n'impliquant pas Q_i.

Remarque II.15 — Un tel développement existe, par division Euclidienne et est unique dans le sens où les $c_{j,i} \in K[x]$ sont uniques. Plus précisément, si $i \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que le développement i-standard est unique. Si $car\left(k_\mu\right) > 0$, les $c_{j,i} \in K[x]$ sont uniquement déterminés par f mais ceci ne veut pas dire que le développement i-standard est unique. Par exemple, si i est un ordinal limite, $c_{j,i}$ admet un développement i_0-standard pour chaque $i_0 < i$, $i = i_{0+}$, mais il existe un nombre dénombrable de choix de i_0 pour qu'un tel développement i_0-standard soit un développement i_0-standard n'impliquant pas Q_{i_0}.

Définition II.16 — *Soient $f \in K[x]$, $i \leqslant l$ et $f = \sum\limits_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j$ un développement i-standard de f. On définit la* ***i-troncature de $\boldsymbol{\mu'}$****, notée μ'_i, comme étant la pseudo-valuation :*

$$\mu'_i(f) = \min_{0 \leqslant j \leqslant s_i} \{ j\mu'(Q_i) + \mu'(c_{j,i}) \}.$$

Remarque II.17 — On peut montrer que c'est en fait une valuation. On a de plus :

$$\forall\, f \in K[x],\ i \in \Lambda,\ \mu'_i(f) \leqslant \mu'(f).$$

On termine en donnant la Proposition 10.1 (Corollaire 50 de [**HGOAS**]) et le Corollaire 10.15 de [**S1**] que nous utiliserons dans les preuves du Lemme II.20, de la Proposition II.29 et de la Proposition II.36.

Proposition II.18 — $\forall\, f \in K[x], \forall\, b \in \mathbb{N}$,

$$\mu'_i(f) - \mu'_i\left(\partial_{p^b} f\right) \leqslant \frac{p^b}{p^{b_i}} \left(\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{p^{b_i}} Q_i)\right),$$

où $\partial_{p^b} = \dfrac{1}{p^b!} \dfrac{\partial^{p^b}}{\partial x^{p^b}}$ et b_i le plus petit $c \in \mathbb{N}^*$ qui maximise $\dfrac{\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{p^c} Q_i)}{p^c}$.
De plus, il existe $b(i,f) \in \mathbb{N}^*$ calculé en fonction du développement i-standard de f, tel que :

$$\mu'_i(f) - \mu'_i\left(\partial_{p^{b(i,f)}} f\right) = \frac{p^{b(i,f)}}{p^{b_i}} \left(\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{p^{b_i}} Q_i)\right).$$

Proposition II.19 — *Soit* $f = \sum_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j$ *le développement i-standard de* $f \in K[x]$*, on pose :*

$$S_i = \{j \in \{0, ..., s_i\} \mid j\mu'(Q_i) + \mu'(c_{j,i}) = \mu_i'(f)\}.$$

Soit $j \in S_i$*, écrivons j sous la forme* $j = p^e u$*, où p ne divise pas u si* $car(K_\mu) = p > 0$*.*
Supposons que p^{e+1} *divise* j'*, pour tout* $j' \in S_i$ *tels que* $j' < j$*.* $(*)$
Alors :

$$\mu_i'(f) = \min_{0 \leqslant j \leqslant s_i} \{\mu_i'\left(\partial_{jb_i} f\right) + j\left(\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{b_i} Q_i)\right)\}$$

et le minimum est atteint pour tout les $j \in S_i$ *vérifiant la condition de divisibilité* $(*)$ *précédente.*

On va utiliser les polynômes-clés dans le cadre des anneaux locaux réguliers, ils interviennent de manière fondamentale dans la démonstration du Théorème II.24.

2.3. Polynômes-clés dans une tour d'extensions de corps.

Pour $j \in \{r+1, ..., n+1\}$, on note $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ l'ensemble des polynômes-clés de l'extension $K_{j-1} \hookrightarrow K_{j-1}(u_j)$, $\mathbf{Q}_{j,i} = \{Q_{j,i'} | i' \in \Lambda_j, i' < i\}$, $\Gamma^{(j)}$ le groupe des valeurs de $\nu_{|K_j}$ et $\nu_{j,i}$ la i-troncature de ν pour cette extension. Soient $\beta_{j,i} = \nu(Q_{j,i})$ et $b_{j,i}$ le plus petit élément b de $\mathbb{N}$ qui maximise $\dfrac{\beta_{j,i} - \nu(\partial_{j,p^b} Q_{j,i})}{p^b}$, où $\partial_{j,s} = \dfrac{1}{s!}\dfrac{\partial^s}{\partial u_j^s}$, $s \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon_{j,i} = \dfrac{\beta_{j,i} - \nu(\partial_{j,p^{b_{j,i}}} Q_{j,i})}{p^{b_{j,i}}}$, on a :

Lemme II.20 — *(***[S1]***, Lemme 10.4) La suite* $(\varepsilon_{j,i})_i$ *est strictement croissante.*

Preuve : Nous reprenons la preuve du Lemme 10.4 de **[S1]**. Fixons $j \in \{r+1, ..., n\}$ et considérons $i_1, i_2 \in \Lambda_j$ deux ordinaux. Il faut montrer que :

$$\frac{\beta_{j,i_1} - \nu(\partial_{j,p^{b_{j,i_1}}} Q_{j,i_1})}{p^{b_{j,i_1}}} < \frac{\beta_{j,i_2} - \nu(\partial_{j,p^{b_{j,i_2}}} Q_{j,i_2})}{p^{b_{j,i_2}}}.$$

On peut supposer que $i_2 = i_{1+}$ (c'est-à-dire $i_2 = i_1 + 1$ ou $i_2 = i_1 + \omega$), on conclut dans le cas général par récurrence transfinie sur $i_2 - i_1$. Par la Proposition II.18, il existe $b(i_1, Q_{j,i_2})$ calculé en fonction du développement (j, i_1)-standard de Q_{j,i_2}, tel que :

$$\nu_{j,i_1}(Q_{j,i_2}) - \nu_{j,i_1}\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right) = \frac{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}}{p^{b_{i_1}}}\left(\nu(Q_{j,i_1}) - \nu(\partial_{p^{b_{i_1}}} Q_{j,i_1})\right).$$

Vu que $d^\circ_{u_j}\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right) < d^\circ_{u_j}\left(Q_{j,i_2}\right)$, on montre facilement que :

$$\nu_{j,i_1}\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right) = \nu\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right).$$

Par définition du développement (j, i_1)-standard, on a :

$$\beta_{j,i_2} > \alpha_{j,i_2}\beta_{j,i_1} = \nu_{j,i_1}(Q_{j,i_2}).$$

Ainsi, par définition de ε_{j,i_2} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{j,i_1} &= \frac{\nu_{j,i_1}(Q_{j,i_2}) - \nu_{j,i_1}\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right)}{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} \\ &= \frac{\alpha_{j,i_2}\beta_{j,i_1} - \nu\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right)}{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} \\ &< \frac{\beta_{j,i_2} - \nu\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right)}{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} \\ &\leqslant \varepsilon_{j,i_2}.\end{aligned}$$

On en conclut que la suite $(\varepsilon_{j,i})_i$ est strictement croissante, pour tout $j \in \{r+1, ..., n+1\}$.
□

Remarque II.21 — Pour tout $j \in \{r+1, ..., n+1\}$ et $i \in \Lambda_j$, $\varepsilon_{j,i}$ n'est pas invariant par permutation des variables, c'est-à-dire, si u_{j_1} et u_{j_2} sont deux variables distinctes, en considérant l'anneau R' comme l'anneau R dans lequel on a échangé u_j et $u_{j'}$, on obtient, respectivement pour R et R', deux ensembles de polynômes-clés $\{Q_{j,i}\}_{(j,i)\in\{r+1,...,n+1\}\times\Lambda_j}$ et $\{Q'_{j,i}\}_{(j,i)\in\{r+1,...,n+1\}\times\Lambda'_j}$ distincts, ainsi que deux suites $(\varepsilon_{j_1,i})_{i\in\Lambda_{j_1}}$ et $(\varepsilon'_{j_2,i})_{i\in\Lambda'_{j_2}}$ telles que :

$$\exists\, i \in \Lambda_{j_1} \cap \Lambda'_{j_2},\ \varepsilon_{j_1,i} \neq \varepsilon'_{j_2,i},$$

où l'on rappelle que $\Lambda_{j_1} \cap \Lambda'_{j_2} \neq \emptyset$ vu que 1 est dans les deux ensembles et qu'ils on tous les deux comme segment initial une partie de $\mathbb{N}$.
En effet, supposons que $n+1 = 3$, $k = \mathbb{C}$, $r = 1$, $j_1 = 2$ et $j_2 = 3$. Les anneaux R et R' sont alors $\mathbb{C}\,[[u_1, u_2, u_3]]$ et $\mathbb{C}\,[[u_1, u_3, u_2]]$. On considère une valuation $\nu : \mathbb{C}\,((u_1, u_2, u_3))^* \to \mathbb{Z}$ telle que $\nu_{|\mathbb{C}} = 0$, que l'on va définir à l'aide des polynômes-clés de R. Supposons que :

$$\begin{cases} \beta_1 := \nu(u_1) = 4 \\ \beta_2 := \nu(u_2) = 1 \\ \beta_3 := \nu(u_3) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} 4\beta_2 = \beta_1 \\ 3\beta_2 = 2\beta_3 \\ 3\beta_1 = 8\beta_3 \\ \beta_2 + 2\beta_3 = \beta_1 \end{cases}$$

L'ensembe de polynômes-clés pour $\mathbb{C}\,[[u_1, u_2, u_3]]$ est :

$$\begin{cases} Q_{1,1} = u_1 \\ Q_{2,1} = u_2 \\ Q_{2,2} = u_2^4 - u_1 \\ Q_{3,1} = u_3 \\ Q_{3,2} = u_3^2 - \dfrac{u_1}{u_2} \end{cases}$$

avec :

$$\nu\,(Q_{2,2}) = \sqrt{17} \text{ et } \nu\,(Q_{3,2}) = \sqrt{10}.$$

L'ensemble de polynômes-clés pour $\mathbb{C}\left[[u_1,u_3,u_2]\right]$ est :

$$\begin{cases} Q'_{1,1} = u_1 \\ Q'_{2,1} = u_3 \\ Q'_{2,2} = u_3^8 - u_1^3 \\ Q'_{3,1} = u_2 \\ Q'_{3,2} = u_2 - \dfrac{u_1}{u_3^2} \end{cases}$$

Remarquons que $Q'_{3,2} = \dfrac{u_2}{u_3^2} Q_{3,2}$, donc :

$$\nu\left(Q'_{3,2}\right) = \beta_2 - 2\beta_3 + \nu\left(Q_{3,2}\right) = -2 + \sqrt{10}.$$

Calculons $\varepsilon_{2,2}$ et $\varepsilon'_{3,2}$. Les dérivées partielles en u_2 donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{2,2}}{\partial u_2} & = & 4u_2^3 \\ \dfrac{\partial Q'_{3,2}}{\partial u_2} & = & 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\nu\left(\frac{\partial Q_{2,2}}{\partial u_2}\right) = 3 \text{ et } \nu\left(\frac{\partial Q'_{3,2}}{\partial u_2}\right) = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \varepsilon_{2,2} & = & \nu\left(Q_{2,2}\right) - \nu\left(\dfrac{\partial Q_{2,2}}{\partial u_2}\right) = \sqrt{17} - 3 \\ \varepsilon'_{3,2} & = & \nu\left(Q'_{3,2}\right) - \nu\left(\dfrac{\partial Q'_{3,2}}{\partial u_2}\right) = -2 + \sqrt{10} \end{cases}$$

On en conclut que $\varepsilon_{2,2} \neq \varepsilon'_{3,2}$.

2.4. Un exemple en dimension 2 sur $\mathbb{C}$.

Nous suivons les exposés faits dans **[Z2]** et **[Tei2]**. Soit $R = \mathbb{C}\left[[u_1,u_2]\right]$ muni d'une valuation $\nu : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ telle que $\nu_{|\mathbb{C}} = 0$. On note Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ (on peut avoir $\Gamma_1 = \Gamma$) et $u = (u_1, u_2)$. On suppose que $\Gamma_1 \simeq \mathbb{Z}$ et $r(R,u,\nu) = 1$, on écrit alors $\nu(u_1) = d$, $\nu(u_2) = m$ avec $m > d$. Sans pertes de généralités (voir **[Z2]**), on peut supposer que $d \nmid m$. Par le théorème de Newton-Puiseux, on sait qu'il existe un monomorphisme d'anneaux $\iota : R \hookrightarrow \mathbb{C}\left[\left[t^{\Gamma_1}\right]\right]$ tel que :

$$\begin{cases} \iota(u_1) = u_1(t) = t^d \\ \iota(u_2) = u_2(t) = \sum\limits_{j \geqslant m} a_j t^j \end{cases}$$

On rappelle que $\mathbb{C}\left[\left[t^{\Gamma_1}\right]\right] \subset \mathbb{C}\left[[t]\right]$ est muni de sa valuation t-adique notée v. À partir de ces développements de Puiseux, on construit par récurrence deux suites de Γ_1 comme suit :

$$\begin{cases} e_0 = d \\ \varepsilon_l = \min\{j \geqslant m \mid a_j \neq 0 \text{ et } e_{l-1} \nmid j\}, \ \forall\, l \geqslant 1 \\ e_l = \operatorname{pgcd}(e_{l-1}, \varepsilon_l) \end{cases}$$

Remarquons que tous les éléments du groupe $v(R)$ sont premiers entres eux vu que v est surjective et à valeurs dans $\Gamma_1 \simeq \mathbb{Z}$.

La suite $(e_l)_{l \geqslant 0} \subset \mathbb{Z}$ étant stirctement décroissante, il existe $g \geqslant 1$ tel que $e_g = 1$. La suite

$(\varepsilon_l)_{l\geqslant 1}$ est donc finie et strictement croissante. On peut alors écrire la série de Puiseux de u_2 sous la forme :

$$u_2(t) = b_1 t^{\varepsilon_1} + \sum_{j=1}^{h_1} a_{j,1} t^{\varepsilon_1 + je_1} + b_2 t^{\varepsilon_2} + \sum_{j=1}^{h_2} a_{j,2} t^{\varepsilon_2 + je_2} + \ldots + b_g t^{\varepsilon_g} + \sum_{j\geqslant 1} a_{j,g} t^{\varepsilon_g + je_g}$$

où $h_l = \max\{q \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_l + qe_l < \varepsilon_{l+1}\}$ pour $1 \leqslant l \leqslant g-1$; $b_l \neq 0$, pour $1 \leqslant l \leqslant g$ ($b_l = a_{\varepsilon_l}$ et $a_{j,l} = a_{\varepsilon_l + je_l}$).
Pour $1 \leqslant l \leqslant g$, comme e_l divise e_{l-1} et ε_l, il existe $n_l > 1$ et $m_l > 1$ tels que :

$$\begin{cases} e_{l-1} = n_l e_l \\ \varepsilon_l = m_l e_l \\ \mathrm{pgcd}(m_l, n_l) = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $e_{l-1} = n_l \ldots n_g$, $1 \leqslant l \leqslant g$. En particulier, $d = n_1 \ldots n_g$. Pour $1 \leqslant l \leqslant g$, on note $u_2(\varepsilon_l)$ la troncature ouverte de $u_2(t)$ en ε_l :

$$u_2(\varepsilon_l) = \sum_{m \leqslant j < \varepsilon_l} a_j t^j.$$

Remarquons que si $m \leqslant j < \varepsilon_l$ et si $a_j \neq 0$, alors e_{l-1} divise j, il existe donc $q_j \in \mathbb{N}$ tel que $j = q_j e_{l-1}$ et, comme $u_1(t) = t^d$, en notant :

$$u_{2,l} = \sum_{m \leqslant j < \varepsilon_l} a_j u_1^{\frac{q_j}{n_1 \ldots n_{l-1}}} \in \mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{n_1 \ldots n_{l-1}}}\right) \subset \mathbb{C}\left(\left(u_1^{\frac{1}{n_1 \ldots n_{l-1}}}\right)\right),$$

on obtient :

$$\iota(u_{2,l}) = u_2(\varepsilon_l).$$

On peut étendre la notation à $l = g+1$ en posant :

$$u_{2,g+1} = \sum_{j \geqslant m} a_j u_1^{\frac{j}{d}} \in \mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{d}}\right) \subset \mathbb{C}\left(\left(u_1^{\frac{1}{d}}\right)\right),$$

ainsi :

$$\iota(u_{2,g+1}) = \iota(u_2) = u_2(t).$$

Notons $\mu_d(\mathbb{C})$ le groupe des racines d-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et fixons ζ une racine primitive d-ième de l'unité. Pour $1 \leqslant s \leqslant d$, on considère les $\mathbb{C}$-automorphismes σ_s de $\mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{d}}\right)$ définis par $\sigma_s\left(u_1^{\frac{1}{d}}\right) = \zeta^s u_1^{\frac{1}{d}}$.

Proposition II.22 — *Notons $Q_1 = u_2$ et pour $2 \leqslant l \leqslant g+1$:*

$$Q_l = \prod_{s=1}^{n_1 \ldots n_{l-1}} \left(u_2 - \sigma_s(u_{2,l})\right).$$

(1) L'ensemble $\{Q_1, \ldots, Q_g\}$ est un ensemble 1-complet de polynômes-clés pour l'extension $\mathbb{C}((u_1)) \hookrightarrow \mathbb{C}((u_1))(u_2)$.

(2) Notons H l'idéal de R défini par :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\},$$

alors :

$$H = \left(Q_{g+1}\right).$$

(3) $\varepsilon_l = \nu(Q_l) - \nu\left(\partial_{2,1} Q_l\right)$, $\forall\, l \in \{1, \ldots, g\}$.

(4) Pour $1 \leqslant l \leqslant g$, $u_2(\varepsilon_l)$ est entier sur $\mathbb{C}[u_1(t)]$.

Preuve : Nous adaptons la preuve du Théorème 3.9 de **[Z2]** ainsi que celle du Corollaire 5.4 de **[PP]**.
Remarquons tout d'abord que Q_1 est par définition unitaire et irréductible. L'extension $\mathbb{C}(u_1) \hookrightarrow \mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{d}}\right)$ est une extension galoisienne cyclique de degré d de groupe de Galois :

$$G_d := Gal\left(\mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{d}}\right)\middle|\,\mathbb{C}(u_1)\right) = \{\sigma_s \mid 1 \leqslant s \leqslant d\} \simeq \mu_d(\mathbb{C}).$$

De plus, pour $2 \leqslant l \leqslant g$, l'extension $\mathbb{C}(u_1) \hookrightarrow \mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{n_{l-1}}}\right)$ est une extension galoisienne cyclique de degré n_{l-1} et comme $u_1^{\frac{1}{n_1...n_{l-1}}} = u_1^{\frac{n_l...n_g}{d}}$ et, pour $1 \leqslant s \leqslant n_1...n_{l-1}$, $\zeta^{s\frac{d}{n_1...n_{l-1}}}$ est une racine $n_1...n_{l-1}$-ième de l'unité, on a :

$$G_{n_1...n_{l-1}} := Gal\left(\mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{n_1...n_{l-1}}}\right)\middle|\,\mathbb{C}(u_1)\right) = \{\sigma_s \mid 1 \leqslant s \leqslant n_1...n_{l-1}\}$$

et donc :

$$G_{n_1...n_{l-1}} \simeq \mu_{n_1...n_{l-1}}(\mathbb{C}).$$

Ainsi, pour $2 \leqslant l \leqslant g+1$:

$$Q_l = \prod_{\sigma \in G_{n_1...n_{l-1}}} (u_2 - \sigma(u_{2,l}))\,.$$

Comme $u_{2,l} \in \mathbb{C}\left(u_1^{\frac{1}{n_1...n_{l-1}}}\right)$, on en déduit que, pour $2 \leqslant l \leqslant g+1$, Q_l est le polynôme minimal de $u_{2,l}$ qui est, par définition, unitaire, irréductible et à coefficients dans $\mathbb{C}(u_1) \subset \mathbb{C}((u_1))$.
Soient $\beta \in \Gamma_1$ et $f \in \mathbb{C}((u_1))[u_2]$ tel que $\nu(f) \geqslant \beta$. On peut alors écrire f sous la forme d'une somme finie :

$$f = \sum_{finie} a_{\alpha_1,...,\alpha_g} Q_1^{\alpha_1}...Q_g^{\alpha_g},$$

où $a_{\alpha_1,...,\alpha_g} \in \mathbb{C}((u_1))$, $0 \leqslant \alpha_g \leqslant \left\lfloor \frac{d^\circ_{u_2}(f)}{n_1...n_{g-1}} \right\rfloor$ et $0 \leqslant \alpha_l < n_l$, pour $1 \leqslant l \leqslant g-1$. La procédure est la suivante :
Par division euclidienne, on peut écrire :

$$f = \sum_{\alpha_g=0}^{\left\lfloor \frac{d^\circ_{u_2}(f)}{d^\circ_{u_2}(Q_g)} \right\rfloor} a_{\alpha_g} Q_g^{\alpha_g},$$

avec $a_{\alpha_g} \in \mathbb{C}((u_1))[u_2]$ et $d^\circ_{u_2}\left(a_{\alpha_g}\right) < d^\circ_{u_2}(Q_g) = n_1...n_{g-1}$.
On recommence la même procédure mais avec a_{α_g} au lieu de f et Q_{g-1} au lieu de Q_g, on obtient :

$$a_{\alpha_g} = \sum_{\alpha_{g-1}=0}^{\left\lfloor \frac{d^\circ_{u_2}(a_{\alpha_g})}{d^\circ_{u_2}(Q_{g-1})} \right\rfloor} a_{\alpha_{g-1},\alpha_g} Q_{g-1}^{\alpha_{g-1}},$$

avec $a_{\alpha_{g-1},\alpha_g} \in \mathbb{C}((u_1))[u_2]$ et $d^\circ_{u_2}\left(a_{\alpha_{g-1},\alpha_g}\right) < d^\circ_{u_2}(Q_{g-1}) = n_1...n_{g-2}$ et donc $\alpha_{g-1} < n_{g-1}$.
En procédant ainsi on s'assure de l'existence du développement de f tel qu'on le souhaitait, en effet, $d^\circ_{u_2}\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right) < d^\circ_{u_2}(Q_1) = 1$ et donc $a_{\alpha_1,...,\alpha_g} \in \mathbb{C}((u_1))$.

Remarquons de plus que, si $(\alpha_1, ..., \alpha_g) \neq (\gamma_1, ..., \gamma_g)$ sont deux g-uplets d'indices, alors :

$$\nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g} Q_1^{\alpha_1} ... Q_g^{\alpha_g}\right) \neq \nu\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g} Q_1^{\gamma_1} ... Q_g^{\gamma_g}\right).$$

En effet, supposons par l'absurde , qu'il existe deux g-uplets d'indices $(\alpha_1, ..., \alpha_g) \neq (\gamma_1, ..., \gamma_g)$ tels que $\nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g} Q_1^{\alpha_1} ... Q_g^{\alpha_g}\right) = \nu\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g} Q_1^{\gamma_1} ... Q_g^{\gamma_g}\right)$. Si on note $\beta_l = \nu(Q_l)$ pour tout $l \in \{1, ..., g\}$, l'égalité précédente équivaut à :

$$\nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right) + \sum_{l=1}^{g} \alpha_l \beta_l = \nu\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g}\right) + \sum_{l=1}^{g} \gamma_l \beta_l.$$

Quitte à renuméroter les indices, on peut supposer qu'il existe $l_0 \in \{1, ..., g\}$ tel que $\alpha_l = \gamma_l$ pour $l > l_0$ et $\alpha_{l_0} < \gamma_{l_0}$. Ainsi :

$$(\gamma_{l_0} - \alpha_{l_0})\beta_{l_0} = \sum_{l=1}^{l_0-1} (\alpha_l - \gamma_l)\beta_l + \left(\nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right) - \nu\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g}\right)\right).$$

Or, par le théorème de Newton-Puiseux, on sait que $\beta_l = v(\iota(Q_l))$, $l \in \{1, ..., g\}$, $\nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right) = v\left(\iota\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right)\right)$ et $\nu\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g}\right) = v\left(\iota\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g}\right)\right)$. Vu que d divise $v\left(\iota\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right)\right)$ et $v\left(\iota\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g}\right)\right)$, et que e_{l_0-1} divise e_1 qui divise d, on en déduit que e_{l_0-1} divise $\left(\nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right) - \nu\left(a_{\gamma_1,...,\gamma_g}\right)\right)$. De plus, par le Théorème 3.9 de **[Z2]**, pour $l \in \{2, ..., g\}$:

$$\beta_l = (n_1 - 1)n_2 ... n_{l-1}\varepsilon_1 + (n_2 - 1)n_3 ... n_{l-1}\varepsilon_2 + (n_{l-1} - 1)\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l.$$

Or, par définition $e_{l_0-1} \mid ... \mid e_l \mid \varepsilon_l$, pour $l \in \{1, ..., l_0 - 1\}$. Ainsi, pour $l \in \{2, ..., l_0 - 1\}$, $e_{l_0-1} \mid \beta_l$. Comme $\beta_1 = \varepsilon_1$, on a également $e_{l_0-1} \mid \beta_1$. On en déduit que $e_{l_0-1} \mid (\gamma_{l_0} - \alpha_{l_0})\beta_{l_0}$. De même, comme $e_{l_0} \mid \varepsilon_l$, pour $l \in \{1, ..., l_0\}$ on en déduit que $e_{l_0} \mid \beta_{l_0}$. Ainsi $n_{l_0} \mid (\gamma_{l_0} - \alpha_{l_0})$ et donc $n_{l_0} \leqslant \gamma_{l_0} - \alpha_{l_0}$ ce qui est absurde vu que $0 < \gamma_{l_0} - \alpha_{l_0} \leqslant \gamma_{l_0} < n_{l_0}$.
On en déduit alors, pour tout g-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_g)$ d'indices apparaissant dans le développement de f, que :

$$\beta \leqslant \nu(f) = \min_{(\alpha_1,...,\alpha_g) \in \mathbb{N}^g} \left\{\nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g} Q_1^{\alpha_1} ... Q_g^{\alpha_g}\right)\right\} \leqslant \nu\left(a_{\alpha_1,...,\alpha_g}\right) + \sum_{l=1}^{g} \alpha_l \nu\left(Q_l\right).$$

On en conclut que $\{Q_1, ..., Q_g\}$ est bien un ensemble 1-complet de polynômes-clés pour l'extension $\mathbb{C}\left((u_1)\right) \hookrightarrow \mathbb{C}\left((u_1)\right)(u_2)$.

Pour montrer (2) on remarque que :

$$v\left(\iota\left(Q_{g+1}\right)\right) = \infty.$$

En effet, comme $\sigma_d(u_{2,g+1}) = u_{2,g+1}$, alors $\iota\left(u_2 - \sigma_d(u_{2,g+1})\right) = 0$ et donc :

$$v\left(\iota\left(Q_{g+1}\right)\right) = v(0) = \infty.$$

Comme $\nu(Q_{g+1}) = v\left(\iota\left(Q_{g+1}\right)\right) \notin \Gamma_1$, on en déduit que $\left(Q_{g+1}\right) \subset H$. Soit $f \in H \setminus \{0\}$ vu comme un élément de $\mathbb{C}\left[[u_1]\right]\left[[u_2]\right]$. On a vu en (1) que Q_{g+1} est un polynôme en u_2 unitaire et de degré d, on peut donc écrire, par division euclidienne de Weierstrass (**[L]**, Théorème 4.9.1) :

$$f = hQ_{g+1} + r,$$

avec $h \in \mathbb{C}\left[[u_1]\right]\left[[u_2]\right]$, $r \in \mathbb{C}\left[[u_1]\right]\left[u_2\right]$ tel que $r = 0$ ou $d^\circ_{u_2}(r) < d$. Alors :

$$\iota(f) = \iota(h)\iota(Q_{g+1}) + \iota(r) = \iota(r).$$

Comme ι est un morphisme injectif, on en déduit que $f = r$. Ainsi f est un polynôme en u_2 de degré strictement plus petit que d ce qui est absurde vu que $f \neq 0$ et que $Q_{g+1} \in H$. Ainsi $r = 0$, $f = hQ_{g+1}$ et $H = (Q_{g+1})$.

Pour montrer (3) il nous faut calculer $\nu(\partial_{2,1}Q_l)$ pour $l \in \{1, ..., g\}$. Remarquons tout d'abord que $\partial_{2,1}Q_1 = 1$ donc $\nu(\partial_{2,1}Q_1) = 0$ et $\varepsilon_1 = \beta_1 = \nu(Q_1)$. Soit $l \in \{2, ..., g\}$, comme $\nu(\partial_{2,1}Q_l) = v(\iota(\partial_{2,1}Q_l))$ il nous suffit de calculer $\iota(\partial_{2,1}Q_l)$. Or :

$$\partial_{2,1}Q_l = \sum_{s=1}^{n_1...n_{l-1}} \frac{Q_l}{u_2 - \sigma_s(u_{2,l})}.$$

Mais, pour $s \in \{1, ..., n_1...n_{l-1}\}$, $v(\iota(u_2 - \sigma_s(u_{2,l}))) \in \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l\}$ et $\varepsilon_l = v(\iota(u_2 - \sigma_s(u_{2,l})))$ si et seulement si $s = n_1...n_{l-1}$. Pour $1 \leqslant q \leqslant l$ notons :

$$E_q = \{s \in \{1, ..., n_1...n_{l-1}\} \mid v(\iota(u_2 - \sigma_s(u_{2,l}))) = \varepsilon_q\}.$$

Pour $s \in E_q$, on a :

$$v\left(\iota\left(\frac{Q_l}{u_2 - \sigma_s(u_{2,l})}\right)\right) = \beta_l - \varepsilon_q$$

et :

$$\iota\left(\frac{Q_l}{u_2 - \sigma_s(u_{2,l})}\right) = c_{s,q}t^{\beta_l - \varepsilon_q} + R_{s,q},$$

où $c_{s,q} \in \mathbb{C}$ et $R_{s,q} \in \mathbb{C}[[t]]$ tel que $v(R_{s,q}) > \beta_l - \varepsilon_q$. On peut donc écrire :

$$\iota(\partial_{2,1}Q_l) = \sum_{q=1}^{l} \sum_{s \in E_q} \left(c_{s,q}t^{\beta_l - \varepsilon_q} + R_{s,q}\right) = \sum_{q=1}^{l} c_q t^{\beta_l - \varepsilon_q} + R_l,$$

où $c_q = \sum_{s \in E_q} c_{s,q} \in \mathbb{C}$, $R_l = \sum_{q=1}^{l} \sum_{s \in E_q} R_{s,q} \in \mathbb{C}[[t]]$ tel que $v(R_l) > \min_{1 \leqslant q \leqslant l}\{\beta_l - \varepsilon_q\}$. Comme $\beta_1 < ... < \beta_g$, on en déduit que :

$$v\left(\sum_{q=1}^{l} c_q t^{\beta_l - \varepsilon_q}\right) = \min_{1 \leqslant q \leqslant l}\{\beta_l - \varepsilon_q\} = \beta_l - \varepsilon_l,$$

et donc :

$$\nu(\partial_{2,1}Q_l) = \beta_l - \varepsilon_l.$$

Soit $l \in \{2, ..., g\}$, pour montrer (4) il faut remarquer que :

$$\sigma_{n_1...n_{l-1}}(u_{2,l}) = u_{2,l},$$

donc :

$$\iota\left(\sigma_{n_1...n_{l-1}}(u_{2,l})\right) = u_2(\varepsilon_l).$$

On définit alors le polynôme ${}^{\iota}Q_l = \prod_{s=1}^{n_1...n_{l-1}} (X - \iota(\sigma_s(u_{2,l}))) \in \mathbb{C}[u_1(t)][X]$, il possède $u_2(\varepsilon_l)$ comme racine. Enfin, comme $u_2(\varepsilon_1) = 0$, le polynôme ${}^{\iota}Q_1 = X$ possède $u_2(\varepsilon_1)$ comme racine.

□

Corollaire II.23 — *Pour* $l \in \{1, ..., g\}$, $u_2(\varepsilon_l)$ *est entier sur* $\mathbb{C}[u_1(t), \{u_2(\beta) \mid m \leqslant \beta < \varepsilon_l\}]$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la preuve du (3) de la Proposition II.22 vu le choix des polynômes ${}^{\iota}Q_l$ pour $l \in \{1, ..., g\}$.

□

3. Le théorème de plongement de Kaplansky

Dans cette section, on suppose que $(R, \mathfrak{m}, k)$ est un anneau local régulier complet de dimension $n+1$. Si R est de caractéristique mixte, on suppose de plus que $p \notin \mathfrak{m}^2$.

Théorème II.24 — *Il existe un anneau de Mal'cev-Neumann A_R et un monomorphisme d'anneaux :*

$$\iota : R \hookrightarrow A_R,$$

tels que ν soit la restriction à R de la valuation de Mal'cev-Neumann associée à A_R.
*Pour $f \in R$, on appelle $\iota(f)$ un **développement de Puiseux de f par rapport à ν**.*

Remarque II.25 — $A_R = \begin{cases} \overline{k_\nu}\left[\left[t^{\Gamma'}\right]\right] & \text{si } car(R) = car(k) \\ \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right] & \text{si } car(R) \neq car(k) \end{cases}$

Remarque II.26 — Par le Théorème I.5, on sait que :

$$R = \begin{cases} k\left[\left[u_1, ..., u_{n+1}\right]\right] & \text{si } car(R) = car(k) \\ W\left[\left[u_1, ..., u_n\right]\right] & \text{si } car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

La preuve consiste donc à définir, par récurrence transfinie, le développement de Puiseux de $u_1, ..., u_{n+1}$ (resp. $p, u_1, ..., u_n$) à l'aide des polynômes-clés.

Preuve : On va faire la preuve de ce théorème seulement dans le cas où R est de caractéristique mixte. Le cas où R est équicaractéristique se traite de la même manière en remplaçant p par t et en prenant les coefficients directement dans $\overline{k_\nu}$.

Dans ce qui suit on va construire un développement de Puiseux en lien avec les polynômes-clés. Remarquons que définir un développement de Puiseux pour un élément de R revient à définir $n+1$ séries $\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_n)$ formellement indépendantes sur W.
On va construire le morphisme ι par récurrence sur $n-r$. Si $n = r$, on pose $\iota(p) = p^{\nu(p)}$ et $\iota(u_j) = p^{\nu(u_j)}$, $j \in \{1, ..., r\}$ (remarquons que, pour que ι soit un morphisme, comme $\nu_{|K_{n-1}}$ est de rang 1, on choisit une fois pour toute un plongement $\Gamma_1 \hookrightarrow \mathbb{R}$ qui envoie $\nu(p)$ sur 1).
Supposons que $n > r$ et que l'on a déjà construit un monomorphisme d'anneaux valués :

$$\iota_{n-1} : R_{n-1} \hookrightarrow \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$$

tel que $\nu_{|R_{n-1}}$ soit induite par la valuation p-adique et $R_{n-1} = W\left[\left[u_1, ..., u_{n-1}\right]\right]$. Pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, on note $u_j(p) = \iota_{n-1}(u_j)$.
Nous allons construire la série généralisée $u_n(p)$ par récurrence transfinie sur un sous-ensemble bien ordonné de Γ'.
Soit $\beta \in \Gamma_+$, on note $i_\beta = \min\{i \in \Lambda_n \mid \beta \leqslant \varepsilon_{n,i}\}$ et par convention, si $\{i \in \Lambda_n \mid \beta \leqslant \varepsilon_{n,i}\} = \emptyset$, on prendra $i_\beta = \Lambda_n$ (c'est-à-dire le plus petit ordinal strictement plus grand que n'importe quel élément de Λ_n).
Supposons donnée une série généralisée $u_n(\beta) = \sum\limits_{\gamma < \beta} a_\gamma p^\gamma \in \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$, on considère le morphisme d'anneaux $\iota_\beta : R \to \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ défini par :

$$\iota_\beta(p) = p^{\nu(p)};$$
$$\iota_\beta(u_j) = u_j(p),\ \forall j \in \{1, ..., n-1\};$$
$$\iota_\beta(u_n) = u_n(\beta).$$

Définition II.27 — *On dit que $u_n(\beta)$ est un* ***développement de Puiseux partiel*** *de u_n si les deux conditions suivantes sont vérifiées pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:*

(1) $v(\iota_\beta(Q_{n,i})) = \beta_{n,i}$, $\forall i \in \Lambda_n$ tel que $i < i_\beta$;

(2) $v(\iota_\beta(Q_{n,i_\beta})) \geqslant \min\limits_{q\in\mathbb{N}}\{\nu(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta}) + p^q\beta\}$ (si $i_\beta = \Lambda_n$, on considère cette condition toujours vérifiée).

Soit T une nouvelle variable et considérons le morphisme d'anneaux $\iota_{\beta,T} : R \to \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}, T\right]\right]$ défini par :

$$\iota_{\beta,T}(p) = p^{\nu(p)};$$
$$\iota_{\beta,T}(u_j) = u_j(p),\ \forall\, j \in \{1, ..., n-1\};$$
$$\iota_{\beta,T}(u_n) = u_n(\beta) + T.$$

On note ν_β l'extension à $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}, T\right]\right]$ de la valuation p-adique v de $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ telle que $\nu_\beta(T) = \beta$ et $in_{\nu_\beta}(T)$ est transcendant sur $gr_v\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]\right)$. On pose alors $\mu_\beta = \nu_{\beta|R}$ où R est vu comme sous-anneau de $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}, T\right]\right]$ via le monomorphisme $\iota_{\beta,T}$.
Supposons que $i_\beta = \Lambda_n$, alors $\mu_\beta = \nu$. Sinon, supposons que $i_\beta < \Lambda_n$, c'est-à-dire qu'il existe $i \in \Lambda_n$ tel que $\varepsilon_{n,i} \geqslant \beta$. On note alors :

$$\Gamma_\beta = \Gamma^{(n-1)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} + \sum_{i<i_\beta} \mathbb{Q}\beta_{n,i} \subset \Gamma_{\mathbb{Q}}.$$

Lemme II.28 — *On a les assertions suivantes :*

(1) La valuation $\nu_{\beta|K_{n-1}}$ est l'unique valuation telle que :

$$\nu_{\beta|K_{n-1}[Q_{n,i_\beta}]} = \nu_{|K_{n-1}[Q_{n,i_\beta}]};$$
$$\nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min_{q\in\mathbb{N}}\left\{\nu\left(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta}\right) + p^q\beta\right\},$$

et $in_{\nu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$ est transcendant sur $gr_{\nu_\beta}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right)$.

(2) Considérons les sous-algèbres graduées $gr_{\mu_\beta}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right) \subset gr_{\mu_\beta}(R)$ et $gr_{\nu_{n,i_\beta}}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right) \subset gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R)$. On a alors un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$gr_{\mu_\beta}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right) \simeq gr_{\nu_{n,i_\beta}}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right)$$

qui peut être étendu en un isomorphisme entre $gr_{\mu_\beta}(R)$ et $gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R)$ en envoyant $in_{\mu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$ sur $in_{\nu_{n,i_\beta}}(Q_{n,i_\beta})$, mais la graduation n'est, en général, pas préservée, sauf si l'une des deux conditions équivalentes de (3) est vérifiée.

(3) $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$ ssi $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$.

(4) $\forall\, h \in R$, $\nu_{n,i_\beta}(h) \leqslant \nu(h)$.
Supposons que $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$ (donc $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$). On a alors, pour tout $h \in R$:

$$\begin{aligned}\nu_{n,i_\beta}(h) = \nu(h) &\Leftrightarrow in_{\nu_{n,i_\beta}}(h) \notin \ker\left(gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R) \to gr_\nu(R)\right)\\ &\Leftrightarrow in_{\nu_\beta}\left(\iota_{\beta,T}(h)\right) \notin \ker\left(gr_{\nu_\beta}\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}, T\right]\right]\right) \to gr_v\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]\right)\right).\end{aligned}$$

En particulier, il y a égalité si $in_{\nu_\beta}(T)$ n'apparaît pas dans $in_{\nu_\beta}(\iota_{\beta,T}(h))$.

Preuve : (1) : $\nu_{\beta|K_{n-1}} = \nu_{|K_{n-1}}$ par définition de $\iota_{\beta,T}$, ν_β et v. Pour $i < i_\beta$, alors, $\beta_{n,i} < \beta$ et comme $u_n(\beta)$ est un développement de Puiseux partiel, on obtient l'égalité :

$$\nu_\beta\left(\iota_{\beta,T}(Q_{n,i})\right) = v\left(\iota_\beta(Q_{n,i})\right) = \beta_{n,i}.$$

Enfin, comme :

$$Q_{n,i_\beta}(u_1, ..., u_{n-1}, u_n + T) = \sum_{l=0}^{d^\circ_{u_n}(Q_{n,i_\beta})} \partial_{n,l} Q_{n,i_\beta}(u_1, ..., u_n) T^l,$$

on en déduit que :

$$\nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min_{l\in\mathbb{N}} \left\{ \nu\left(\partial_{n,l} Q_{n,i_\beta}\right) + l\nu_\beta(T) \right\},$$

où le minimum est atteint avec $l = 1$ si $car(k) = 0$, une puissance de $p = car(k)$ sinon. Ainsi, $in_{\nu_\beta}(T)$ apparaît dans $in_{\nu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$. Comme $in_{\nu_\beta}(T)$ est transcendant sur $gr_v\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]\right)$, on en déduit que $in_{\nu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$ est transcendant sur $gr_{\nu_\beta}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right)$. L'unicité de ν_β vérifiant les propriétés précédemment démontrées provient de la définition même de cette valuation.

(2) : Par définition et construction des polynômes-clés et de la valuation tronquée ν_{n,i_β}, on obtient l'égalité :

$$\nu_{n,i_\beta|K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]} = \nu_{|K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]}$$

qui nous définit un isomorphisme naturel d'algèbres graduées :

$$gr_{\nu_{n,i_\beta}}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right) \xrightarrow{\sim} gr_{\mu_\beta}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right).$$

En envoyant $in_{\nu_{n,i_\beta}}(Q_{n,i_\beta})$ sur $in_{\mu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$, on prolonge l'isomorphisme précédent en un isomorphisme entre $gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R)$ et $gr_{\mu_\beta}(R)$, la graduation étant préservée seulement si $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$.

(3) : Supposons que $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, par définition des polynômes-clés et de μ_β, il suffit de montrer que $\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu_{n,i_\beta}(Q_{n,i_\beta})$. Soit $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta$. Par définition de μ_β, on a :

$$\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta \leqslant \nu\left(\partial_{n,p^{b_{n,i_\beta}}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{b_{n,i_\beta}}\varepsilon_{n,i_\beta} = \beta_{n,i_\beta}.$$

Par définition de ε_{n,i_β}, on a :

$$\varepsilon_{n,i_\beta} \geqslant \frac{\beta_{n,i_\beta} - \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right)}{p^{q_0}},$$

c'est-à-dire :

$$\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta \geqslant \beta_{n,i_\beta}.$$

Réciproquement, si $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$, alors :

$$\beta_{n,i_\beta} = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta \leqslant \nu\left(\partial_{n,p^{b_{n,i_\beta}}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{b_{n,i_\beta}}\beta,$$

ce qui donne :

$$\varepsilon_{n,i_\beta} = \frac{\beta_{n,i_\beta} - \nu\left(\partial_{n,p^{b_{n,i_\beta}}} Q_{n,i_\beta}\right)}{p^{b_{n,i_\beta}}} \leqslant \beta.$$

Enfin, rappelons que, par définition de i_β, $\beta \leqslant \varepsilon_{n,i_\beta}$.
(4) : Par la Remarque II.17, pour tout $h \in R$, $\nu_{n,i_\beta}(h) \leqslant \nu(h)$. La première équivalence est évidente, la deuxième provient du fait que l'on a supposé $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$ et que $\mu_\beta(h) = \nu_\beta(\iota_{\beta,T}(h))$ ainsi que $v(\iota(h)) = \nu(h)$.

□

Commençons notre récurrence transfinie par $\beta = \nu(u_n) = \beta_{n,1}$. On pose alors $u_n(\beta) = 0$ et on a $i_\beta = 1$, $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta} = \nu_{n,1}$; $u_n(\beta)$ est ainsi un développement de Puiseux partiel de u_n.
Supposons $u_n(\beta)$ construit pour un certain $\beta \in \Gamma_+$ tel que $\beta > \nu(u_n)$ et définissons le coefficient $a_{n,\beta}$ de p^β de $u_n(p)$. On suppose également, par hypothèse de récurrence, que $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$ ou que $\beta \in \Gamma_\beta$.
Si $\beta \notin \Gamma_\beta$, comme $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, alors $\beta_{n,i_\beta} \notin \Gamma_\beta$ et donc $i_\beta = \max \Lambda_n$. Dans ce cas on a $\nu = \nu_{n,i_\beta} = \mu_\beta$ et on pose :

$$u_n(p) = u_n(\beta) + p^\beta.$$

Si $\beta \in \Gamma_\beta$, alors $\nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min\limits_{q \in \mathbb{N}} \{\nu(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta}) + p^q \beta\} \in \Gamma_\beta$ et donc :

$$\exists\, d \in K_{n-1}, l_1, ..., l_t \in \Lambda_n, \lambda \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_t \in \mathbb{Z}$$

tels que :

$$\lambda \nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j \beta_{n,l_j} + \nu(d).$$

On pose alors :

$$z = \begin{cases} \dfrac{Q_{n,i_\beta}^\lambda}{d \prod\limits_{j=1}^{t} Q_{n,l_j}^{\lambda_j}} \bmod m_\nu \in k_\nu & \text{si} \quad \beta = \varepsilon_{n,i_\beta} \\ \qquad 0 & \text{si} \quad \beta < \varepsilon_{n,i_\beta} \end{cases}$$

Notons $W_{r+1}, ..., W_{n-1}, W_n$ les supports respectifs de $u_{r+1}(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\beta)$, on note alors $u_j(p) = \sum\limits_{\gamma \in W_j} a_{j,\gamma} p^\gamma$ pour $j \in \{r+1, ..., n-1\}$ et $u_n(\beta) = \sum\limits_{\gamma \in W_n} a_{n,\gamma} p^\gamma$. Posons, pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, $\mathfrak{a}_j = \{a_{j,\gamma} \mid \gamma \in W_j\} \subset \overline{W}$, $\overline{\mathfrak{a}_j} = \{\overline{a_{j,\gamma}} \mid \gamma \in W_j\} \subset \overline{k_\nu}$ son image modulo p, $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_{r+1}, ..., \mathfrak{a}_n)$ et $\overline{\mathfrak{a}} = (\overline{\mathfrak{a}_{r+1}}, ..., \overline{\mathfrak{a}_n})$. Soit X une variable indépendante, si on remplace T par Xp^β dans $in_{\nu_\beta}(\iota_{\beta,T}(Q_{n,i_\beta}))$, on obtient un élément de la forme :

$$f p^{\nu_\beta(Q_{n,i_\beta})},\ f \in K_0\left[\mathfrak{a}, X\right] \ .$$

On note alors $\overline{f} \in k_\nu[\overline{\mathfrak{a}}, X] \subset \overline{k_\nu}[X]$ l'image de f modulo p.
De plus, pour $j \in \{1, ..., t\}$, $in_{\nu_\beta}(\iota_\beta(Q_{n,l_j}))$ est de la forme :

$$c_j p^{\beta_{n,l_j}},\ c_j \in \overline{W}^\times$$

et $in_{\nu_\beta}(\iota_\beta(d))$ est de la forme :

$$\delta p^{\nu(d)},\ \delta \in \overline{W}^\times.$$

Notons $\overline{c_j}$ et $\overline{\delta}$ dans $\overline{k_\nu}$ les images respectives de c_j et de δ modulo p.

Ainsi, $\dfrac{\overline{f}^\lambda}{\overline{\delta}\prod_{j=1}^{t}\overline{c_j}^{\lambda_j}} = z$ induit une équation algébrique en X sur $\overline{k_\nu}$, on note alors $\alpha_{n,\beta} \in \overline{k_\nu}$ une de ses racines et $a_{n,\beta} \in \overline{W}$ un relevé. Deux cas se présentent :

(1) $a_{n,\beta}$ est transcendant sur $K_0[\mathfrak{a}]$. On pose alors :

$$u_n(p) = u_n(\beta) + a_{n,\beta}p^\beta,$$

on a $\nu = \nu_{n,i_\beta}$ et on arrête l'algorithme.

(2) $a_{n,\beta}$ est algébrique sur $K_0[\mathfrak{a}]$. On note alors

$$\tilde{\beta} = v(Q_{n,i_\beta}(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\beta) + a_{n,\beta}p^\beta)),$$

$$\tilde{\varepsilon} = \max_{b\in\mathbb{N}}\left\{\frac{\tilde{\beta} - \nu(\partial_{n,p^b}Q_{n,i_\beta})}{p^b}\right\}$$

et

$$\beta_+ = \begin{cases} \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_{n,i_\beta}\} & \text{si} \quad \beta < \varepsilon_{n,i_\beta} \\ \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_{n,i_\beta+1}\} & \text{si} \quad \beta = \varepsilon_{n,i_\beta} \end{cases}$$

Enfin, on pose :

$$u_n(\beta_+) = u_n(\beta) + a_{n,\beta}p^\beta.$$

Ceci nous définit alors un nouveau développement de Puiseux partiel sur lequel on peut continuer la récurrence. En effet, remarquons que $\tilde{\varepsilon} \geqslant \beta$ car si $\beta < \varepsilon_{n,i_\beta}$, alors, par définition de ν_β, $\tilde{\beta} \geqslant \nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min\limits_{q\in\mathbb{N}}\left\{\nu\left(\partial_{n,p^q}Q_{n,i_\beta}\right) + p^q\beta\right\}$ et donc $\tilde{\varepsilon} \geqslant \beta$ par définition de $\tilde{\varepsilon}$; si $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, par le (3) du Lemme II.28, $\tilde{\beta} = \beta_{n,i_\beta}$ et donc, toujours par définition $\tilde{\varepsilon} \geqslant \beta$. Ainsi, le (1) de la Définition II.27 est toujours vérifié lorsque $\beta < \varepsilon_{n,i_\beta}$; si $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, c'est également vrai vu que, dans ce cas, $\tilde{\beta} = \beta_{n,i_\beta}$. Quant au (2), on vient de voir que $\tilde{\beta} \geqslant \nu_\beta(Q_{n,i_\beta})$ pour $\beta < \varepsilon_{n,i_\beta}$; si $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, comme la suite $(\beta_{n,i})_{i\in\Lambda_n}$ est croissante, on a, lorsque $\beta_+ = \tilde{\varepsilon}$:

$$v(\iota_{\beta_+}(Q_{n,i_\beta+1})) \geqslant \tilde{\beta} = \beta_{n,i_\beta}.$$

On en déduit que $v(\iota_{\beta_+}(Q_{n,i_\beta+1})) \geqslant \min\limits_{q\in\mathbb{N}}\left\{\nu\left(\partial_{n,p^q}Q_{n,i_\beta+1}\right) + p^q\beta_+\right\}$. Si $\beta_+ = \varepsilon_{n,i_\beta+1}$, alors :

$$v(\iota_{\beta_+}(Q_{n,i_\beta+1})) = \min_{q\in\mathbb{N}}\left\{\nu\left(\partial_{n,p^q}Q_{n,i_\beta+1}\right) + p^q\beta_+\right\}$$

par le (3) du Lemme II.28.

Pour achever notre récurrence transfinie, il nous faut considérer le cas limite. Soient $\mathcal{W}$ un sous-ensemble bien ordonné de Γ_1 n'ayant pas d'élément maximal et $\{a_{n,\gamma} \mid \gamma \in \mathcal{W}\}$ tels que pour tout $\beta \in \mathcal{W}$, $u_n(\beta) = \sum\limits_{\substack{\gamma\in\mathcal{W}\\ \gamma<\beta}} a_{n,\gamma}p^\gamma$ soit un développement de Puiseux partiel de u_n. Notons $u_n(\mathcal{W}) = \sum\limits_{\gamma\in\mathcal{W}} a_{n,\gamma}p^\gamma$.

Supposons d'abord que :

$$\forall\, i \in \Lambda_n,\ \exists\, \beta \in \mathcal{W},\ \varepsilon_{n,i} < \beta.$$

Alors, pour tout $i \in \Lambda_n$, $i < i_\beta$ et l'ensemble $\{Q_{n,i}\}_{i\in\Lambda_n}$ forme un système complet de polynômes-clés pour l'extension $K_{n-1} \hookrightarrow K_{n-1}(u_n)$. Ainsi :

$$\forall\, f \in K_{n-1}[u_n],\ \exists\, i \in \Lambda_n,\ \nu(f) = \nu_{n,i}(f).$$

On en déduit, à l'aide de la définition du développement de Puiseux partiel, que :

$$\forall\, f \in K_{n-1}[u_n],\ \nu(f) = v(f(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W}))).$$

Or tout $f \in R$ tel que $\nu(f) \in \Gamma_1$ s'écrit $f = f' + f''$, avec $f' \in K_{n-1}[u_n]$ et $\nu_0(f'') > \nu(f)$. On a alors :

$$\begin{aligned} v(f''(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W}))) > \nu(f) &= \nu(f') \\ &= v(f'(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W}))) \\ &= v(f(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W}))). \end{aligned}$$

D'où, pour tout $f \in R$ tel que $\nu(f) \in \Gamma_1$, on a :

$$\nu(f) = v(f(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W}))).$$

Enfin, le même résultat est vrai pour tout $f \in R \otimes_{R_{n-1}} K_{n-1}$ tel que $\nu(f) \in \Gamma_1$.
S'il existe un $f \in R$ tel que $\nu(f) \notin \Gamma_1$, alors l'ensemble Λ_n contient un élément maximal λ et donc il existe un $\beta \in \mathcal{W}$ tel que $\varepsilon_{n,\lambda} < \beta$. Alors, f s'écrit de manière unique sous la forme $f = Q_{n,\lambda}^a \tilde{f}$, où $a \in \mathbb{N}$, $\tilde{f} \in R \otimes_{R_{n-1}} K_{n-1}$ tel que $\nu(\tilde{f}) \in \Gamma_1$. Par le cas précédent, $\nu(\tilde{f}) = v(\tilde{f}(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W})))$ et donc $\nu(f) = v(f(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W})))$.
On définit alors $u_n(p) = u_n(\mathcal{W})$ et la construction du développement de Puiseux s'arrête.
Supposons, pour terminer, que :

$$\exists\, i \in \Lambda_n,\ \forall\, \beta \in \mathcal{W},\ \varepsilon_{n,i} > \beta.$$

On note alors

$$i_{\mathcal{W}} = \min\{i \in \Lambda_n \mid \forall\, \beta \in \mathcal{W},\ \varepsilon_{n,i} > \beta\},$$
$$\tilde{\beta} = v(Q_{n,i_{\mathcal{W}}}(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W}))),$$
$$\tilde{\varepsilon} = \max_{b\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\tilde{\beta} - \nu(\partial_{n,p^b} Q_{n,i_{\mathcal{W}}})}{p^b} \right\}$$

et

$$\beta_+ = \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_{n,i_{\mathcal{W}}}\}.$$

Enfin, on pose $u_n(\beta_+) = u_n(\mathcal{W})$, ceci nous définit un nouveau développement de Puiseux partiel sur lequel on peut continuer la récurrence.

□

4. Des résultats de dépendance intégrale

Les résultats de cette section sont donnés dans le cas mixte non-ramifié, en remplaçant W par k, $\overline{W}$ par $\overline{k_\nu}$, p par t et n par $n+1$, on obtient les mêmes résultats dans le cas équicaractéristique.

Proposition II.29 — *Soient $i \in \Lambda_n$, $\beta = \varepsilon_{n,i}$ (c'est-à-dire $i = i_\beta$), et $h \in R$. Alors :*

$$\nu_{n,i}(h) = \min_{\alpha\in\mathbb{N}} \{\nu(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\} = \min_{\alpha\in\mathbb{N}} \{\nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\}.$$

Preuve : Soient $h \in R$ et $\alpha \in \mathbb{N}$, par la Proposition II.18, on a :

$$\nu_{n,i}(h) - \nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) \leqslant \alpha\beta.$$

On obtient alors :

$$\nu_{n,i}(h) \leqslant \min_{\alpha \in \mathbb{N}} \{\nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\} \leqslant \min_{\alpha \in \mathbb{N}} \{\nu(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\}.$$

Montrons que ces inégalités sont des égalités. Par la Remarque II.28 (3), on a :

$$\nu_{n,i}(h) = \mu_\beta(h) = \nu_\beta(\iota_{\beta,T}(h)).$$

Soit $h = \sum_{j=0}^{s_{n,i}} d_{n,j,i} Q_{n,i}^j$ le développement (n,i)-standard de h, on pose :

$$S = \{j \in \{0, ..., s_{n,i}\} \mid j\beta + \nu(d_{n,j,i}) = \nu_{n,i}(h)\}.$$

Tout élément $j \in S$ s'écrit de la forme $j = p^e u$ où p ne divise pas u. Prenons un $j \in S$ tel que p^{e+1} divise j', pour tout $j' \in S$ tel que $j' < j$. On pose alors $\alpha = p^{b_{n,i}} j$ et à l'aide de la Proposition II.19 on en déduit que :

$$\nu_{n,i}(h) - \nu(\partial_{n,\alpha} h) = \nu_{n,i}(h) - \nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) = \alpha\beta.$$

□

Notons $\mathcal{A}$ le sous-anneau de $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ engendré par $\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_n)$ et toutes leurs troncatures. Pour tout $j \in \{r, ..., n\}$ et $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{A}_{j,\beta}$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ engendré par toutes les troncatures ouvertes de la forme $u_{j'}(\beta')$, où $(j', \beta') <_{lex} (j, \beta)$ pour l'ordre lexicographique.

Proposition II.30 — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $g, h \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$ et $\lambda \in \Gamma_1$. On suppose que $v(gh) < \lambda$.*
Il existe alors $l \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 < ... < \lambda_l$ et $\delta_1 > ... > \delta_l$ éléments de Γ_1 tels que :

$$(gh)(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} g[\lambda_{i-1}, \lambda_i[\, h(\delta_i).$$

De plus, on peut choisir les suites $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant l}$ et $(\delta_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ de telle sorte que $\lambda_l \leqslant \lambda - v(h)$ et $\delta_1 \leqslant \lambda - v(g)$.

Preuve : Notons $supp(g)$ (resp. $supp(h)$) l'ensemble de tous les $\varepsilon \in \Gamma_1$ tels que le coefficient devant p^ε de g (resp. de h) soit non-nul. On va construire les deux suites cherchées par récurrence.
On pose $\lambda_0 = v(g)$ et $\delta_1 = \lambda - \lambda_0$, par hypothèses on a bien $\lambda_0 \leqslant \lambda - v(h)$. Supposons maintenant que, pour tout $q \geqslant 1$, on ait construit $\lambda_0 < ... < \lambda_q$ et $\delta_1 > ... > \delta_q$ avec $\lambda_q \leqslant \lambda - v(h)$ et $\delta_i = \lambda - \lambda_{i-1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant q$. Posons alors :

$$B_q = \{\varepsilon \in supp(g) \mid \exists\, \theta \in supp(h),\ \theta + \lambda_q < \lambda \leqslant \theta + \epsilon\}.$$

Si $B_q = \emptyset$, on pose $l = q$ et la récurrence s'arrête (remarquons que ceci arrive lorsque $\lambda_q \geqslant \lambda - v(h)$). De plus, par construction, on a l'égalité :

$$(gh)(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} g[\lambda_{i-1}, \lambda_i[\, h(\delta_i).$$

Si $B_q \neq \emptyset$, on pose $\lambda_{q+1} = \min\{\lambda - v(h), \min B_q\}$ et $\delta_{q+1} = \lambda - \lambda_q$. Par définition de

λ_{q+1} et de δ_{q+1} et par hypothèse de récurrence on a bien que $\lambda_q < \lambda_{q+1}$ et $\delta_q > \delta_{q+1}$. De plus, on remarque que :

$$\{\lambda - \lambda_{q+1}, \lambda - \lambda_q\} \cap supp(h) \neq \emptyset.$$

On obtient alors une suite strictement décroissante d'ensembles :

$$supp\,(h(\lambda - \lambda_1)) \supsetneq \ldots \supsetneq supp\,\big(h(\lambda - \lambda_{q+1})\big)\,,$$

où $supp\,\big(h(\lambda - \lambda_{q+1})\big)$ est un segment initial de $supp\,\big(h(\lambda - \lambda_q)\big)$. Le processus s'arrête donc au bout d'un nombre fini d'itérations, ceci entraînant la finitude des suites $(\lambda_i)_i$ et $(\delta_i)_i$.

□

Corollaire II.31 — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $g_1, ..., g_s \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$ et $\lambda \in \Gamma_1$. On suppose que $v(g_1...g_s) < \lambda$. Alors :*

$$(g_1...g_s)(\lambda) = \sum_{(i_1,...,i_s)\in N} \prod_{j=1}^{s} g_j(\lambda_{i_j}^{(j)}),$$

où $N \subset (\mathbb{N}^*)^s$ est un ensemble fini et $\lambda_{i_j}^{(j)} \in \Gamma_{1+}$ sont tels que $\lambda_{i_j}^{(j)} \leqslant \lambda$ avec inégalité stricte s'il existe $j' \in \{1, ..., s\}\backslash\{j\}$ tel que $v(g_{j'}) > 0$.

Preuve : Par récurrence sur s en appliquant la Proposition II.30.

□

Corollaire II.32 — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $g_1, ..., g_s \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$ et $\lambda \in \Gamma_1$. On suppose que $v(g_1...g_s) < \lambda$. Alors :*

$$(g_1...g_s)(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)].$$

Preuve : Par le Corollaire II.31, il suffit de montrer le résultat pour $s = 1$. Notons $g = g_1$ et montrons par récurrence sur $j \in \{r, ..., n\}$ que, si $g \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$, alors $g(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$, pour $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$ et $\lambda \in \Gamma_1$ fixés.
Pour $j = r$ on a :

$$\mathcal{A}_{r,\beta}[u_r(\beta)] = \begin{cases} \overline{W}\left[p^{\nu(p)}, p^{\nu(u_1)}, ..., p^{\nu(u_r)}\right] & \text{si} \quad \nu(u_r) < \beta \\ \overline{W}\left[p^{\nu(p)}, p^{\nu(u_1)}, ..., p^{\nu(u_{r-1})}\right] & \text{si} \quad \nu(u_r) \geqslant \beta \end{cases}$$

et donc si $g \in \mathcal{A}_{r,\beta}[u_r(\beta)]$ et $v(g) < \lambda$ alors $g(\lambda) \in \mathcal{A}_{r,\beta}[u_r(\beta)]$.
Supposons $j > r$ et le résultat vrai pour $j - 1$. Soit $g \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$, on peut écrire g comme un polynôme en $u_j(\beta)$ à coefficients dans $\mathcal{A}_{j,\infty}$. On applique alors le Corollaire II.31 à chaque monôme de $g(\lambda)$. Par hypothèse de récurrence, toutes les troncatures ouvertes des coefficients de g sont dans $\mathcal{A}_{j,\infty}$, ainsi $g(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$.

□

Pour $j \in \{r, ..., n\}$, $R_j = W\left[\left[u_1, ..., u_j\right]\right]$ et $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, considérons les morphismes d'anneaux $\tau_{j,\beta}, \iota_{j,\beta} : R_j \to \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ définis par :

$$\begin{aligned}
&\tau_{j,\beta}(p) = \iota_{j,\beta}(p) = \iota(p);\\
&\tau_{j,\beta}(u_i) = \iota_{j,\beta}(u_i) = \iota(u_i),\ \forall\, i \in \{1, ..., j-1\};\\
&\iota_{j,\beta}(u_j) = u_j(\beta);\\
&\tau_{j,\beta}(u_j) = u_j[\beta].
\end{aligned}$$

Remarquons que $\iota_{n,\beta} = \iota_\beta$.

Proposition II.33 — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $f \in R_j \backslash R_{j-1}$ et $\lambda \in \Gamma_1$. Alors :*

$$\iota_{j,\beta}(f)(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)].$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que l'on peut remplacer f par une de ses approximations $(p, u_1, ..., u_j)$-adiques choisies dans $W\left[u_1, ..., u_j\right]$ de telle sorte que l'on ne modifie pas $\iota_{j,\beta}(f)(\lambda)$. Soit $f \in W\left[u_1, ..., u_j\right]$ choisi ainsi, on a alors :

$$\iota_{j,\beta}(f) \in \overline{W}\left[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1}), u_j(\beta)\right] \subset \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)].$$

On conclut en appliquant le Corollaire II.32.

□

Dans ce qui suit nous allons donner une description explicite de $\tau_{j,\beta}(f)(\lambda)$ et $\iota_{j,\beta}(f)(\lambda)$ pour un λ que nous préciserons par la suite.
Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma_1 \cup \{\infty\}$ et $f \in R_j \backslash R_{j-1}$. Notons

$$i_{j,\beta} = \min\{i \in \Lambda_j \mid \beta \leqslant \varepsilon_{j,i}\}$$

et par convention, si $\{i \in \Lambda_j \mid \beta \leqslant \varepsilon_{j,i}\} = \emptyset$, on prendra $i_{j,\beta} = \Lambda_j$ (c'est-à-dire le plus petit ordinal strictement plus grand que n'importe quel élément de Λ_j). Remarquons que $i_{n,\beta} = i_\beta$. On pose alors :

$$\lambda(f, \beta) = \min\{\nu_{j,i_{j,\beta}}(\partial_{j,b} f) + b\beta \mid b \in \mathbb{N}^*\};$$

$$U = \{b \in \mathbb{N}^* \mid \nu_{j,i_{j,\beta}}(\partial_{j,b} f) + b\beta = \lambda(f, \beta)\}.$$

Remarque II.34 — Comme R_j est noethérien, on a le fait suivant :

$$\exists\, \overline{b} \in \mathbb{N}^*,\ \partial_{j,b} f \in \left(\partial_{j,0} f, ..., \partial_{j,\overline{b}} f\right),\ \forall\, b > \overline{b}.$$

Ainsi $U \subset \{0, ..., \overline{b}\}$ est un ensemble fini.

Par abus de notation, on notera $in_v(\partial_{j,b} f)$ le monôme de plus petit degré de $\iota(\partial_{j,b} f)$ dans $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$. On appelle U_0 l'ensemble des $b \in U$ tels que $in_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}(T)$ n'apparaît pas dans $in_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}\left(\iota_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}, T}(\partial_{j,b} f)\right)$. En remplaçant n par j dans le Lemme II.28 (4), on a, pour tout $b \in U_0$:

$$\nu_{j,i_{j,\beta}}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f) = v\left(\iota_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}(\partial_{j,b} f)\right);$$

$$in_v(\partial_{j,b} f) = in_v\left(\iota_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}(\partial_{j,b} f)\right).$$

Remarque II.35 — Soit $b \in U$, on a alors :

$$b \in U_0 \text{ ssi } \exists\, i_0 < i_{j,\beta},\ \nu_{j,i_0}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f).$$

Comme U et U_0 sont des ensembles finis, le même i_0 peut être choisi tel que $\nu_{j,i_0}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f)$ et ceci pour tout $b \in U_0$.

Pour $i_{j,\beta}$ ordinal limite, prenons $i_0 \in \Lambda_j$ satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $i_0 < i_{j,\beta}$;

(2) $\forall\, b \in U_0$, $\nu_{j,i_0}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f)$;

(3) $\forall\, i \in \Lambda_j$, $i_0 < i < i_{j,\beta}$, $\forall\, b \in U_0$,

$$v(\iota(\partial_{j,b} f) - in_v(\partial_{j,b} f)) - \nu(\partial_{j,b} f) > \beta - \varepsilon_{j,i} ;$$

(4) $\forall\, i \in \Lambda_j$, $i_0 < i < i_{j,\beta}$, $\forall\, b \in \{0, ..., \overline{b}\} \setminus U_0$,

$$\nu(\partial_{j,b} f) + b\varepsilon_{j,i} > \lambda(f, \beta).$$

Enfin, notons :

$$\Delta u_j = u_j[\beta] - u_j[\varepsilon_{j,i_0}];$$
$$\Delta u_j(\beta) = u_j(\beta) - u_j[\varepsilon_{j,i_0}].$$

Proposition II.36 — *Il existe deux polynômes* $F_\beta, \tilde{F}_\beta \in \mathcal{A}_{j,\beta}[X]$ *de la forme :*

$$F_\beta(X) = F_0 + \sum_{b \in U_0} in_v(\partial_{j,b} f) X^b;$$

$$\tilde{F}_\beta(X) = \tilde{F}_0 + \sum_{b \in U_0} in_v(\partial_{j,b} f) X^b;$$

tels que :

(1) $F_0, \tilde{F}_0 \in \mathcal{A}_{j,\beta}$;

(2) $\tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)] = F_\beta\left(\Delta u_j\right)$;

(3) $\iota_{j,\beta}(f)\,(\lambda(f,\beta)) = \tilde{F}_\beta\left(\Delta u_j(\beta)\right)$.

Preuve : Dans ce qui suit, on adoptera la convention $\varepsilon_{j,\Lambda_j} = \infty$, pour tout $j \in \{r+1, ..., n\}$. Supposons d'abord que $\beta \leqslant \varepsilon_{j,1}$, alors, $u_j[\beta] = \Delta u_j = 0$ et on pose $F_0 = 0$. Dans ce cas, (2) est trivialement montré et on procède de la même manière pour montrer (3).
Supposons que $\beta > \varepsilon_{j,1}$. Soit $\varepsilon \in \Gamma_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, notons $\partial_{j,b} f\left(u_j[\varepsilon_{j,i_0}]\right) = \iota_{j,\varepsilon_{j,i_0}+\varepsilon}(\partial_{j,b} f)$ et prenons le développement de Taylor de $\iota(f)$ en $u_j[\beta]$ en la j-ème variable. On peut alors écrire :

$$\tau_{j,\beta}(f) = \sum_{b \in \mathbb{N}} \partial_{j,b} f\left(u_j[\varepsilon_{j,i_0}]\right)\left(\Delta u_j\right)^b.$$

Par les points (3) et (4) dans le choix de i_0, les termes de la forme :

$$\left(\iota(\partial_{j,b} f) - in_v(\partial_{j,b} f)\right)\left(u_j[\varepsilon_{j,i_0}]\right)\left(\Delta u_j\right)^b, \text{ pour } b \in U_0;$$

$$\text{et } \partial_{j,b} f\left(u_j[\varepsilon_{j,i_0}]\right)\left(\Delta u_j\right)^b, \text{ pour } b \notin U_0;$$

n'interviennent pas dans $\tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)]$. Ainsi, à l'aide de la Proposition II.33, on a :

$$\tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)] - \sum_{b \in U_0} in_v(\partial_{j,b} f)\left(\Delta u_j\right)^b = \iota_{j,\varepsilon_{j,i_0}+\varepsilon}(f) \in \mathcal{A}_{j,\varepsilon_{j,i_0}+\varepsilon}\left[u_j\left(\varepsilon_{j,i_0} + \varepsilon\right)\right].$$

On en déduit donc que :

$$F_0 := \tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)] - \sum_{b\in U_0} in_v(\partial_{j,b}f)\,\left(\Delta u_j\right)^b \in \mathcal{A}_{j,\beta}.$$

De la même manière on montre, en faisant un développement de Taylor de $\iota(f)$ en $u_j(\beta)$, que :

$$\tilde{F}_0 := \iota_{j,\beta}(f)\,(\lambda(f,\beta)) - \sum_{b\in U_0} in_v(\partial_{j,b}f)\,\left(\Delta u_j(\beta)\right)^b \in \mathcal{A}_{j,\beta}.$$

Ainsi, (1), (2), et (3) sont démontrés. Pour conclure il suffit de montrer que :

$$\forall\, b \in U_0,\ in_v(\partial_{j,b}f) \in \mathcal{A}_{j,\beta}.$$

Soit $b \in U_0$ et notons $g = \partial_{j,b}f$. On pose $i_0(b) = \min\{i_0 \in \Lambda_j \mid \nu_{j,i_0}(g) = \nu(g)\}$. Par la Proposition II.19, on a :

$$\nu_{j,i_0(b)}(g) = \nu(g) \leqslant \nu(\partial_{j,q}g) + q\varepsilon_{j,i_0(b)},\ \forall\, q \in \mathbb{N}.$$

Par minimalité de $i_0(b)$, il existe $q > 0$ tel que l'on ait égalité dans l'inégalité précédente ; prenons alors le plus petit q de la sorte. Le choix d'un tel q entraîne que $\nu(\partial_{j,q}g) = \nu_{j,i_0(b)}(\partial_{j,q}g)$, en effet, sinon on aurait :

$$\nu_{j,i_0(b)}(g) \leqslant \nu_{j,i_0(b)}(\partial_{j,q}g) + q\varepsilon_{j,i_0(b)} < \nu(\partial_{j,q}g) + q\varepsilon_{j,i_0(b)} = \nu(g),$$

ce qui contredit le choix de q. Pour $\varepsilon \in \Gamma_1$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a :

$$\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right) = \nu(\partial_{j,q}g) + q\left(\varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right).$$

Fixons nous alors $\varepsilon \in \Gamma_1$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $in_v(\iota(g)) = \iota(g)\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right)$ et $\varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon < \min\{\beta, \varepsilon_{j,i_0(b)+1}\}$. Par la Proposition II.33, on en déduit que :

$$\begin{aligned} in_v(g) &= \iota(g)\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right)\\ &= \iota_{j,\varepsilon_{j,i_0(b)}+\varepsilon}(g)\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right)\\ &\in \mathcal{A}_{j,\varepsilon_{j,i_0(b)}+\varepsilon}\left[u_j\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right)\right] \subset \mathcal{A}_{j,\beta}. \end{aligned}$$

□

Proposition II.37 — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$ et $\beta \in \Gamma_1 \cup \{\infty\}$. Si $i_{j,\beta} < \Lambda_j$, alors $u_j(\beta)$ est entier sur $\mathcal{A}_{j,\beta}$ et une relation de dépendance intégrale est donnée par :*

$$\tilde{F}_0\left(\lambda\left(Q_{j,i_{j,\beta}}, \beta\right)\right) + \sum_{b\in U_0} in_v\left(\partial_{j,b}Q_{j,i_{j,\beta}}\right)\left(\Delta u_j(\beta)\right)^b = 0.$$

Preuve : Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma_1 \cup \{\infty\}$ et supposons que $i_{j,\beta} < \Lambda_j$. Par la Proposition II.36 et par construction des développements de Puiseux, on a :

$$\tilde{F}_\beta\left(\Delta u_j(\beta)\right) = \iota_{j,\beta}\left(Q_{j,i_{j,\beta}}\right)\left(\lambda\left(Q_{j,i_{j,\beta}}, \beta\right)\right) = 0.$$

De plus, $\max U_0 = d^{\circ}_{u_j}\left(Q_{j,i_{j,\beta}}\right)$ donc la relation précédente est bien une relation de dépendance intégrale.

□

Pour $j \in \{r+1,...,n\}$, notons $\mathcal{A}_j$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ engendré par $\mathcal{A}_{j-1,\infty}$ et tous les éléments de la forme $u_j(\varepsilon_{j,i})$, $i \in \Lambda_j$.

Corollaire II.38 — *Soit $j \in \{r+1,...,n\}$, pour tout $\beta \in \Gamma_1$ tel que $i_{j,\beta} < \Lambda_j$ on a :*

(1) $\mathcal{A}_{j,\beta}$ est une extension entière de $W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right]$;

(2) $\mathcal{A}_j$ est une extension entière de $W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right]$;

(3) $\mathcal{A}$ est une extension entière de $W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_n)\right]$.

Preuve : La première assertion découle de la construction des développements de Puiseux, la deuxième est une appliction immédiate de la Proposition II.37, enfin, la troisième provient des deux précédentes.

□

Proposition II.39 — *Soit $j \in \{r+1,...,n\}$, alors $\iota(u_j)$ est transcendant sur $W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right]$.*

Preuve : Soit $P(X) \in W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right][X] \setminus \{0\}$, on peut construire $f \in W\left[u_1,...,u_{j-1}\right] \setminus \{0\}$ tel que $\iota(f) = P\left(\iota(u_j)\right)$. Or $f \neq 0$ donc :

$$\nu(f) = v(\iota(f)) \in \Gamma.$$

Ainsi, $P(\iota(u_j)) = \iota(f) \neq 0$.

□

Corollaire II.40 — *Pour $j \in \{r+1,...,n\}$, $\iota(u_j)$ est transcendant sur $\mathcal{A}_j$.*

Preuve : Soit $P(X) \in \mathcal{A}_j[X] \setminus \{0\}$. Par le Corollaire II.38 (2), on sait que $\mathcal{A}_j$ est une extension entière de $W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right]$, il existe donc un $W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right]$-module de type fini contenu dans $\mathcal{A}_j$ et contenant tous les coefficients de P. On peut alors écrire :

$$P(X) = \sum_{b=1}^{c} P_b(X) a_{j,b}$$

où $a_{j,b} \in \mathcal{A}_j$ et $P_b(X) \in W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right][X]$, pour $b \in \{1,...,c\}$. Comme $P \neq 0$, il existe $b_0 \in \{1,...,c\}$ tel que $P_{b_0}(X) \neq 0$. Or, par la Proposition II.39, $\iota(u_j)$ est transcendant sur $W\left[\iota(p),\iota(u_1),...,\iota(u_{j-1})\right]$, donc $P_{b_0}\left(\iota(u_j)\right) \neq 0$ et donc $P\left(\iota(u_j)\right) \neq 0$.

□

5. Séries de Puiseux universelles

Par le Théorème I.5 de Cohen, on sait que si $(R,\mathfrak{m},k)$ est un anneau local régulier complet de dimension $n+1$, il possède un anneau de coefficients $\mathcal{R}$ tel que :

$$\mathcal{R} = \begin{cases} k & \text{si } car(R) = car(k) \\ W & \text{si } car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

où W est un anneau complet de valuation discrète de paramètre régulier p et de corps résiduel k. En notant $u = (u_1,...,u_{n+1})$ un système régulier de paramètres de R, on suppose que R est de la forme :

$$R = \mathcal{R}[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_{n+1}\right]\right],$$

avec :

$$\mathcal{R}[r] = \begin{cases} k\left[\left[u_1,...,u_r\right]\right] & \text{si } car(R) = car(k) \\ R[r] & \text{si } car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

où $R[r]$ est un anneau local régulier complet, éventuellement ramifié, de dimension r (remarquons que ce cas englobe le cas non-ramifié, en effet, si R est de caractéristique mixte et non-ramifié, on a $R[r] = W[[u_1, ..., u_r]]$ et $p = u_r$). Soit ν une valuation de K, centrée en R, de groupe des valeurs Γ, telle que $\nu_{|K_n}$ soit de rang 1 et telle que $\nu_{|\mathcal{R}[r]}$ soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres $(u_1, ..., u_r)$ de $\mathcal{R}[r]$ et de rang rationnel maximal. On note toujours Γ_1 le premier sous-groupe isolé non-nul de Γ.

Considérons $\{c_{j,\beta}\}_{(j,\beta)\in\{1,...,n+1\}\times\Gamma_+}$ des indéterminées et notons $\mathcal{L}$ l'anneau formé des éléments de la forme :

$$\sum_{\gamma} h_\gamma \prod_{j,\beta} c_{j,\beta}^{\gamma_{j,\beta}},$$

où $h_\gamma \in \mathcal{R}$, $\gamma = \{\gamma_{j,\beta}\}_{(j,\beta)\in\{1,...,n+1\}\times\Gamma_+} \in \mathbb{N}^{\{1,...,n+1\}\times\Gamma_+}$ tel qu'un nombre fini de $\gamma_{j,\beta}$ soient non-nuls.

Pour $j \in \{1, ..., n+1\}$, notons $U_j = \sum\limits_{\beta\in\Gamma_+} c_{j,\beta}$. On définit ainsi un morphisme d'anneaux $\phi : R \to \mathcal{L}$ par :

$$\forall\, a \in \mathcal{R},\ \phi(a) = a$$

$$\phi(u_j) = U_j,\ j \in \{1, ..., n+1\}.$$

et, pour $f = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha u^\alpha \in R$, avec $a_\alpha \in \mathcal{R}[r]$, α multi-indice de $\mathbb{N}^{n-r+1}$, $u^\alpha = u_{r+1}^{\alpha_{r+1}}...u_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, on pose :

$$\phi(f) = \sum_{\alpha} \phi(a_\alpha)\phi(u_1)^{\alpha_1}...\phi(u_c)^{\alpha_c},$$

où $\phi(a_\alpha)$ est défini en remplaçant u_i par U_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Pour $f \in R$, on peut alors écrire :

$$\phi(f) = \sum_{\beta\in\Gamma_+} f_\beta,$$

où f_β est une somme infinie de monômes en $c_{j,\beta'}$ de degré β. On pose alors :

$$\mathcal{I}(f) = \langle \{ f_\beta \mid \nu(f) > \beta \} \rangle,$$

$$\mathcal{I} = \left\langle \bigcup_{f\in R} \mathcal{I}(f) \right\rangle.$$

On note φ le morphisme d'anneaux $\varphi : R \to \mathcal{L}/\mathcal{I}$ induit par ϕ.

Propriété II.41 — *Pour tout développement de Puiseux $\iota : R \hookrightarrow A_R$, il existe un morphisme $\psi : \mathcal{L}/\mathcal{I} \to A_R$ tel que $\iota = \psi \circ \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_R \\ \mathcal{L}/\mathcal{I} \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve : Nous allons donner la preuve dans le cas mixte non-ramifié, dans le cas équicaractéristique, il suffit de remplacer p par t et W par k.
Soit $\iota : R \hookrightarrow A_R$ un développement de Puiseux (Théorème II.24). Pour $f \in R$, notons :

$$\iota(f) = \sum_{\beta\in S(f)} \iota(f)_\beta p^\beta,$$

où $S(f) = \{\beta \in \Gamma'_+ \mid \iota(f)_\beta \neq 0\}$ est, par définition, un ensemble bien ordonné.
On pose alors :

$$\psi(\overline{c_{j,\beta}}) = \iota(u_j)_\beta p^\beta,\ j \in \{1, ..., n+1\},$$
$$\psi(\overline{a}) = a, \forall\, a \in W,$$

où la notation $\overline{h}$ désigne la réduction d'un élément $h \in \mathcal{L}$ modulo $\mathcal{I}$.
Enfin, pour $h = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{\{1,...,n+1\} \times \Gamma_+}} h_\gamma \prod_{j,\beta} c_{j,\beta}^{\gamma_{j,\beta}} \in \mathcal{L}$, on définit ψ par :

$$\psi(\overline{h}) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{\{1,...,n+1\} \times \Gamma_+}} \psi(\overline{h_\gamma}) \prod_{j,\beta} \psi(\overline{c_{j,\beta}})^{\gamma_{j,\beta}}.$$

Ainsi, ψ est un morphisme et, pour $f \in R$, $\psi \circ \varphi(f) = \iota(f)$ et de plus, $v(\psi \circ \varphi(f)) = \nu(f)$.
$\square$

Remarque II.42 — Le morphisme ψ n'est pas unique dans le sens où le morphisme ι n'est pas unique. Lors de la construction de ι on a choisi de définir les développements de Puiseux des r premières variables $u_1, ..., u_r$ par $t^{\nu(u_1)}, ..., t^{\nu(u_r)}$ (ou $p^{\nu(u_1)}, ..., p^{\nu(u_r)}$ dans le cas mixte). On aurait pu définir ces développements de Puiseux par n'importe quelle série de la forme $\sum_{\beta \geqslant \nu(u_j)} a_{j,\beta} t^\beta$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$ (ou $\sum_{\beta \geqslant \nu(u_j)} a_{j,\beta} p^\beta$ dans le cas mixte) et faire la construction des autres séries comme dans la preuve du Théorème II.24. En définissant ψ de la même manière que dans la preuve de Propriété II.41, on obtient un morphisme d'évaluation différent tandis que la série de Puiseux universelle reste la même.

CHAPITRE III

Uniformisation locale en caractéristique nulle

Dans ce chapitre nous adaptons l'approche de Spivakovsky ([**S1**]) pour l'uniformisation locale des anneaux quasi-excellents équicaractéristiques au cas où le corps résiduel est de caractéristique nulle. Ce résultat a été demontré pour la première fois par Zariski en 1939 ([**Z1**]) dans le cas des les surfaces puis en toutes dimensions par Hironaka en 1964 ([**H1**]). Il a été redémontré par Villamayor en 1989 ([**Vi**]), Bierstone et Milman en 1990 ([**BM**]), Encinas et Villamayor en 2001 ([**EV**]), Encinas et Hauser en 2002 ([**EH**]), Włodarczyk en 2005 ([**W**]) et Temkin en 2008 ([**Tem1**]). L'intérêt d'écrire cette preuve dans le cas de caractéristique nulle nous permet de nous rendre compte des difficultés de la caractéristique positive et mixte. L'algorithme consiste à désingulariser l'idéal premier implicite qui est en fait engendré par un polynôme unitaire. On se rend alors compte qu'il suffit de monomialiser les polynômes-clés, qui deviennent des coordonnées après éclatement, pour avoir le résultat. Toute la difficulté consiste alors à monomialiser le premier polynôme-clé limite, polynôme qui n'existe pas en caractéristique nulle.

1. Polynômes-clés en caractéristique nulle

Reprenons les notations de la Section 2 du Chapitre II. On considère $K \hookrightarrow K(x)$ une extension de corps simple et transcendante. Soit μ' une valuation de $K(x)$, notons $\mu := \mu'_{|K}$. On note G le groupe des valeurs de μ' et G_1 celui de μ. On suppose de plus que μ est de rang 1, que $\mu'(x) > 0$ et $car\left(k_\mu\right) = 0$.
Par le Théorème II.10, on sait qu'il existe un ensemble 1-complet de polynômes-clés $\mathbf{Q} = \{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ et que le type d'ordre de Λ est au plus $\omega \times \omega$. Si $car\left(k_\mu\right) = 0$, on va voir que le type d'ordre de Λ est au plus ω et par conséquent qu' il n'y a pas de polynôme-clé limite. Pour tout $i \in \Lambda$, notons $\beta_i = \mu'(Q_i)$.

La construction des polynômes-clés se fait par récurrence (voir [**S1**], §9 et [**HGOAS**]). Pour $l \in \mathbb{N}^*$ on construit donc un ensemble de polynômes clés $\mathbf{Q}_{l+1} = \{Q_i\}_{1\leqslant i\leqslant l}$; deux cas se présentent :

(1) $\exists\, l_0 \in \mathbb{N}$, $\beta_{l_0} \notin G_1$;

(2) $\forall\, l \in \mathbb{N}$, $\beta_l \in G_1$.

Dans le cas (1), on stoppe la construction. L'ensemble $\mathbf{Q}_{l_0} = \{Q_i\}_{1\leqslant i\leqslant l_0-1}$ est par définition un ensemble 1-complet de polynômes-clés et $\Lambda = \{1, ..., l_0 - 1\}$. Remarquons de plus que l'ensemble $\mathbf{Q}_{l_0+1}$ est quant à lui un ensemble complet de polynômes-clés.
Dans le cas (2), l'ensemble $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ est infini et $\Lambda = \mathbb{N}^*$. Les propositions qui suivent nous assurent que dans ce cas, l'ensemble des polynômes-clés obtenu est également 1-complet.

Proposition III.1 — ([**S1**], *Proposition 9.30) Supposons que l'on ait construit un ensemble infini de polynômes-clés* $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ *tel que, pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$, $\beta_i \in G_1$. *Supposons de plus que la suite* $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ *n'est pas bornée dans* G_1. *Alors, l'ensemble de polynômes-clés* $\mathbf{Q}_\omega$ *est 1-complet.*

Preuve : Il suffit de montrer que, pour tout $\beta \in G_1$ et pour tout $h \in K[x]$ tels que $\mu'(h) = \beta$, h est dans le R_μ-sous-module de $K[x]$ engendré par tous les monômes de la forme $a\prod_{j=1}^{s} Q_{i_j}^{\gamma_j}$, $a \in K$, tels que $\mu'\left(a\prod_{j=1}^{s} Q_{i_j}^{\gamma_j}\right) \geqslant \beta$.

Considérons donc $h \in K[x]$ tel que $\mu'(h) \in G_1$. En notant $h = \sum_{j=0}^{d} h_j x^j$, on peut supposer, sans perte de généralité, que :

$$\forall\, j \in \{0, ..., d\},\ \mu(h_j) \geqslant 0.$$

En effet, dans le cas contraire, il suffit de multiplier h par un élément de K choisi convenablement.
Comme la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas bornée dans G_1, il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mu'(h) < \beta_{i_0}.$$

Notons alors $h = \sum_{j=0}^{s_{i_0}} c_{j,i_0} Q_{i_0}^j$, le développement i_0-standard de h. Or, comme ce développement est obtenu par division euclidienne, vu le choix fait sur les coefficients de h et, comme la suite $\left\{\dfrac{\beta_i}{d^\circ(Q_i)}\right\}_{i\geqslant 1}$ est strictement croissante (il suffit de regarder le développement $(i-1)$-standard de Q_i), on montre facilement que :

$$\forall\, j \in \{0, ..., s_{i_0}\},\ \mu\left(c_{j,i_0}\right) \geqslant 0.$$

Rappelons que, par construction des polynômes-clés, pour $j \in \{0, ..., s_{i_0}\}$, $\mu'_{i_0}\left(c_{j,i_0}\right) = \mu'\left(c_{j,i_0}\right)$. On en déduit alors que :

$$\forall\, j \in \{1, ..., s_{i_0}\},\ \mu'\left(c_{j,i_0} Q_{i_0}^j\right) = \mu'_{i_0}\left(c_{j,i_0} Q_{i_0}^j\right) > \mu'(h).$$

Ainsi, $\mu'(h) = \mu'\left(c_{0,i_0}\right)$ et donc, h est une somme de monômes en $\mathbf{Q}_{i_0+1}$ de valuation au moins $\mu'(h)$ (et en particulier, $\mu'_{i_0}(h) = \mu'(h)$).

$\square$

Comme dans la sous-section 2.2 du Chapitre II, on note :

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_i = d^\circ_{Q_{i-1}}(Q_i),\ \forall\, i \geqslant 2.$$

On considère alors deux cas :

(1) $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} = +\infty$;

(2) $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} < +\infty$.

Dans le cas (1), à l'aide de la Proposition III.2, on montre que l'ensemble infini de polynômes-clés est toujours 1-complet, indépendamment de la caractéristique de k_μ. Dans le cas (2), si la caractéristique de k_μ est nulle et si l'ensemble de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas complet, on montre dans la Proposition III.3 que la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est jamais bornée. Dans ce cas-là, grâce à la Proposition III.1, on en déduit que l'ensemble de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ est également 1-complet.

Proposition III.2 — *([S1], Proposition 11.2) Supposons que l'on ait construit un ensemble infini de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\beta_i \in G_1$. Supposons de plus que l'ensemble $\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\}$ est infini. Alors, $\mathbf{Q}_\omega$ est un ensemble 1-complet de polynômes-clés.*

Preuve : Soit $h \in K[x]$, comme on a vu dans la preuve de la Proposition III.1, il suffit de montrer que $\mu'_i(h) = \mu'(h)$ pour un certain $i \geqslant 1$. Or, si on note :

$$\delta_i(h) = d^\circ\left(in_i(h)\right),$$

où :

$$in_i(h) = \sum_{j \in S_i(h,\beta_i)} in_{\mu'}\left(c_{j,i}\right) X^j,$$

$$S_i(h,\beta_i) = \{j \in \{0,...,s_i\} \mid j\beta_i + \mu'\left(c_{j,i}\right) = \mu'_i(h)\},$$

$$h = \sum_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j,$$

par le (1) de la Proposition 37 de **[HGOAS]** (Proposition 11.2 de **[S1]**), on a :

$$\alpha_{i+1}\delta_{i+1}(h) \leqslant \delta_i(h),\ \forall\, i \geqslant 1.$$

On en déduit qu'à chaque fois que $\delta_i(h) > 0$ et $\alpha_{i+1} > 0$:

$$\delta_{i+1}(h) < \delta_i(h), \forall\, i \geqslant 1.$$

Comme l'ensemble $\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\}$ est infini et que l'inégalité précédente ne peut se produire une infinité de fois, on en conclut qu'il existe un $i_0 \geqslant 1$ tel que $\delta_{i_0}(h) = 0$ et donc que $\mu'_{i_0}(h) = \mu'(h)$.

□

À partir de maintenant, on suppose que l'on a construit un ensemble infini de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i \geqslant 1}$ tel que $\alpha_i = 1$, pour tout i suffisamment grand. Ainsi pour ces i, on a :

$$Q_{i+1} = Q_i + z_i,$$

où z_i est un développement i-standard homogène, de valuation β_i, n'impliquant pas Q_i.

Proposition III.3 — *(***[S1]***, Proposition 12.8) Supposons que l'on ait construit un ensemble infini de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i \geqslant 1}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\beta_i \in G_1$. Supposons de plus qu'il existe $h \in K[x]$ tel que, pour tout $i \geqslant 1$:*

$$\mu'_i(h) < \mu'(h).$$

Alors, comme car $\left(k_\mu\right) = 0$, la suite $\{\beta_i\}_{i \geqslant 1}$ n'est pas bornée dans G_1.

Preuve : Par la Proposition 37 de **[HGOAS]** (Proposition 11.2 de **[S1]**), la suite $\{\delta_i(h)\}_{i \geqslant 1}$ est décroissante, il existe donc $i_0 \geqslant 1$ tel que $\delta_{i_0+t}(h) = \delta_{i_0}(h)$, pour tout $t \in \mathbb{N}$. Notons δ cette valeur commune. Si on note $h = \sum\limits_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j$ le développement i-standard de h pour $i \geqslant i_0$, alors, par la Proposition 37 de **[HGOAS]** (Proposition 11.2 de **[S1]**), $\mu'_i(h) = \delta\beta_i + \mu'\left(c_{\delta,i}\right)$ et $\mu'\left(c_{\delta,i}\right)$ sont indépendants de i. Il suffit donc de montrer que la suite $\{\mu'_i(h)\}_{i \geqslant 1}$ n'est pas bornée.
Notons :

$$\mu_i^+(h) = \min\left\{\mu'\left(c_{j,i} Q_i^j\right) \,\middle|\, \delta < j \leqslant s_i\right\},$$

$$\varepsilon_i(h) = \min\left\{j \in \{\delta+1,...,s_i\} \,\middle|\, \mu'\left(c_{j,i} Q_i^j\right) = \mu_i^+(h)\right\}.$$

Toujours par la Proposition 37 de **[HGOAS]** (Proposition 11.2 de **[S1]**), la suite $\{\varepsilon_i(h)\}_{i \geqslant i_0}$ est décroissante, il existe donc $i_1 \geqslant i_0$ tel que cette suite soit constante à partir de i_1. Notons alors $c^*_{\delta,i_1} \in K[x]$ l'unique polynôme de degré strictement inférieur

à $d^\circ(Q_{i_0}) = d^\circ(Q_{i_1})$ tel que $c^*_{\delta,i_1}c_{\delta,i_1} - 1$ soit divisible par Q_{i_1} dans $K[x]$. On peut montrer que $\mu'_i\left(c^*_{\delta,i_1}\right) = \mu'\left(c^*_{\delta,i_1}\right)$, pour tout $i \geqslant i_1$. Multiplier h par c^*_{δ,i_1} n'affecte pas δ, donc multiplier h par c^*_{δ,i_1} ne change rien au problème. On peut donc supposer que $in_{\mu'}(c_{\delta,i}) = in_{\mu'_i}(c_{\delta,i}) = 1$ pour tout $i \geqslant i_1$.
Supposons que $h = Q_{i_1+1}$, rappelons que nous sommes dans la situation où $Q_{i+1} = Q_i + z_i$, pour $i \geqslant i_1 \geqslant i_0$. Les z_i n'étant pas uniques, un choix possible de z_i, pour $i = i_1$, est :

$$z_{i_1} = \frac{c_{\delta-1,i_1}}{\delta}.$$

Par définition de z_{i_1}, $\mu'(z_{i_1}) = \beta_{i_1}$ et $\beta_{i_1} < \beta_{i_1+1}$. Par récurrence sur $t \in \mathbb{N}$, on construit Q_{i_1+t}.
Il faut tout de même montrer que la propriété « $\{\mu'(Q_i + z_i + ... + z_l)\}_l$ n'est pas bornée » ne dépend pas du choix des $z_i, ..., z_l$, $i \leqslant l$. En effet, supposons que l'on ait construit une autre suite de la forme $\{\mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'})\}_{l'}$. Si pour tout l, il existe l' tel que $\mu'(Q_i + z_i + ... + z_l) < \mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'})$ alors la suite $\{\mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'})\}_{l'}$ ne peut pas être bornée car sinon la suite $\{\mu'(Q_i + z_i + ... + z_l)\}_l$ le serait ce qui contredit l'hypothèse de départ. Supposons donc qu'il existe l tel que, pour tout l', $\mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'}) < \mu'(Q_i + z_i + ... + z_l)$. Par la Proposition 9.29 de **[S1]**, il existe un développement $Q_i + z'_i + ... + z'_{l'} + z''_{l'+1} + ... + z''_{l''}$ tel que $Q_i + z''_i + ... + z''_{l''} = Q_i + z_i + ... + z_l$. Ainsi, on peut construire une troisième suite qui n'est pas bornée.
Comme $car(k_\mu) = 0$, le sous-corps premier de K est $\mathbb{Q}$, considérons alors A la $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de K engendrée par tous les coefficients de Q_{l_1}, on a donc que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $Q_{i_1+t} \in A[x]$. L'anneau A étant noethérien, l'anneau $A[x]$ l'est aussi. La valuation $\mu'_{|A[x]}$ est alors centrée en $A[x]$ et $\left\{\mu'_{|A[x]}(Q_{i_1+t})\right\}_{t\in\mathbb{N}} \subset G_1$, G_1 étant de rang 1. En appliquant le Lemme I.48, on en déduit que la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ ne peut être bornée dans G_1.

$\square$

Corollaire III.4 — *Si $car(k_\mu) = 0$, il existe un ensemble 1-complet de polynômes-clés $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ tel que Λ est, soit un ensemble fini, soit $\mathbb{N}^*$. En particulier, il n'y a pas de polynômes-clés limites pour des valuations de rang 1 en caractéristique nulle.*

Preuve : On applique le processus de construction de **[S1]**, §9 et **[HGOAS]**. S'il existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\beta_{i_0} \notin G_1$, on pose $\Lambda = \{1, ..., i_0 - 1\}$ et, par définition, $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ est 1-complet. Sinon, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in G_1$ et on pose alors $\Lambda = \mathbb{N}^*$. Si $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} = +\infty$, par la Proposition III.2, l'ensemble $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ est 1-complet. Si $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} < +\infty$, par la Proposition III.3, la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas bornée dans G_1 et donc, par la Proposition III.1, l'ensemble $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ est un ensemble 1-complet de polynômes-clés.

$\square$

2. Théorèmes de monomialisation

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet de dimension n avec $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n)$. Soient ν une valuation de $K = Frac(R)$, centrée en R, de groupe des valeurs Γ et Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ. On note :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

H est un idéal premier de R (voir Preuve du Théorème III.17). On suppose de plus que :

$$n = e(R, \nu) = emb.dim\,(R/H),$$

c'est-à-dire que :

$$H \subset \mathfrak{m}^2.$$

On note également $r = r(R, u, \nu) = \dim_{\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\nu(u_i) \right)$.

La valuation ν est unique si $ht(H) = 1$, cas auquel on va se ramener grâce au Corollaire III.10. C'est la composée de la valuation $\mu : L^* \to \Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L = Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta : K^* \to \Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta \simeq \kappa(H)$. Par abus de notations, pour $f \in R$, on notera $\mu(f)$ au lieu de $\mu(f \mod H)$.

2.1. Suites formelles encadrées.

Définition III.5 — *Soit $(R, u, k) \to (R', u', k')$ une suite locale encadrée, on note H'_0 le transformé strict de H dans R'. On dit que μ est **centrée** en R' si μ est centrée en R'/H'_0. Dans ce cas, on dit que la suite locale encadrée est une **suite locale encadrée par rapport à μ**.*

Définition III.6 — *Soit $(R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ un éclatement local encadré. Le morphisme induit par complétion formelle est appelé un **éclatement formel encadré par rapport à μ**.*
Soient $\widehat{K^{(1)}} = Frac\left(\widehat{R^{(1)}}\right)$, $H^{(0)}$ le transformé strict de H dans $R^{(1)}$ et $\overline{H}^{(1)}$ l'idéal premier implicite de $\widehat{R^{(1)}}/H^{(0)}\widehat{R^{(1)}}$.
*On appelle **transformé** de H dans $\widehat{R^{(1)}}$, noté $H^{(1)}$, la préimage de $\overline{H}^{(1)}$ dans $\widehat{R^{(1)}}$.*
*Enfin, on appelle **valuation induite par μ** en $\widehat{R^{(1)}}$, notée $\mu^{(1)}$, l'unique extension de μ de $\kappa(H)$ à $\kappa\left(H^{(1)}\right)$, centrée en $\widehat{R^{(1)}}/H^{(1)}$ et donnée par le Théorème I.67.*

Définition III.7 — *Une suite de morphismes locaux :*

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

*est appelée une **suite formelle encadrée par rapport à μ** si, la suite :*

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right)$$

est une suite formelle encadrée par rapport à μ et π_{l-1} est un éclatement formel encadré par rapport à la valuation $\mu^{(l-1)}$, induite par μ sur $R^{(l-1)}$.

Pour tout éclatement local encadré de la forme $(R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$, on définit une valuation $\nu^{(1)}$ centrée en $\widehat{R^{(1)}}$ comme suit : fixons une valuation $\theta^{(1)}$ de $\widehat{K^{(1)}}$, centrée en $\left(\widehat{R^{(1)}}\right)_{H^{(1)}}$ et telle que $k_{\theta^{(1)}} \simeq \kappa\left(H^{(1)}\right)$. On pose alors $\nu^{(1)} = \theta^{(1)} \circ \mu^{(1)}$.
Etant donné une suite formelle encadrée :

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right) ;$$

on peut, par récurrence sur $1 \leqslant i \leqslant l-1$, construire une valuation $\mu^{(i)}$, centrée en $R^{(i)}$ telle que le plus petit sous-groupe non-nul du groupe des valeurs de $\nu^{(i)}$ soit Γ_1 et définir le transformé de H dans $R^{(i)}$, noté $H^{(i)}$. Par construction, on a :

$$H^{(i)} = \{f \in R^{(i)} \mid \nu^{(i)}(f) \notin \Gamma_1\}.$$

Rappelons alors les notations de la Définition I.87 dans ce cadre :

$$e\left(R^{(i)}, \nu^{(i)}\right) = emb.dim\left(R^{(i)}/H^{(i)}\right);$$

$$r\left(R^{(i)},u^{(i)},\nu^{(i)}\right)=\dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\mathbb{Q}\nu^{(i)}\left(u_j^{(i)}\right)\right),$$

où $u^{(i)}=(u_1^{(i)},...,u_{n_i}^{(i)})$.

On note $\nu_{0,u}$ la valuation monomiale centrée en R et associée à $u=(u_1,...,u_n)$ et à $\nu(u_1),...,\nu(u_n)$. Par la Remarque I.52, pour tout $f\in R$, on a :

$$\nu_{0,u}(f)\leqslant\nu(f).$$

Remarque III.8 — Supposons que $n=r$. Pour une suite formelle encadrée de la forme :

$$(R,u)\xrightarrow{\pi_0}\left(R^{(1)},u^{(1)}\right)\xrightarrow{\pi_1}\cdots\xrightarrow{\pi_{l-2}}\left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right)\xrightarrow{\pi_{l-1}}\left(R^{(l)},u^{(l)}\right),$$

on note $\nu_{0,u^{(l)}}$ la valuation monomiale centrée en $R^{(l)}$ associée à $u^{(l)}$ et à $\nu^{(l)}\left(u_1^{(l)}\right),...,\nu^{(l)}\left(u_n^{(l)}\right)$.
Si $f\in H\setminus\{0\}$, alors :

$$\nu_{0,u^{(l)}}(f)<\nu(f),$$

pour toute suite formelle encadrée de la forme précédente et telle que :

$$\nu^{(l)}\left(u_1^{(l)}\right),...,\nu^{(l)}\left(u_n^{(l)}\right)\in\Gamma_1.$$

Ainsi, comme $\nu_{0,u^{(l)}}(f)\in\Gamma_1$ et $\nu(f)\notin\Gamma_1$, on en déduit que $H^{(i)}=(0)$, pour tout i.

2.2. L'idéal premier implicite est engendré par un polynôme unitaire.

Proposition III.9 — *Reprenons les hypothèses précédentes et supposons de plus que* $car(k_\nu)=0$. *R est alors de caractéristique 0 et, par le Théorème I.5 de Cohen, on peut supposer que R s'écrit sous la forme :*

$$R=k\left[\left[u_1,...,u_n\right]\right].$$

Notons $R_{n-1}=k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]$ et supposons que $H\not\subset R_{n-1}$ et $H\cap R_{n-1}=(0)$.
Soit $f\in H\setminus\{0\}$. À une suite formelle encadrée près, f s'écrit sous la forme :

$$f=\alpha f_{n-1}P;$$

où $\alpha\in R^\times$, $f_{n-1}\in R_{n-1}$ et P est un polynôme unitaire en u_n.

Preuve : La valuation μ de rang 1 centrée en R/H induit une valuation de rang 1 centrée en R_{n-1}.
Soit $f\in H$, $f\neq 0$, on peut écrire $f=\sum\limits_{j\geqslant 0}b_ju_n^j$, avec $b_j\in R_{n-1}$. Par hypothèse, on peut supposer qu'il existe $j\geqslant 0$ tel que $b_j\notin H\cap R_{n-1}$. On pose alors :

$$\beta=\min_{j\geqslant 0}\{\mu(b_j)\mid b_j\notin H\cap R_{n-1}\}.$$

Soit d le plus petit entier naturel tel que $\mu(b_d)=\beta$ (donc $b_d\notin H\cap R_{n-1}$).
Soit $N\geqslant d$ un entier naturel non-nul tel que, pour tout $j>N$,

$$b_j\in(b_0,...,b_N).$$

Soit $j\in\{0,...,N\}$, comme, par hypothèses, R_{n-1} est un anneau local, régulier et complet, on peut appliquer le Théorème I.99 à cet anneau, muni de la valuation μ et à l'élément b_j. Il existe donc une suite locale encadrée :

$$\pi:(R_{n-1},(u_1,...,u_{n-1}))\to...\to\left(R',(u_1',...,u_{n-1}')\right)$$

telle que b_j est un monôme en $(u'_1,...,u'_{n-1})$ (multiplié par une unité de R'). En passant à chaque pas de la suite au complété formel, on obtient une suite formelle encadrée telle que b_j est un monôme en $(u'_1,...,u'_{n-1})$ (multiplié par une unité de R').
De plus, par le (1) de la Proposition I.79, la propriété d'être un monôme fois une unité est préservée pour tous les éclatements encadrés suivants. Ainsi, on peut choisir π de telle sorte que les $b_0,...,b_N$ soient simultanéments des monômes en $(u'_1,...,u'_{n-1})$.
Par les choix de β et de d et par le Corollaire I.96, après une suite locale encadrée de plus, on peut se ramener à la situation où b_d divise b_j, $0 \leqslant j \leqslant N$ et donc, b_d divise b_j pour tout $j \geqslant 0$.
Ainsi, $\dfrac{f}{b_d} \in R'[[u_n]]$ et satisfait les hypothèses du théorème de préparation de Weierstrass ([**L**], Théorème 4.9.2).

□

Corollaire III.10 — *Sous les mêmes hypothèses que la Proposition III.9, on a :*

$$ht\,(H) \leqslant 1.$$

Preuve : Si $H=(0)$, il n'y a rien à montrer. Sinon, prenons $f \in H$ tel que $f \neq 0$. Comme la hauteur de H est croissante lorsque l'on fait des suites locales ou formelles encadrées, (Corollaire I.72), par la Proposition III.9, on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u_n à coefficients dans R_{n-1}. Ainsi, l'extension d'anneaux :

$$\sigma : R_{n-1} \hookrightarrow R_{n-1}\,[[u_n]]\,/\,(f)$$

est finie. La préimage de l'idéal $H/\,(f)$ par σ est (0). Comme la hauteur est préservée par les extensions finies d'anneaux ([**Mat1**], Théorème 20), on a :

$$ht\,(H/(f)) = ht((0)) = 0.$$

Ainsi, $ht\,(H) = 1$.

□

Corollaire III.11 — *Sous les hypothèses de la Proposition III.9, à une suite formelle encadrée près, l'idéal H est principal engendré par un polynôme unitaire en u_n.*

Preuve : C'est une conséquence directe du Corollaire III.10.

□

2.3. Un premier théorème de monomialisation.

Théorème III.12 — *Sous les hypothèses de la Proposition III.9, deux cas se présentent :*

(1) Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite formelle encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$\left(e\left(R^{(l)},\nu^{(l)}\right), e\left(R^{(l)},\nu^{(l)}\right) - r\left(R^{(l)},u^{(l)},\nu^{(l)}\right)\right) <_{lex} (e(R,\nu), n-r)\,.$$

(2) Ou bien $H = (0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite formelle encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ fois une unité de $R^{(l)}$.

Preuve : On procède par récurrence sur $n-r$. Si $n=r$ alors $\nu(u_1),...,\nu(u_n)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants et donc, tout $f \in R$ contient un unique monôme de valuation minimale. En particulier,

$$\forall f \in R,\ \nu_{0,u}(f) = \nu(f).$$

Par la Remarque III.8, $H=(0)$. Prenons alors un élément $f \in R$, par le Théorème I.99, il existe une suite locale encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{i-2}} \left(R^{(i-1)},u^{(i-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{i-1}} \left(R^{(i)},u^{(i)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(i)}$ fois une unité de $R^{(i)}$. En passant au complété à chaque pas, on obtient la suite formelle encadrée satisfaisant (2).

Supposons que $n-r>0$ et que l'on a déjà construit une suite formelle encadrée pour toutes les valeurs strictements plus petites et satisfaisant la conclusion du Théorème III.12.
Soit $\left(R^{(i)},\mathfrak{m}^{(i)},k^{(i)}\right)$ un anneau local apparaissant dans une suite formelle encadrée. Par le Théorème I.5 de Cohen, on peut supposer que :

$$R^{(i)} = k^{(i)}\left[\left[u_1^{(i)},...,u_{n_i}^{(i)}\right]\right].$$

Dans un premier temps, montrons que l'on peut toujours se ramener aux hypothèses suivantes :

$$H^{(i)} \cap R^{(i)} = (0)\,, n_i = n,\ r_i = r,$$

où $r_i = r\left(R^{(i)},u^{(i)},\nu^{(i)}\right)$. En effet, si pour un certain i, on a :

$$H^{(i)} \cap R^{(i)} \neq (0),$$

en notant :

$$R_{n_i-1}^{(i)} = k^{(i)}\left[\left[u_1^{(i)},...,u_{n_i-1}^{(i)}\right]\right] \text{ et } \overline{u}^{(i)} = \left(u_1^{(i)},...,u_{n_i-1}^{(i)}\right),$$

on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur $n-r$ pour construire une suite formelle encadrée :

$$\left(R_{n_i-1}^{(i)},\overline{u}^{(i)}\right) \longrightarrow \left(R_{n_i-1}^{(i,1)},\overline{u}^{(i,1)}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(R_{n_i-1}^{(i,l)},\overline{u}^{(i,l)}\right)$$

telle que $e\left(R_{n_i-1}^{(i,l)},\nu^{(i,l)}\right) < e\left(R_{n_i-1}^{(i)},\nu^{(i)}\right) = n_i - 1$. Notons alors :

$$R^{(j)} = R_{n_i-1}^{(i,j)}\left[\left[u_{n_i}^{(i)}\right]\right],\ 1 \leqslant j \leqslant l,$$

on obtient une suite formelle encadrée :

$$(R,u) \longrightarrow \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \longrightarrow \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$e\left(R^{(l)},\nu^{(l)}\right) < e\left(R^{(i)},\nu^{(i)}\right) \leqslant e(R,\nu).$$

De même, s'il existe un i tel que $n_i < n$ ou $r_i > r$, la suite formelle encadrée recherchée est déjà construite et il n'y a rien à faire.

Ainsi, on peut supposer que, pour tous les anneaux $R^{(i)}$ apparaissant dans n'importe quelle suite formelle encadrée :

$$n_i = n,\ r_i = r,\ H^{(i)} \cap R^{(i)} = (0).$$

En particulier, $\nu^{(i)}_{|R^{(i)}_{n_i-1}}$ est de rang 1 et $e\left(R^{(i)}_{n_i-1},\mu^{(i)}\right)=n-1=e\left(R_{n-1},\mu\right)$.
En appliquant le Corollaire III.11 à chaque anneau $R^{(i)}$, on peut supposer, à une suite formelle encadrée près, que pour tout i, l'idéal $H^{(i)}$ est principal engendré par un polynôme unitaire en $u_n^{(i)}$.
Remarquons qu'il existe alors une unique valuation $\theta^{(i)}$ centreée en $\left(R^{(i)}\right)_{H^{(i)}}$ (c'est la valuation triviale si $ht\left(H^{(i)}\right)=0$ et la valuation discrète centrée en $\left(R^{(i)}\right)_{H^{(i)}}$ si $ht\left(H^{(i)}\right)=1$). Ainsi, l'extension $\nu^{(i)}$ de ν à $R^{(i)}$ est déterminée de manière unique.

Pour achever la preuve du Théorème III.12, il suffit d'obtenir le résultat pour des polynômes en u_n.

2.4. Monomialisation des polynômes.

Proposition III.13 — *Sous les hypothèses du Théorème III.12, pour tout polynôme $f\in k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]$, il existe une suite formelle encadrée $(R,u)\to(R',u')$ telle que f soit un monôme en u' fois une unité de R'. Supposons de plus que f soit irréductible dans $k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]\left[\left[u_n\right]\right]$, la suite formelle encadrée précédente peut alors être choisie de telle sorte que u'_n divise f et u'^2_n ne divise pas f dans R'.*

Preuve du Théorème III.12 en supposant la Proposition III.13 vraie :
Si $H\neq(0)$, prenons $f\in H\cap k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]$, $f\neq 0$; sinon, prenons $f\in k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]\setminus\{0\}$. Par hypothèses, il existe une suite formelle encadrée $(R,u)\to(R',u')$ telle que f soit un monôme en u' fois une unité de R'. Notons H' le transformé de H dans R'.
Si $H\neq(0)$, alors, par définition, $\nu(f)\notin\Gamma_1$ et donc, il existe un j tel que $\nu(u'_j)\notin\Gamma_1$, c'est-à-dire, $u'_j\in H'$. Ainsi, $e(R',\nu)\leqslant n-1<n=e(R,\nu)$ et on est dans la situation (1) du Théorème III.12. Si $H=(0)$ et $f\in k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]\setminus\{0\}$, on se retrouve dans la situation (2) par hypothèses.
Enfin, si $H=(0)$ et $f\in R\setminus\{0\}$, non-nécessairement un polynôme en u_n, écrivons $f=f'+f''$ avec $\nu_{0,u}(f'')>\nu(f)$ (et donc $\nu(f)=\nu(f')$). Par le cas polynomial vu avant, il existe une suite formelle encadrée $(R,u)\to(R',u')$ telle que f' soit un monôme en u' multiplié par une unité de R'. Or $\nu_{0,u'}(f'')\geqslant\nu_{0,u}(f'')>\nu(f)=\nu(f')$. Par le Corollaire I.96, quitte à compléter, il existe une suite formelle encadrée $(R',u')\to(R'',u'')$ telle que f soit un monôme en u'' multiplié par une unité de R''.

□

Preuve de la Proposition III.13 : On va montrer le résultat par récurrence sur le degré de f. Si $d^\circ_{u_n}(f)=1$, la Proposition III.13 est alors évidente.
Soit $f\in k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]$ de degré $d>1$. Par hypothèse de récurrence on suppose que la Proposition III.13 est vraie pour tout polynôme de degré strictement inférieur à d.
Par le Corollaire III.4, comme $car\,(k_\nu)=0$, il existe $i\in\mathbb{N}^*$ tel que $\nu(f)=\nu_{n,i}(f)$. Ceci veut dire qu'il existe un développement (n,i)-standard de f de la forme :

$$f=\sum_{j=0}^{N}c_jQ^j_{n,i},$$

où les c_j sont des développements (n,i)-standards n'impliquant pas $Q_{n,i}$ et $\nu(f)=\nu_{n,i}(f)$.

On rappelle que pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $\alpha_{n,i} = d^{\circ}_{Q_{n,i-1}}(Q_{n,i})$.
Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_{n,l} > 1$, prenons alors ce l. S'il n'en existe pas, prenons un l suffisamment grand tel que $f = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j Q_{n,l}^j$ et $\nu(f) = \nu_{n,l}(f)$. Dans tous les cas, par définition des polynômes-clés et par le Corollaire III.4, $l < \omega$.

Pour achever la preuve de la Proposition III.13, il nous suffit donc d'obtenir le résultat voulu sur les polynômes-clés comme nous allons le voir dans la sous-section 2.5 et la Proposition III.14.

2.5. Monomialisation des polynômes-clés.

Proposition III.14 — *Sous les hypothèses du Théorème III.12, il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R,u) \to (R',u')$$

où $u = (u_1, ..., u_n)$, $u' = (u'_1, ..., u'_n)$, vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant q \leqslant l$, $Q_{n,q}$ est un monôme en u' fois une unité de R' ;

(2) Dans R', u'_n divise $Q_{n,l}$ mais u'^2_n ne divise pas $Q_{n,l}$.

Preuve de la Proposition III.13 en supposant la Proposition III.14 vraie :
Par hypothèse de récurrence sur $n - r$, n'importe quelle collection d'éléments de $k((u_1, ..., u_{n-1}))$ peut être transformée simultanément en monômes via une suite formelle encadrée. De plus, en appliquant $n - r - 1$ fois la Proposition I.100, on peut supposer que seuls les $u'_1, ..., u'_r$ apparaissent dans ces monômes.
Si $\alpha_{n,l} = 1$, on applique la Proposition I.100 à chaque polynôme-clé $Q_{n,1}, ..., Q_{n,l}$ et la Proposition III.13 est démontrée.
Supposons que $\alpha_{n,l} > 1$. Notons $f = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j u_n^j$, $a_j \in k[[u_1, ..., u_{n-1}]]$. Soit j_0 le plus grand $j \in \{0, ..., d\}$ tel que $\nu(a_{j_0}) = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant d}\{\nu(a_j)\}$. Par le Corollaire I.96, après une suite locale encadrée indépendante de u_n, et quitte à compléter, on peut supposer que a_{j_0} divise a_j, pour tout $j \in \{0, ..., d\}$. En appliquant le théorème de préparation de Weierstrass ([**L**], Théorème 4.9.2), on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u_n de degré d.
Soit $f = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j Q_{n,l}^j$, $N = \left\lfloor \dfrac{d}{\alpha_{n,l}} \right\rfloor$, le développement (n,l)-standard de f. Par la Proposition III.14, il existe une suite formelle encadrée telle que le développement (n,l)-standard de f dans R' soit de la forme $\sum\limits_{j=0}^{N} c'_j u'^j_n$, $c'_j \in k'\left[\left[u'_1, ..., u'_{n-1}\right]\right]$, multiplié par une unité de R'.
Notons j'_0 le plus grand $j \in \{0, ..., N\}$ tel que $\nu(c'_{j'_0}) = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant N}\{\nu(c'_j)\}$. Toujours par le Corollaire I.96, après une suite locale encadrée indépendante de u'_n, et quitte à compléter, on peut supposer que $c'_{j'_0}$ divise c'_j, pour tout $j \in \{0, ..., N\}$. En appliquant le théorème de préparation de Weierstrass ([**L**], Théorème 4.9.2), on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u'_n de degré inférieur ou égal à $N < d$. Pour conclure il nous suffit juste d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

□

Preuve de la Proposition III.14 : Comme $l \in \mathbb{N}^*$, le développement standard de

$Q_{n,l}$ est :

$$Q_{n,l}=Q_{n,l-1}^{\alpha_{n,l}}+\sum_{j=0}^{\alpha_{n,l}-1}\left(\sum_{\overline{\gamma}_{n,l-1}} c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}}\mathbf{Q}_{n,l-1}^{\overline{\gamma}_{n,l-1}}\right)Q_{n,l-1}^{j}.$$

Par hypothèse de récurrence, pour des valeurs strictement inférieures à $n-r$, il existe une suite formelle encadrée $(R,u)\to(R',u')$, indépendante de u_n telle que chaque élément $c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}}$ soit un monôme en $u'_1,...,u'_{n-1}$ multiplié par une unité de R'.
Pour chaque $j\in\{r+1,...,n-1\}$, appliquons la j-suite élémentaire uniformisante de la Remarque I.103, suivie à chaque fois d'une complétion formelle. On arrive alors à la situation où les $\sum_{\overline{\gamma}_{n,l-1}} c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}}\mathbf{Q}_{n,l-1}^{\overline{\gamma}_{n,l-1}}$ sont des monômes en $u'_1,...,u'_r$ fois une unité de R'.
Appliquons $l-1$ fois la Proposition I.100, on peut supposer de plus que :

$$Q_{n,l-1}=\eta u'_n,$$

où η est un monôme en $u'_1,...,u'_{n-1}$ fois une unité de R'.
En appliquant la Proposition I.100 à $u'_1,...,u'_r,u'_n$, quitte à passer au complété, on obtient une suite formelle encadrée $(R',u')\to(R'',u'')$ telle que $Q_{n,l}$ soit un monôme en $u''_1,...,u''_r,u''_n$. On en déduit immédiatement (1) et (2) par construction, cei achève la preuve de la Proposition III.14 et donc celle du Théorème III.12.

□

2.6. Un deuxième théorème de monomialisation.

Soient $(R,\mathfrak{m},k)$ un anneau local régulier complet de dimension n tel que $\mathfrak{m}=(u)=(u_1,...,u_n)$. Soient ν une valuation de $K=Frac(R)$ centrée en R et de groupe des valeurs Γ. Notons Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ. On pose :

$$H=\{f\in R\mid \nu(f)\notin\Gamma_1\}.$$

On suppose de plus que :

$$n=e(R,\nu)=emb.dim\,(R/H)\,,$$

c'est-à-dire que :

$$H\subset\mathfrak{m}^2.$$

La valuation ν considérée est la composée de la valuation $\mu:L^*\to\Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L=Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta:K^*\to\Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta\simeq\kappa(H)$.

Considérons un sous-anneau local $(T,\mathfrak{m}_T)$ de R, non-nécessairement noethérien, contenant $u_1,...,u_n$ et tel que $T/\mathfrak{m}_T\simeq k$. Soient $J\subset\{1,...,n\}$ et $j\in J$ tels que :

$$\nu(u_j)\leqslant\nu(u_i),\ i\in J.$$

Soit $\pi_0:(R,u)\to\left(R^{(1)},u^{(1)}\right)$ l'éclatement encadré le long de (u_J) par rapport à ν (Définition I.84), notons $\mathfrak{m}^{(1)}$ l'idéal maximal de $R^{(1)}$.

Définition III.15 — *Le* ***transformé de T par π_0*** *est l'anneau :*

$$T^{(1)}=T\left[u'_{J\setminus\{0\}}\right]_{\mathfrak{m}_1\cap T\left[u'_{J\setminus\{0\}}\right]}.$$

*On dit que l'éclatement π_0 est **défini sur T** si $u^{(1)} \subset T^{(1)}$.*
Pour une suite locale encadrée de la forme :

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

*les notions de **transformé** $T^{(i)}$ de T et de **définie sur T** sont définies par récurrence sur $1 \leqslant i \leqslant l$. Plus précisément, la notion de transformé $T^{(i)}$ n'est définie qu'en supposant la suite locale encadrée $(R,u) \to \left(R^{(i-1)}, u^{(i-1)}\right)$ définie sur T.*

Nous allons montrer qu'indépendamment de la caractéristique de k_ν, si l'on dispose d'un théorème du même type que le Théorème III.12 pour un anneau local régulier complet $(R, \mathfrak{m}, k)$, il va exister une suite locale encadrée (et non plus formelle encadrée) qui fasse décroître l'invariant $e(R,\nu)$. Si R est équicaractéristique, c'est le cas en caractéristique 0, comme on vient de le voir, mais aussi en caractéristique p si $[k : k^p] < +\infty$ (voir **[S1]**, Théorème 15.7) et si la Conjecture IV.15 est vraie. On verra dans le Chapitre IV que c'est également le cas si R est de caractéristique mixte, sous les conditions $[k : k^p] < +\infty$ et $\nu(p) \notin p\Gamma$.

Théorème III.16 — *Supposons que le Théorème III.12 soit vrai pour n'importe quel anneau local régulier complet R muni d'une valuation ν vérifiant les hypothèses de la sous-section 2.6. Alors :*

(1) (a) Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ telle que :

$$e(R',\nu) < e(R,\nu).$$

(b) Ou bien $H = (0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ telle que f soit un monôme en u' fois une unité de R'.

(2) La suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ de (1) peut être choisie définie sur T.

Preuve : Comme l'on suppose que le Théorème III.12 est vrai pour n'importe quel anneau local régulier complet R, pour $f \in R$, il existe une suite formelle encadrée :

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que, ou bien $e\left(R^{(l)},\nu\right) < e(R,\nu)$ si $H \neq (0)$, ou bien f est un monôme en $u^{(l)}$ fois une unité de $R^{(l)}$ si $H = (0)$. À partir de cette suite formelle encadrée, nous allons construire, par approximation $\left(u^{(l)}\right)$-adique, la suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ recherchée.
Plus précisément, pour $s \in \{1,...,l\}$, considérons $\pi_{s-1} : \left(R^{(s-1)}, u^{(s-1)}\right) \to \left(R^{(s)}, u^{(s)}\right)$ une des transformations de la suite formelle encadrée, elle consiste en une suite élémentaire uniformisante $\pi_{0,s}$ (Définition I.102), qui résout les singularités d'un certain polynôme-clé, suivie d'une complétion formelle. Ainsi, quitte à renuméroter les variables, $R^{(s)}$ est obtenu à partir de $R^{(s-1)}$ en adjoignant des expressions rationnelles $u_1^{(s)},...,u_r^{(s)},u_n^{(s)}$ en terme d'éléments de $R^{(s-1)}$ (dont les dénominateurs sont des monômes en $u^{(s-1)}$), puis par passage au complété en le centre de la valuation ν.
Pour $j \in \{1,...,n\}$, notons $\mu_{j,s}$ la somme des valuations pour ν des numérateurs et dénominateurs de $u_j^{(s)}$, vu en tant que monôme en $u^{(s-1)}$. On note alors :

$$\mu_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\mu_{j,s}\}.$$

Soit $\beta \in \Gamma_1$ tel que $\beta > \sum_{q=1}^{l} \mu_q$. Notons I_s le $\nu_{0,u^{(s)}}$-idéal de $R^{(s)}$ défini par :

$$I_s = \left\{ g \in R^{(s)} \;\middle|\; \nu_{0,u^{(s)}}(g) \geqslant \beta - \sum_{q=1}^{s} \mu_q \right\}.$$

Nous allons construire, par récurrence sur $s \in \{1, ..., l\}$, une suite locale encadrée :

$$(R, u) = \left(\tilde{R}^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_0} \left(\tilde{R}^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} \cdots \xrightarrow{\tilde{\pi}_{l-1}} \left(\tilde{R}^{(l)}, \tilde{u}^{(l)}\right)$$

définie sur T telle que, pour tout s et $j \in \{1, ..., n\}$, on ait :

$$\text{(HR)}: \ \nu_{0,u^{(s-1)}}\left(\tilde{u}_j^{(s)} - u_j^{(s)}\right) > \sum_{q=s+1}^{l} \mu_q.$$

Supposons que la suite locale encadrée soit construite à l'étape $s-1$. Quitte à renuméroter les variables si nécessaire, on peut supposer que :

$$u_j^{(s)} = u_j^{(s-1)}, \ r+1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

L'hypothèse de récurrence :

$$\nu_{0,u^{(s-2)}}\left(\tilde{u}_j^{(s-1)} - u_j^{(s-1)}\right) > \sum_{q=s}^{l} \mu_q,$$

et le fait que les $u_1^{(s)}, ..., u_r^{(s)}$ s'expriment de manière rationnelle en fonction de $u^{(s-1)}$ entraîne que (HR) est vrai pour $j \in \{1, ..., n-1\}$.
Reprenons les notations de la sous-section 6.5 du Chapitre I. Considérons :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_j \nu\left(u_j^{(s-1)}\right) = \overline{\alpha}\nu\left(u_n^{(s-1)}\right),$$

la plus petite combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\nu\left(u_1^{(s-1)}\right), ..., \nu\left(u_r^{(s-1)}\right), \nu\left(u_n^{(s-1)}\right)$ telle que $\overline{\alpha} \in \mathbb{N}^*$. Notons :

$$y = \left(u_1^{(s-1)}\right)^{\alpha_1} ... \left(u_r^{(s-1)}\right)^{\alpha_r}$$

et

$$Q^{(s)} = \sum_{i=0}^{d} b_i y^{d-i} \left(u_n^{(s-1)}\right)^{i\overline{\alpha}},$$

le polynôme Q apparaissant dans la Proposition I.100 correspondant à la suite élémentaire uniformisante $\pi_{0,s}$. Pour chaque b_i apparaissant dans $Q^{(s)}$, choisissons $\tilde{b}_i \in \left(\tilde{R}^{(s-1)}\right)^{\times} \cap T^{(s-1)}$ tel que :

$$\nu_{0,u^{(s-1)}}\left(b_j^{(s)} - \tilde{b}_j^{(s)}\right) > \sum_{q=s}^{l} \mu_q.$$

Posons :

$$\tilde{Q}^{(s)} = \sum_{i=0}^{d} \tilde{b}_i y^{d-i} \left(u_n^{(s-1)}\right)^{i\overline{\alpha}},$$

et $\tilde{\pi}_{s-1}$ la n-suite élémentaire uniformisante déterminée par ces données. Anisi, avec $Q^{(s)}$ et $\tilde{Q}^{(s)}$, on montre que (HR) est vraie pour $j = n$.
La suite locale encadrée que l'on vient de construire par récurrence :

$$(R,u) = \left(\tilde{R}^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_0} \left(\tilde{R}^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} \cdots \xrightarrow{\tilde{\pi}_{l-1}} \left(\tilde{R}^{(l)}, \tilde{u}^{(l)}\right)$$

définie sur T, telle que, pour tout s et $j \in \{1, ..., n\}$:

$$\nu_{0,u^{(s-1)}}\left(\tilde{u}_j^{(s)} - u_j^{(s)}\right) > \sum_{q=s+1}^{l} \mu_q,$$

implique que $in_\nu\left(u_j^{(s)}\right) = in_\nu\left(\tilde{u}_j^{(s)}\right)$, vus en tant qu'éléments de $\left(gr_\nu\left(R^{(l)}\right)\right)^*$, algèbre qui contient la sous-algèbre $gr_\nu\left(\tilde{R}^{(s)}\right)$. De même, la valuation monomiale $\nu_{0,u^{(l)}}$ de $Frac\left(R^{(l)}\right)$, restreinte à $\tilde{R}^{(l)}$, coïncide avec la valuation monomiale $\nu_{0,\tilde{u}^{(l)}}$. On a alors $in_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(u_j^{(s)}\right) = in_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(\tilde{u}_j^{(s)}\right)$, vus en tant qu'éléments de $\left(gr_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(R^{(l)}\right)\right)^*$, algèbre qui contient la sous-algèbre $gr_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(\tilde{R}^{(s)}\right)$.
Si $H = (0)$ et $f \in R \setminus \{0\}$ est monomialisé par la suite formelle encadrée, l'égalité précédente implique que :

$$f = \varpi + \tilde{f},$$

où ϖ est un monôme en $\tilde{u}^{(l)}$ et $\nu_{0,\tilde{u}^{(l)}}(\tilde{f}) > \nu(\varpi)$.
Si $H \neq (0)$ et $f \in H \setminus \{0\}$ dont le transformé strict devient un paramètre régulier dans $R^{(l)}$, alors :

$$f = \tilde{Q}^{(l)} + \tilde{f},$$

où $\nu_{0,\tilde{u}^{(l)}}(\tilde{f}) > \nu(\tilde{Q}^{(l)})$. En appliquant le Corollaire I.96, après une suite monomiale $\left(R^{(l)}, u^{(l)}\right) \to (R', u')$ (respectivement, en appliquant la Proposition I.101, après une suite locale encadrée indépendante de $u_n^{(l)}$, dans le cas $H \neq (0)$), on est ramené à la situation où ϖ divise $\tilde{f}$, c'est-à-dire à la situation où $f = z\varpi$, z unité de $\hat{R}'$ (respectivement, $f = zg$, où g est un paramètre régulier de R' et z une unité de $\hat{R}'$, dans le cas $H \neq (0)$).

$\square$

3. Théorèmes d'uniformisation locale en caractéristique nulle

Soit S un anneau local noethérien. Pour montrer que S est transformé en un anneau régulier via une suite locale encadrée, il faut montrer que $\widehat{S}_{\overline{H}}$ et $\widehat{S}/\overline{H}$ le sont, $\overline{H}$ étant l'idéal premier implicite de $\widehat{S}$. Par le Théorème I.69, si S est quasi-excellent alors $\widehat{S}_{\overline{H}}$ est régulier. Dans un premier temps, nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, $\widehat{S}/\overline{H}$ est aussi régulier. Enfin, grâce à ces deux résultats nous montrerons le théorème d'uniformisation locale pour des valuations de rang 1 puis pour des valuations de rang quelconque grâce à **[NS]**.

3.1. Un théorème préliminaire d'uniformisation locale.

Théorème III.17 — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien intègre de corps des fractions L et μ une valuation de L de rang 1 et de groupe des valeurs Γ_1 centrée en S telle que car $\left(k_\mu\right) = 0$.*

Notons $u = (u_1, ..., u_n)$ *un ensemble minimal de générateurs de* $\mathfrak{m}$ *et* $\overline{H}$ *l'idéal premier implicite de* $\widehat{S}$.
Soient $f_1, ..., f_s \in \mathfrak{m}$ *tels que* $\mu(f_1) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$. *Il existe alors une suite locale encadrée :*

$$(S,u,k) = \left(S^{(0)}, u^{(0)}, k^{(0)}\right) \xrightarrow{\rho_0} \left(S^{(1)}, u^{(1)}, k^{(1)}\right) \xrightarrow{\rho_1} \cdots \xrightarrow{\rho_{i-1}} \left(S^{(i)}, u^{(i)}, k^{(i)}\right),$$

ayant les propriétés suivantes :
notons $\overline{H}_i$ *l'idéal premier implicite de* $\widehat{S}_i$ *et* $\overline{f_j}$ *l'image de* $f_j \mod \overline{H}_i$, $1 \leqslant j \leqslant s$, *alors :*

(1) $\widehat{S}_i/\overline{H}_i$ *est régulier ;*

(2) Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, $\overline{f_j}$ *est un monôme en* $u^{(i)}$ *fois une unité de* $\widehat{S}_i/\overline{H}_i$ *;*

(3) Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, $\overline{f_1}$ *divise* $\overline{f_j}$ *dans* $\widehat{S}_i/\overline{H}_i$.

Preuve : Notons $\sigma : S \to \widehat{S}$ le morphisme de complétion formelle. Par le Théorème I.67, μ s'étend de manière unique en une valuation $\widehat{\mu}$ centrée en $\widehat{S}/\overline{H}$. Notons $u = (y, x)$ tel que $x = (x_1, ..., x_l)$, $l = e(S, \mu)$ (voir Définition I.87), $y = (y_1, ..., y_{n-l})$ et les images des $x_1, ..., x_l$ dans $\widehat{S}/\overline{H}$ induisent un ensemble minimal de générateurs de $(\mathfrak{m}\widehat{S})/\overline{H}$.
Par le Théorème I.5 de structure de Cohen, on sait qu'il existe un anneau local régulier complet de caractéristique nulle R et un morphisme φ surjectif :

$$\varphi : R \twoheadrightarrow \widehat{S}/\overline{H}.$$

Notons $H = \ker\varphi$, comme $\overline{H}$ est un idéal premier (Théorème I.67), H est un idéal premier de R. On choisit R de telle sorte que $\dim(R) = l$. Notons K le corps des fractions de R. Soit θ une valuation de K centrée en R_H telle que $k_\theta = \kappa(H)$. Si l'on regarde $\widehat{\mu}$ comme une valuation centrée en R/H via le morphisme φ, on peut considérer la valuation $\nu = \widehat{\mu} \circ \theta$ centrée en R et de groupe des valeurs Γ. Alors, Γ_1 est le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ et :

$$H = \{f \in R \,|\, \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

De plus, $car\left(k_\nu\right) = car\left(k_\mu\right) = 0$. On s'est donc ramené aux hypothèses du Théorème III.12.
Soit $T = \varphi^{-1}(\sigma(S))$, c'est un sous-anneau local de R d'idéal maximal $\varphi^{-1}(\sigma(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m} \cap T$. Ainsi, T contient $x_1, ..., x_l$ et :

$$T/(\mathfrak{m} \cap T) \simeq k.$$

Comme le Théorème III.12 est vrai en caractéristique 0, on peut appliquer le Théorème III.16. Ainsi, plusieurs cas se présentent :

(1) Si $H \neq (0)$, il existe une suite locale encadrée $(R, x) \to \left(R^{(i)}, x^{(i)}\right)$ telle que $e(R, \nu)$ décroisse strictement. En particulier, ce cas ne peut arriver qu'un nombre fini de fois, ainsi, on arrive à la situation où $H = (0)$ et donc R/H est régulier.

(2) Si $H = (0)$, alors pour chaque f_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, il existe une suite locale encadrée $(R, x) \to \left(R^{(i)}, x^{(i)}\right)$ telle que f_j soit un monôme en $x^{(i)}$ multiplié par une unité de $R^{(i)}$.

Par la Proposition I.79, la propriété d'être un monôme fois une unité est préservée par les suites locales encadrées. Ainsi, en itérant la procédure de (2), on arrive à la situation où tous les $f_1, ..., f_s$ sont simultanéments des monômes en $x^{(i)}$. Après une suite locale encadrée de plus $(R,x) \to (R',x')$, on peut supposer que les f_j sont des monômes uniquement en $x'_1,...,x'_r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $r = r(R,x,\nu)$ (voir Définition I.87). Enfin, en appliquant plusieurs fois le Corollaire I.92, on est ramené à la situation où chaque f_j est un monôme en $x'_1,...,x'_r$, $1 \leqslant j \leqslant s$ et, pour $j,j' \in \{1,...,s\}$, f_j divise $f_{j'}$ ou $f_{j'}$ divise f_j. De plus, toutes ces suites locales encadrées sont définies sur T. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(R,x,k) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d] & \left(R^{(1)},x^{(1)},k^{(1)}\right) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\pi_{i-1}"] & \left(R^{(i)},x^{(i)},k^{(i)}\right) \arrow[d] \\
\left(\widehat{S}/\overline{H},x,k\right) \arrow[r, "\tilde{\pi}_0"] & \left(\tilde{S}^{(1)},x^{(1)},k^{(1)}\right) \arrow[r, "\tilde{\pi}_1"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{\pi}_{i-1}"] & \left(\tilde{S}^{(i)},x^{(i)},k^{(i)}\right) \\
(S,u,k) \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[u] & \left(S^{(1)},u^{(1)},k^{(1)}\right) \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[u] & \cdots \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \left(S^{(i)},u^{(i)},k^{(i)}\right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Par ce que l'on vient de voir, la première colonne et la première ligne on déjà été construit. En passant au transformé strict de $R/H \simeq \widehat{S}/\overline{H}$ à chaque étape de la suite $(\pi_j)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$, on construit la suite d'éclatements encadrés $\left(\tilde{\pi}_j\right)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$ de $\widehat{S}/\overline{H}$ définie sur S. Enfin, la suite $\left(\tilde{\pi}_j\right)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$ se relève en une suite locale encadrée $(\rho_j)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$.
Si R/H est singulier, par le Théorème III.16, il existe une suite locale encadrée $(\pi_j)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$ qui fasse décroître $e(R,\nu)$. Ainsi, la suite locale encadrée $(\rho_j)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$ résultante possède la propriété :

$$e\left(S^{(i)},\mu\right) < e(S,\mu).$$

Ceci n'arrive qu'un nombre fini de fois. Ainsi, après un nombre fini de pas, on arrive à la situation où $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$ est régulier. Maintenant, si l'on suppose que $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$ est régulier, considérons $f_1,...,f_s$ des éléments non-nuls de S tels que $\mu(f_1) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$, alors, par le (2) vu plus haut, on en déduit que, pour $1 \leqslant j \leqslant s$, $f_j \mod \overline{H}_i$ sont des monômes en $u^{(i)}$ et $f_1 \mod \overline{H}_i$ divise $f_j \mod \overline{H}_i$.

□

3.2. Uniformisation locale plongée pour des valuations de rang 1.

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème d'uniformisation locale plongée pour des valuations de rang 1, nous allons donner un lemme un peu plus général et indépendant de la caractéristique qui nous sera également utile dans le Chapitre V.

Lemme III.18 — *([**S1**], Lemme 16.3) Soient $(A,\mathfrak{m},k)$ un anneau local noethérien, ν une valuation centrée en A et J un ν-idéal premier de A non maximal. Notons $h = ht(J)$. Supposons que A_J et A/J soient réguliers. Notons $u = (u_1,...,u_n)$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$ et supposons que $u = (x,y)$ avec $x = (x_1,...,x_l)$ et $y = (y_1,...,y_{n-l})$ tels que :*

(1) x induit un système régulier de paramètres de A/J ;

(2) il existe un ensemble minimal de générateurs $(\widehat{y}_1,...,\widehat{y}_{n-l})$ de J et des monômes $\varpi_1,...,\varpi_{n-l}$ en x tels que $\varpi_1/.../\varpi_{n-l}$ de sorte que $(\widehat{y}_{n-l-h+1},...,\widehat{y}_{n-l})$ induit un système régulier de paramètres de A_J et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $v_j \in A^\times$ tel que :

$$\widehat{y}_j - y_j - \varpi_j v_j \in \varpi_j \mathfrak{m}^N,$$

$1 \leqslant j \leqslant n-l$. Remarquons que, par convention, on peut avoir $y_j = \widehat{y}_j$, $\varpi_j = 0$, $v_j = 1$ et $(y) = J$.

Soient $f_1, ..., f_s \in A$ tels que :

$$\nu(f_1) \leqslant ... \leqslant \nu(f_s).$$

Soit $(T, \mathfrak{m}_T)$ un sous-anneau local de A non nécessairement noethérien tel que $T/\mathfrak{m}_T = k$. Enfin, supposons que pour tout $g_1, ..., g_t \in A$ tels que :

$$\nu(g_1) \leqslant ... \leqslant \nu(g_t),$$

il existe une suite locale encadrée $(A, u) \to (A', u')$ indépendante de y et définie sur T telle que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant t$, g_j mod J' est un monôme en u' et g_q mod J' divise g_i mod J', $1 \leqslant q \leqslant i \leqslant t$ (où J' est le transformé strict de J dans A').
Il existe alors une suite locale encadrée $(A, u) \to (A'', u'')$ par rapport à ν et définie sur T telle que A'' soit régulier.
Supposons de plus que l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée :

(3) $f_i \notin J$, $1 \leqslant i \leqslant s$;

(4) $y_j = \widehat{y}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-l$ (donc $J = (y)$), $T = A$ et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, f_i est un monôme en $(y_{n-l-h+1}, ..., y_{n-l})$ et f_i / f_{i+1} dans A_J.

La suite locale encadrée $(A, u) \to (A'', u'')$ précédente peut alors être choisie de telle sorte que les f_i soient des monômes en u'' multipliés par une unité de A'' et telle que f_i / f_{i+1} dans A'', $1 \leqslant i \leqslant s$.

Preuve : Nous ne donnerons qu'une idée de preuve, pour plus de détails, on peut consulter **[S1]**. Si $J = (0)$, il n'y a rien à montrer ; supposons donc que $J \neq (0)$. À partir de la suite locale encadrée $(A, u) \to (A', u')$, on veut construire une suite locale encadrée $(A, u) \to (A'', u'')$ définie sur T telle que A'' soit régulier. Pour cela il suffit d'avoir :

$$A'' = Fitt_h(J''/J''^2),$$

où $Fitt_h(J''/J''^2)$ est le h-ième idéal de Fitting de J''/J''^2. Par hypothèse et après une suite locale encadrée n'impliquant que des variables en x, on peut se ramener à la situation où $Fitt_h(J'/J'^2)$ est principal et engendré par un monôme en x noté a. Quitte à renuméroter les variables de y, on peut supposer qu'il existe $n-l-h$ relations de la forme :

$$\psi_j = a\widehat{y}_j + \sum_{q=n-l-h+1}^{n-l} a_{j,q}\widehat{y}_q + g_j,$$

où $g_j \in J'^2$ et a divise $a_{j,q}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-l-h$ et $n-l-h+1 \leqslant q \leqslant n-l$. Si on a (4), alors :

$$\nu_{0,u}(y_j) > \nu(a),\ 1 \leqslant j \leqslant n-l.$$

Comme J est un ν-idéal alors $y_j \in J$ et $a \notin J$. Supposons que l'on n'a pas (4) et prenons $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$N > \frac{1}{\nu_{0,u}(\mathfrak{m})} \left(\nu(\varpi_{n-l}) + \max_{\substack{1 \leqslant q \leqslant s \\ f_q \notin J}} \{\nu(f), \nu(a)\} \right).$$

Considérons une variable x_j de x telle que x_j^α divise ϖ_1 pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On éclate l'idéal (y, x_j) et on répète cette procédure α fois. On fait de même pour toutes les autrs variables divisant ϖ_1. On arrive à la situation où :

$$\nu_{0,u'}(y_1') > \nu(a) + \nu(\varpi_{n-l}) - \nu(\varpi_1).$$

On refait pareil pour toutes les autres variables de y, on est ainsi ramené à la situation où, pour ces nouvelles variables, on a :

$$\nu_{0,u}(y'_j) > \nu(a),\ 1 \leqslant j \leqslant n-l.$$

Pour chaque variable x_j de x divisant a, on éclate en l'idéal (y, x_j). Ces éclatements ont pour effet de multiplier a et les $a_{j,q}$ par x_j ainsi que les $g_1, ..., g_t$ par x_j^γ où $\gamma \geqslant 2$. Après un nombre fini de fois, a divise g_j et donc a divise ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant n-l-h$. Ainsi, pour $1 \leqslant j \leqslant n-l-h$, les y_j s'expriment comme une fonction des variables restantes modulo $\mathfrak{m}^2$. Ceci fait donc décroître $emb.dim(A)$ et donc A est régulier, à une suite formelle encadrée près.
À partir de maintenant on peut supposer que $h = n-l$; pour terminer il faut montrer que les f_i sont des monômes en u'' multipliés par une unité de A''. Quitte à diviser f_i par un monôme en y, on peut supposer que (3) est toujours vérifiée. Si (4) est vérifiée alors :

$$\nu_{0,u}(y_j) > \nu(f_i),\ 1 \leqslant j \leqslant n-l,\ 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Si (4) n'est pas vérifiée, l'inégalité précédente reste vraie par le choix de N. Ainsi, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, on a :

$$f_i = \rho_i + \tilde{f}_i,$$

où ρ_i est un monôme en x et $\nu_{0,u}(\tilde{f}_i) > \nu_{0,u}(\rho_i)$. On applique le Corollaire I.96 à chaque f_i, $1 \leqslant i \leqslant s$ et on obtient le résultat cherché.

□

Passons maitenant au théorème d'uniformisation locale plongée pour des valuations de rang 1 sur un anneau équicaractéristique dont le corps résiduel est de caractéristique nulle.

Théorème III.19 — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de corps des fractions L et μ une valuation de L de rang 1 et de groupe des valeurs Γ_1 centrée en S telle que car $(k_\mu) = 0$.*
Notons $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$.
Soient $f_1, ..., f_s \in \mathfrak{m}$ tels que $\mu(f_1) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$. Il existe alors une suite locale encadrée :

$$(S,u,k) = \left(S^{(0)}, u^{(0)}, k^{(0)}\right) \xrightarrow{\rho_0} \left(S^{(1)}, u^{(1)}, k^{(1)}\right) \xrightarrow{\rho_1} \cdots \xrightarrow{\rho_{i-1}} \left(S^{(i)}, u^{(i)}, k^{(i)}\right),$$

ayant les propriétés suivantes :

(1) S_i est régulier ;

(2) Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, f_j est un monôme en $u^{(i)}$ fois une unité de S_i ;

(3) Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, f_1 divise f_j dans S_i.

En d'autres termes, μ admet une uniformisation locale plongée au sens de la Propriété I.63.

Preuve : Reprenons les notations du Théorème III.17. On a vu qu'il existe un morphisme surjectif :

$$\psi : \widehat{S} \twoheadrightarrow \widehat{S}/\overline{H} \simeq R/H.$$

Par le Théorème III.17, après une suite locale encadrée auxiliaire, on peut supposer que $\widehat{S}/\overline{H}$ est régulier et donc que $R/H \simeq k[[x_1, ..., x_l]]$. Ainsi, il existe un ensemble de générateurs $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, ..., \widehat{y}_{n-l})$ de $\overline{H}$ et des séries formelles $\phi_j \in k[[x_1, ..., x_l]]$ tels que :

$$\widehat{y}_j = y_j + \phi_j \in \widehat{S},\ 1 \leqslant j \leqslant n-l.$$

Quitte à renuméroter les y_j, on peut supposer que :

$$\mu(y_1) \leqslant \mu(y_2) \leqslant ... \leqslant \mu(y_{n-l}).$$

En appliquant le Corollaire I.96 aux monômes de ϕ_j, $1 \leqslant j \leqslant n-l$, on peut supposer que :

$$\phi_j = \varpi_j \widehat{v}_j,$$

où les ϖ_j sont des monômes en $x_1, ..., x_l$, $\widehat{v}_j \in k\left[\left[x_1, ..., x_l\right]\right]^\times$ et tels que :

$$\varpi_1 / ... / \varpi_{n-l}.$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\forall\, j \in \{1, ..., n-l\},\ \forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, v_j \in S^\times,\ \widehat{y}_j - y_j - \varpi_j v_j \in \varpi_j \mathfrak{m}^N.$$

Enfin, rappelons que, par le Corollaire I.69, l'anneau $\widehat{S}_{\overline{H}}$ est régulier. On applique alors le Lemme III.18 à $A = \widehat{S}$, $J = \overline{H}$, $T = S$ et $\nu = \mu$. On en déduit alors une uniformisation locale plongée (Propriété I.63) de $\widehat{S}$. Comme S est quasi-excellent, par le (2) de la Remarque I.12, on en déduit que S est régulier.

□

3.3. Théorèmes d'uniformisation locale plongée.

Corollaire III.20 — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de corps des fractions L et ν une valuation de L centrée en S et de groupe des valeurs Γ telle que car $(k_\nu) = 0$. Alors, ν admet une uniformisation locale plongée au sens de la Propriété I.63.*

Preuve : On applique le Théorème III.19 et le Théorème 1.3 de [**NS**].

□

Corollaire III.21 — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de corps des fractions L et ν une valuation de L centrée en S et de groupe des valeurs Γ telle que car $(k_\nu) = 0$. Pour I un idéal de S, la paire (S, I) admet une uniformisation locale plongée par rapport à ν au sens de la Définition I.61.*

Preuve : C'est une application immédiate du Corollaire III.20.

□

Théorème III.22 — *Soit $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local (non nécessairement intègre) quasi-excellent. Soient P un idéal premier minimal de S et ν une valuation du corps des fractions de S/P centrée en S/P et de groupe des valeurs Γ telle que car $(k_\nu) = 0$.*
Il existe alors un éclatement local $\pi : S \to S'$ par rapport à ν tel que S'_{red} soit régulier et $Spec(S')$ soit normalement plat le long de $Spec(S'_{red})$, c'est-à-dire que l'anneau S admet une uniformisation locale par rapport à ν au sens de la Propriété I.58.

Preuve : Nous reprenons la preuve du Théorème 16.5 de [**S1**]. Par le Corollaire III.21, il existe une suite locale encadrée $(S, u) \to (S', u')$ le long de centres ne contenant aucune composante irréductible du transformé strict de $Spec\,(S_{red})$, tel que $Spec\,\left(S'_{red}\right)$ soit régulier. On peut donc supposer que S_{red} est régulier. Il reste à montrer qu'il existe une suite locale encadrée telle que $Spec(S')$ soit normalement plat le long de $Spec(S'_{red})$.
Soit $(y_1, ..., y_h) = \sqrt{(0)} \subset S$, c'est l'idéal qui définit $Spec\,(S_{red})$ dans $Spec(S)$.
Rappelons que pour un anneau local noethérien $(R, \mathfrak{n})$, le *cône tangent* de $Spec(R)$ est défini par :

$$Spec\left(\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{n}^n / \mathfrak{n}^{n+1}\right).$$

Il suffit de construire une suite locale encadrée telle que le cône tangent de $Spec(S')$ soit définit par un idéal engendré par des éléments de $k\left[\overline{y'_1},...,\overline{y'_h}\right]$, où y'_j est le transformé strict de y_j dans S' et $\overline{y_j}$ est l'image naturelle de y_j dans l'algèbre graduée de S', $1 \leqslant j \leqslant h$.
Notons $A = S_{red}$, $A' = S'_{red}$, on peut alors écrire S sous-la forme :

$$S = A\left[y_1,...,y_h\right]/I.$$

Notons $f_1,...,f_s \in A\left[y_1,...,y_h\right]$ un ensemble de générateurs de I et $(x_1,...,x_r)$ un ensemble minimal de générateurs de l'idéal maximal de A.
Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, notons $f_j = \sum\limits_{\alpha} c_{j,\alpha} y^{\alpha} \in A[y]$. On va construire une suite locale encadrée et une partition $(u') = (y',x')$ de (u') où (y') est le transformé strict de (y).
Soit $\nu_{0,x'}$ la valuation monomiale de A' associée à x' et à $\left\{\nu\left(x'_j\right)\right\}_j$ (Corollaire I.50). Par le Corollaire III.21, on peut construire une suite locale encadrée $(S,u) \to (S',u')$ telle que les $c_{j,\alpha}$ soient des monômes en x' fois une unité de A'.
Pour tout $j \in \{1,...,s\}$, notons $\mu_j = \max\{N \in \mathbb{N}^* \mid f_j \in (y)^N\}$ et $f'_j = \sum\limits_{\alpha} c'_{j,\alpha} y'^{\alpha} \in A'[y']$ le transformé strict de f_j dans $S' = A'[y']$. Pour chaque x'_t apparaissant dans $c'_{j,\alpha}$, pour un certain j et un certain α tel que $|\alpha| = \mu_j$, éclatons en l'idéal $(y'_1,...,y'_h,x'_t)$ un nombre suffisant de fois. On arrête le processus lorsque, pour $1 \leqslant j \leqslant s$ et α tel que $|\alpha| > \mu_j$, il existe $\tilde{\alpha}$ tel que $c'_{j,\tilde{\alpha}}$ divise $c'_{j,\alpha}$, avec $|\tilde{\alpha}| = \mu_j$. Par le Corollaire I.96, on sait que, pour chaque j, il existe bien $\tilde{\alpha}$ tel que $|\tilde{\alpha}| = \mu_j$ et pour tout α, $c'_{j,\tilde{\alpha}}$ divise $c'_{j,\alpha}$. Ainsi, le cône tangent de $Spec(S')$ est défini par des polynômes qui ne dépendent que de $\overline{y'_1},...,\overline{y'_h}$. On en conclut que $Spec(S')$ est normalement plat le long de $Spec(S'_{red})$.

$\square$

Remarque III.23 — Cette preuve ce généralise indépendamment de la caractéristique de k_ν lorsque la propriété d'uniformisation locale plongée est vérifiée au sens de la Définition I.61.

CHAPITRE IV

Monomialisation en caractéristique mixte

Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet de caractéristique mixte de dimension n avec $\mathfrak{m} = (x) = (x_1, ..., x_n)$ et ν une valuation de $K = Frac(R)$ centrée en R, de groupe des valeurs Γ. Soit Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ. On note :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

H est un idéal premier de R (voir Preuve du Théorème V.1). On suppose de plus que :

$$n = e(R, \nu) = emb.dim\,(R/H)\,,$$

c'est-à-dire que :

$$H \subset \mathfrak{m}^2.$$

On note également $r = r(R, x, \nu) = \dim_{\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\nu(x_i) \right)$.

La valuation ν considérée est la composée de la valuation $\mu : L^* \to \Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L = Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta : K^* \to \Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta \simeq \kappa(H)$.

Par abus de notations, pour $f \in R$, on notera $\mu(f)$ au lieu de $\mu(f \mod H)$.

Remarque IV.1 — Si $p \in H$, alors R/H est équicaractéristique et on est sous les hypothèses du Chapitre 15 de **[S1]**. Dans la suite on supposera donc que $p \notin H$.

1. Suites formelles encadrées et anneaux de caractéristique mixte

Lemme IV.2 — *Il existe $g \in W\,[[u_1, ..., u_n]]$ à coefficients dans $W^\times$ tel que :*

$$R \simeq W\,[[u_1, ..., u_n]]\,/\,(p - g).$$

Preuve : On sait qu'il existe un morphisme surjectif :

$$\varphi : W\,[[u_1, ..., u_n]] \twoheadrightarrow R,$$

tel que $\varphi(u_i) = x_i$ et $\varphi_{\mid W} = id_W$. Comme R est intègre (voir **[G1]**, Corollaire 17.1.3), $\ker \varphi$ est un idéal premier et, en comparant les dimensions, on en déduit que $ht(\ker \varphi) \leqslant 1$. Or, $W\,[[u_1, ..., u_n]]$ est factoriel donc, $\ker \varphi$ est un idéal principal engendré par f. Comme $p \in \mathfrak{m}$, il existe $a_1, ..., a_n \in R$ tels que :

$$p = a_1 x_1 + ... + a_n x_n.$$

Or, φ est surjective, il existe donc $b_1, ..., b_n \in W\,[[u_1, ..., u_n]]$ tes que $\varphi(b_i) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Notons $g = b_1 u_1 + ... + b_n u_n$, alors, $p - g \in \ker \varphi$.

Si un des b_i est divisible par p, en notant $b_i = p b_i'$, $b_i' \in W\,[[u_1, ..., u_n]]$, on remplace b_i par $b_i' g$. En itérant ce processus, après un nombre au plus dénombrable de pas, on peut supposer que tous les b_i sont non-divisibles par p et donc $b_i \in W^\times$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Vu que p est un paramètre régulier de $W\,[[u_1, ..., u_n]]$, l'idéal $(p - g)$ est premier, de hauteur 1 et inclu dans $\ker \varphi$, d'où :

$$\ker \varphi = (p - g).$$

avec $g \in (u_1, ..., u_n)^2$ à coefficients non-divisibles par p, donc dans $W^\times$.

$\square$

Remarque IV.3 — Si R est ramifié alors $g \in (u_1, ..., u_n)^2$.

A partir de maintenant on suppose que :

$$R = W\left[\left[u_1, ..., u_n\right]\right] / (p - g),$$

avec $g \in W\left[\left[u_1, ..., u_n\right]\right]$ à coefficients dans $W^\times$ et $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n)$ son idéal maximal.

Pour $j \in \{1, ..., n\}$, notons K_j le corps des fractions de $W\left[\left[u_1, ..., u_j\right]\right]$. Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, on note $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ l'ensemble des polynômes-clés de l'extension $K_{j-1} \hookrightarrow K_{j-1}(u_j)$. Si $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_l)$, on note :

$$\boldsymbol{Q}_{j,l+1}^{\gamma} = \prod_{i=1}^{l} Q_{j,i}^{\gamma_i}.$$

Définition IV.4 — *Soient $j \in \{r+1, ..., n\}$, $\mathbf{i} = (i_{r+1}, ..., i_j) \in \Lambda_{r+1} \times ... \times \Lambda_j$ et $f \in K_r\left[u_{r+1}, ..., u_n\right]$. Un **développement $\mathbf{i}$-standard de f** est défini par récurrence sur j comme suit. C'est un développement de la forme :*

$$f = \sum_{\gamma} c_\gamma \boldsymbol{Q}_{j,i_j+1}^{\gamma},$$

où chaque $\boldsymbol{Q}_{j,i_j+1}^{\gamma}$ est un monôme i_j-standard pour l'extension $K_{j-1} \hookrightarrow K_{j-1}(u_j)$ et les c_γ sont :

(1) tous nuls sauf pour un nombre fini d'entres eux ;

(2) des développements $(i_{r+1}, ..., i_{j-1})$-standards, si $j > r+1$;

(3) des éléments de K_r, si $j = r+1$.

*Un développement $\mathbf{i}$-standard de f est dit **strict** si c'est un développement i_j-standard de f pour l'extension $K_{j-1} \hookrightarrow K_{j-1}(u_j)$ et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(4) $j = r+1$;

(5) $j > r+1$ et chaque c_γ est un développement $(i_{r+1}, ..., i_{j-1})$-standard strict.

Remarque IV.5 — Par la Section 2 du Chapitre II, tout $f \in K_r\left[u_{r+1}, ..., u_n\right]$ admet un un développement $\mathbf{i}$-standard strict.

Pour $j \in \{r, ..., n\}$ et $\mathbf{i} = (i_{r+1}, ..., i_j) \in \Lambda_{r+1} \times ... \times \Lambda_j$, on définit par récurrence une valuation $\nu_{\mathbf{i}}$ de K_j comme suit.
Si $j = r$, on pose $\nu_\emptyset = \nu_{| K_r}$. Supposons que la valuation $\nu_{(i_{r+1}, ..., i_{j-1})}$ de K_{j-1} soit déjà construite. Si $f \in K_{j-1}\left[u_j\right]$, $\nu_{\mathbf{i}}(f)$ est défini comme l'extension de $\nu_{(i_{r+1}, ..., i_{j-1})}(f)$ déterminée par $\boldsymbol{Q}_{j,i_j+1}$. Si $f \in K_r\left[\left[u_{r+1}, ..., u_j\right]\right]$, posons N suffisamment grand de telle sorte que $f = f_1 + f_2$ avec :

(1) $f_1 \in K_r\left[\left[u_{r+1}, ..., u_{j-1}\right]\right]\left[u_j\right]$,

(2) $f_2 \in \left(u_j^N\right) K_r\left[\left[u_{r+1}, ..., u_j\right]\right]$,

(3) $\nu_{0,u}(f_2) > \nu_{\mathbf{i}}(f_1)$.

On pose alors $\nu_{\mathbf{i}}(f) = \nu_{\mathbf{i}}(f_1)$.

Lemme IV.6 — *Supposons que le Théorème III.12 soit vrai pour n'importe quel anneau de caractéristique positive. Si $\nu(p) \notin p\Gamma$, alors, à une suite formelle encadrée près, on peut supposer R de la forme :*

$$R = R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_n]]\,,$$

où $R[r]$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié) de dimension r et tel que $\nu_{|R[r]}$ soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de $R[r]$ et de rang rationnel maximal.

Preuve : Considérons l'élément $g \in W\,[[u_1, ..., u_n]]$ du Lemme IV.2. Par le Théorème II.10, pour tout $j \in \{r+1, ..., n\}$, la collection $\{Q_{j,i}\}_{i\in\Lambda_j}$ forme un ensemble complet de polynômes-clés, il existe donc $\mathbf{i} = (i_{r+1}, ..., i_n) \in \Lambda_{r+1} \times ... \times \Lambda_n$ tel que :

$$\nu_{\mathbf{i}}(g) = \nu(g) \text{ et } \nu\left(Q_{j,i}\right) < p,$$

pour tout $i \leqslant i_j$, $j \in \{r+1, ..., n\}$ (on rappelle que, vu la Remarque IV.1 et comme $p = g$ dans R, $\nu(g) \in \Gamma_1$).
Notons $\overline{g}$ l'image de g modulo p dans $k\,[[u_1, ..., u_n]]$ et $\overline{\nu}_{\mathbf{i}}$ la valuation définie sur $k\,((u_1, ..., u_r))\,[[u_{r+1}, ..., u_n]]$ comme la valuation $\nu_{\mathbf{i}}$ mais en regardant les éléments modulo p. En appliquant le Théorème III.12, supposé vrai dans le cas équicaractéristique, à la valuation $\overline{\nu}_{\mathbf{i}}$, il existe une suite formelle encadrée $k\,[[u_1, ..., u_n]] \to k'\,\left[\left[u'_1, ..., u'_n\right]\right]$ telle que $\overline{g}$ soit un monôme en u' multiplié par une unité de $k'\,\left[\left[u'_1, ..., u'_n\right]\right]$. On a alors :

$$\nu(g) = \nu_{\mathbf{i}}(g) = \overline{\nu}_{\mathbf{i}}\left(\overline{g}\right) = \nu_{0,u'}\left(\overline{g}\right).$$

En appliquant à chaque étape de l'algorithme du Théorème III.12, supposé vrai dans le cas équicaractéristique, les mêmes changements de variables à $W\,[[u_1, ..., u_n]]$, on obtient une suite $W\,[[u_1, ..., u_n]] \to (R^{(2)}, u^{(2)})$ telle que :

$$g = u_1^{(2)\alpha_1}...u_r^{(2)\alpha_r}z + ph,$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{Z}$, $z \in R^{(2)\times}$, $h \in R^{(2)}$. Or l'algorithme du Théorème III.12 consiste en une répétition de n-suites élémentaires uniformisantes (Définition I.102), ainsi, par la Proposition I.82 et par choix de $\mathbf{i}$:

$$h \in \left(u_1^{(2)}, ..., u_n^{(2)}\right).$$

On en déduit donc que :

$$h \notin R^{(2)\times}.$$

On peut alors écrire :

$$p - g = p(1-h) - u_1^{(2)\alpha_1}...u_r^{(2)\alpha_r}z = w(p - u_1^{(2)\alpha_1}...u_r^{(2)\alpha_r}z'),$$

où $w = 1 - h \in R^{(2)\times}$ et $z' = zw^{-1} \in R^{(2)\times}$.
À une suite formelle encadrée près, on peut donc supposer que, dans R, on a :

$$p = u_1^{\alpha_1}...u_r^{\alpha_r}z$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{Z}$, $z \in R^\times$.
Par hypothèses, comme $\nu(p) \notin p\Gamma$ et R est complet, il existe $\alpha_i \notin p\mathbb{Z}$ tel que :

$$z^{1/\alpha_i} \in R.$$

Quitte à faire le changement de variable :

$$v_i = u_i z^{1/\alpha_i},$$

on peut supposer que :

$$p = u_1^{\alpha_1} ... u_r^{\alpha_r} \in \mathfrak{m}^2.$$

On peut donc supposer, à une suite formelle encadrée près, que R s'écrit sous la forme :

$$R = W\left[[u_1, ..., u_n]\right] / \left(p - u_1^{\alpha_1} ... u_r^{\alpha_r}\right) \simeq R[r]\left[[u_{r+1}, ..., u_n]\right],$$

où $R[r] = W\left[[u_1, ..., u_r]\right] / \left(p - u_1^{\alpha_1} ... u_r^{\alpha_r}\right)$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié) de dimension r tel que $\nu_{|R[r]} = \nu_{0,(u_1,...,u_r)}$ et $rg.rat\left(\nu_{|R[r]}\right) = r$.

□

Remarque IV.7 — Pour que ce le Lemme IV.6 soit vrai, il faut supposer que le Théorème III.12 est vrai pour n'importe quel anneau de caractéristique positive. On va voir qu'il est vrai dans le cas où il existe un ensemble complet de polynômes-clés n'ayant pas de polynômes-clés limites. Sinon il faut supposer que la Conjecture IV.15 est vraie.

2. L'idéal premier implicite est engendré par un polynôme unitaire

À partir de maintenant et ce jusqu'à la fin du Chapitre IV, on suppose que :

$$\nu(p) \notin p\Gamma,$$

$$R = R[r]\left[[u_{r+1}, ..., u_n]\right],$$

où $R[r]$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié) de dimension r et tel que $\nu_{|R[r]}$ soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de $R[r]$ et de rang rationnel maximal.

Proposition IV.8 — *Par le Lemme IV.6, on peut supposer que R s'écrit sous la forme :*

$$R = R[r]\left[[u_{r+1}, ..., u_n]\right],$$

où $R[r]$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié). Notons $R_{n-1} = R[r]\left[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]\right]$ et supposons que $H \not\subset R_{n-1}$ et $H \cap R_{n-1} = (0)$.
Soit $f \in H \setminus \{0\}$. À une suite formelle encadrée près, f s'écrit sous la forme :

$$f = \alpha f_{n-1} P;$$

où $\alpha \in R^\times$, $f_{n-1} \in R_{n-1}$ et P est un polynôme unitaire en u_n.

Preuve : La preuve est la même que celle de la Proposition III.9.

□

Corollaire IV.9 — *Sous les mêmes hypothèses que la Proposition IV.8, on a :*

$$ht\,(H) \leqslant 1.$$

Preuve : La preuve est la même que celle de la Proposition III.10.

□

Corollaire IV.10 — *Sous les hypothèses de la Proposition IV.8, à une suite formelle encadrée près, l'idéal H est principal engendré par un polynôme unitaire en u_n.*

Preuve : C'est une conséquence directe du Corollaire IV.9.

□

3. Un premier théorème conjectural de monomialisation

Théorème IV.11 — *Sous les hypothèses de la Section 2 et les notations de la sous-section 2.1 du Chapitre III, deux cas se présentent :*

(1) Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite formelle encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$\left(e\left(R^{(l)},\nu^{(l)}\right),e\left(R^{(l)},\nu^{(l)}\right)-r\left(R^{(l)},u^{(l)},\nu^{(l)}\right)\right) <_{lex} (e(R,\nu),n-r).$$

(2) Ou bien $H=(0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite formelle encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ fois une unité de $R^{(l)}$.

Preuve : On procède par récurrence sur $n-r$. Si $n=r$ alors $\nu(u_1),...,\nu(u_n)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairements indépendants et donc, tout $f \in R$ contient un unique monôme de valuation minimale. En particulier,

$$\forall\, f \in R,\ \nu_{0,u}(f)=\nu(f).$$

Par la Remarque III.8, $H=(0)$. Prenons alors un élément $f \in R$, par le Théorème I.99, il existe une suite locale encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{i-2}} \left(R^{(i-1)},u^{(i-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{i-1}} \left(R^{(i)},u^{(i)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(i)}$ fois une unité de $R^{(i)}$. En passant au complété à chaque pas, on obtient la suite formelle encadrée satisfaisant (2).

Supposons que $n-r>0$ et que l'on a déjà construit une suite formelle encadrée pour toutes les valeurs strictements plus petites et satisfaisant la conclusion du Théorème IV.11.

Soit $R^{(i)}$ un anneau local apparaissant dans une suite formelle encadrée. Par le Lemme IV.6, on peut écrire $R^{(i)}$ sous la forme $B\left[\left[u_{n_i}\right]\right]$ où B est un anneau régulier (éventuellement ramifié) et si $H^{(i)} \cap R^{(i)} \neq (0)$, alors $H^{(i)} \subset \mathfrak{m}^{(i)2}$. Par le Corollaire IV.10, $H^{(i)}$ est engendré par un polynôme unitaire en u_{n_i}.

4. Monomialisation des polynômes

Proposition IV.12 — *Sous les hypothèses du Théorème IV.11, pour tout polynôme $f \in R[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]$, il existe une suite formelle encadrée $(R,u) \to (R',u')$ telle que f soit un monôme en u' fois une unité de R'.*

Preuve du Théorème IV.11 en supposant la Proposition IV.12 vraie :
Si $H \neq (0)$, prenons $f \in H \cap R[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]$, $f \neq 0$, sinon, prenons $f \in R[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right] \setminus \{0\}$. Par hypothèses, il existe une suite formelle encadrée $(R,u) \to (R',u')$ telle que f soit un monôme en u' fois une unité de R'. Notons H' le transformé de H dans R'.
Si $H \neq (0)$, alors, par définition, $\nu(f) \notin \Gamma_1$ et donc, il existe un j tel que $\nu(u'_j) \notin \Gamma_1$, c'est-à-dire, $u'_j \in H'$. Ainsi, $e(R',\nu)=n-1<n=e(R,\nu)$ et on est dans la situation (1) du Théorème IV.11. Si $H=(0)$ et $f \in R[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right] \setminus \{0\}$ on se retrouve dans

la situation (2) par hypothèses.
Enfin, si $H = (0)$ et $f \in R \setminus \{0\}$, non-nécessairement un polynôme en u_n, écrivons $f = f' + f''$ avec $\nu_{0,u}(f'') > \nu(f)$ (et donc $\nu(f) = \nu(f')$). Par le cas polynomial vu avant, il existe une suite formelle encadrée $(R, u) \to (R', u')$ telle que f' soit un monôme en u' multiplié par une unité de R'. Or $\nu_{0,u'}(f'') \geqslant \nu_{0,u}(f'') > \nu(f) = \nu(f')$. Par le Corollaire I.96, quitte à compléter, il existe une suite formelle encadrée $(R', u') \to (R'', u'')$ telle que f soit un monôme en u'' multiplié par une unité de R''.

□

Preuve de la Proposition IV.12 : On va montrer le résultat par récurrence sur le degré de f. Si $d^\circ_{u_n}(f) = 1$, la Proposition IV.12 est évidente.
Soit $f \in R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]]\,[u_n]$ de degré $d > 1$. Par hypothèse de récurrence on suppose que la Proposition IV.12 est vraie pour tout polynôme de degré strictement inférieur à d.
Par le Théorème II.10, il existe un ordinal $i \in \Lambda_n$ tel que $\nu(f) = \nu_{n,i}(f)$. Ceci veut dire qu'il existe un développement (n, i)-standard de f de la forme :

$$f = \sum_{j=0}^{N} c_j Q_{n,i}^j,$$

où les c_j sont des développements (n, i)-standard n'impliquant pas $Q_{n,i}$.
On rappelle que pour $i \in \Lambda_n$, on note $\alpha_{n,i} = d^\circ_{Q_{n,i-1}}(Q_{n,i})$, si i possède un prédécesseur immédiat, sinon, il existe un indice i_0, i-inessentiel, tel que $i = i_{0+}$, on note alors $\alpha_{n,i} = d^\circ_{Q_{n,i_0}}(Q_{n,i})$.
Supposons qu'il existe $l \in \Lambda_n$ tel que $\alpha_{n,l} > 1$, prenons alors ce l. S'il n'en existe pas, prenons un l suffisamment grand tel que $f = \sum_{j=0}^{N} c_j Q_{n,l}^j$. Dans tous les cas, par définition des polynômes-clés, $l \leqslant \omega$.
Si $l < \omega$, notons $l_0 = l - 1$. Si $l = \omega$, prenons $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l = l_{0+}$ et suffisamment grand tel que f admette un développement (n, ω)-standard n'impliquant que les polynômes-clés $Q_{n,\omega}$ et Q_{n,l_0}.
Pour conclure, il nous suffit d'avoir le résultat voulu sur les polynômes-clés comme nous allons le voir dans la Section 5 et la Proposition IV.13.

5. Monomialisation des polynômes-clés

Proposition IV.13 — *Sous les hypothèses du Théorème IV.11, il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R, u) \to (R', u')$$

où $u = (u_1, ..., u_n)$, $u' = (u'_1, ..., u'_n)$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) Pour tout $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 \leqslant q \leqslant l_0$, *les polynômes-clés* $Q_{n,q}$ *et* $Q_{n,l}$ *sont des monômes en* u' *fois une unité de* R' *;*

(2) Dans R', u'_n *divise* $Q_{n,l}$ *mais* u'^2_n *ne divise pas* $Q_{n,l}$.

Preuve de la Proposition IV.12 en supposant la Proposition IV.13 vraie :
Par hypothèse de récurrence sur $n - r$, n'importe quelle collection d'éléments de $Frac\,(R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]])$ peut être transformée simultanément en monômes via une suite formelle encadrée. De plus, en appliquant $n - r - 1$ fois la Proposition I.100, on peut supposer que seuls les $u'_1, ..., u'_r$ apparaissent dans ces monômes.

Si $\alpha_{n,l} = 1$, on applique la Proposition I.100 à chaque polynôme-clé $Q_{n,1}, ..., Q_{n,l}$ et la Proposition IV.12 est démontrée.

Supposons que $\alpha_{n,l} > 1$. Notons $f = \sum_{j=0}^{d} a_j u_n^j$, $a_j \in R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]]$. Soit j_0 le plus grand $j \in \{0, ..., d\}$ tel que $\nu(a_{j_0}) = \min_{0 \leqslant j \leqslant d} \{\nu(a_j)\}$. Par le Corollaire I.96, après une suite locale encadrée indépendante de u_n, et quitte à compléter, on peut supposer que a_{j_0} divise a_j, pour tout $j \in \{0, ..., d\}$. En appliquant le théorème de préparation de Weierstrass ([**L**], Théorème 4.9.2), on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u_n de degré d.

Soit $f = \sum_{j=0}^{N} c_j Q_{n,l}^j$, $N = \left\lfloor \dfrac{d}{\alpha_{n,l}} \right\rfloor$, le développement (n,l)-standard de f. Par la Proposition IV.13, il existe une suite formelle encadrée telle que le développement (n,l)-standard de f dans R' soit de la forme $\sum_{j=0}^{N} c_j' u_n'^j$, $c_j' \in R'[r]\left[\left[u_{r+1}', ..., u_{n-1}'\right]\right]$, multiplié par une unité de R'.

Notons j_0' le plus grand $j \in \{0, ..., N\}$ tel que $\nu(c_{j_0'}') = \min_{0 \leqslant j \leqslant N} \{\nu(c_j')\}$. Toujours par le Corollaire I.96, après une suite locale encadrée indépendante de u_n', et quitte à compléter, on peut supposer que $c_{j_0'}'$ divise c_j', pour tout $j \in \{0, ..., N\}$. En appliquant le théorème de préparation de Weierstrass ([**L**], Théorème 4.9.2), on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u_n' de degré inférieur ou égal à $N < d$. Pour conclure il nous suffit juste d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

□

Preuve de la Proposition IV.13 : Si $l \in \mathbb{N}$, alors l possède un prédécesseur immédiat. Considérons le développement standard de $Q_{n,l}$:

$$Q_{n,l} = Q_{n,l-1}^{\alpha_{n,l}} + \sum_{j=0}^{\alpha_{n,l}-1} \left(\sum_{\overline{\gamma}_{n,l-1}} c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}} \mathbf{Q}_{n,l-1}^{\overline{\gamma}_{n,l-1}} \right) Q_{n,l-1}^j.$$

Par hypothèse de récurrence, pour des valeurs strictement inférieures à $n - r$, il existe une suite formelle encadrée $(R, u) \to (R', u')$, indépendante de u_n telle que chaque élément $c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}}$ soit un monôme en $u_1', ..., u_{n-1}'$ multiplié par une unité de R'.

Pour chaque $j \in \{r + 1, ..., n - 1\}$, appliquons la suite uniformisante j-élémentaire de la Définition I.102, suivie à chaque fois d'une complétion formelle. On arrive alors à la situation où les $\sum_{\overline{\gamma}_{n,l-1}} c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}} \mathbf{Q}_{n,l-1}^{\overline{\gamma}_{n,l-1}}$ sont des monômes en $u_1', ..., u_r'$ fois une unité de R'.

Appliquons $l - 1$ fois la Proposition I.100, on peut alors supposer de plus que :

$$Q_{n,l-1} = \eta u_n',$$

où η est un monôme en $u_1', ..., u_{n-1}'$ fois une unité de R'.

En appliquant la Proposition I.100 à $u_1', ..., u_r', u_n'$, quitte à passer au complété, on obtient une suite formelle encadrée $(R', u') \to (R'', u'')$ telle que $Q_{n,l}$ soit un monôme en $u_1'', ..., u_r'', u_n''$. On en déduit immédiatement (1) et (2) par construction.

Supposons que $l = \omega$. Fixons-nous une injection $\Gamma_1 \hookrightarrow \mathbb{R}$. On note alors :

$$\overline{\beta}_{n,\omega} = \lim_{i \to +\infty} \beta_{n,i} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Considérons $l_0 < \omega$ l'indice ω-inessentiel apparaissant dans le développement (n, l_0)-standard :

$$Q_{n,\omega} = \sum_{j=0}^{\alpha_{n,\omega}} c_{j,l_0} Q_{n,l_0}^j,$$

avec la condition $c_{j,l_0} = 0$ si l'on est dans l'un des deux cas suivants :

(1) $\overline{\beta}_{n,\omega} < \infty$, $j \neq 0$, $j \neq p^s$;

(2) $\overline{\beta}_{n,\omega} = \infty$, $p^{e_{n,\omega}} \nmid j$.

où $\alpha_{n,\omega} = p^{e_{n,\omega}}$. Par définition, $d^\circ_{u_n}(Q_{n,l_0}) = 1$ et donc $d^\circ_{u_n}(Q_{n,\omega}) = p^{e_{n,\omega}}$.
Appliquons la Proposition I.100 l_0-fois (c'est-à-dire appliquée aux polynômes-clés $Q_{n,1}, ..., Q_{n,l_0}$), on peut supposer de plus que $l_0 = 1$, c'est-à-dire que $Q_{n,l_0} = u_n$. Ainsi, $Q_{n,\omega}$ s'écrit sous la forme d'un polynôme unitaire en u_n (que l'on peut voir comme un polynôme d'Artin-Schreier généralisé) :

$$Q_{n,\omega} = u_n^{p^{e_{n,\omega}}} + \sum_{j=0}^{e_{n,\omega}-1} c_{p^j} u_n^{p^j} + c_0,$$

où $c_0, c_{p^j} \in R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]]$, $1 \leqslant j \leqslant e_{n,\omega} - 1$. Pour conclure, il faut monomialiser le premier polynôme-clé limite : c'est la Conjecture IV.15 de la Section 6.

On peut remarquer que, si l'ensemble de polynômes-clés $\{Q_{j,i}\}_{(j,i)\in\{1,...,n\}\times\Lambda_j}$ ne possède aucuns polynômes-clés limites, alors la preuve de la Proposition IV.13 est complète et le Théorème IV.11 est démontré. Remarquons également que si R est de caractéristique p, on peut l'écrire sous la forme $R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_n]]$ avec $R\,[r] = k\,[[u_1, ..., u_r]]$ et lui appliquer la même méthode pour monomialiser ses éléments. L'hypothèse $\nu(p) \notin p\Gamma$ est alors superflue. On peut résumer cela dans le Théorème IV.14 suivant.

Théorème IV.14 — *Soit R un anneau local régulier complet de caractéristique p ou mixte et de dimension n. Soit ν une valuation de $Frac(R)$ centrée en R et de groupe des valeurs Γ. Soit Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ. On note :*

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

On suppose que $n = e(R, \nu)$ et $\nu(p) \notin p\Gamma$ si R est de caractéristique mixte. Si on se donne un ensemble de polynômes-clés pour R ne possédant pas de polynômes-clés limites, alors :

(1) Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite formelle encadrée :

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$\left(e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right), e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - r\left(R^{(l)}, u^{(l)}, \nu^{(l)}\right)\right) <_{lex} (e(R, \nu), n - r).$$

(2) Ou bien $H = (0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite formelle encadrée :

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ fois une unité de $R^{(l)}$.

6. Une conjecture de monomialisation pour le premier polynôme-clé limite

Pour achever la preuve de la Proposition IV.13 et donc du Théorème IV.11, il nous faut monomialiser le premier polynôme-clé limite. Nous proposons ici une conjecture qui, si elle est vraie, nous permet d'obtenir, via le Théorème IV.16 ainsi que le Chapitre V, une uniformisation locale des anneaux locaux quasi-excellents de caractéristique mixte sous les hypothèses $[k : k^p] < +\infty$ et $\nu(p) \notin p\Gamma$.

Conjecture IV.15 — *On suppose que $(R, \mathfrak{m}, k)$ est de la forme $R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_n]]$ où $R[r]$ est un anneau local régulier complet de dimension r et tel que $\nu_{|R[r]}$ soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de $R[r]$ et de rang rationnel r. Supposons que le premier polynôme-clé limite $Q_{n,\omega}$ de l'extension $K_{n-1} \hookrightarrow K_{n-1}(u_n)$ s'écrit sous la forme :*

$$Q_{n,\omega} = u_n^{p^{e_{n,\omega}}} + \sum_{j=0}^{e_{n,\omega}-1} c_{p^j} u_n^{p^j} + c_0,$$

où c_0, $c_{p^j} \in R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]]$, $1 \leqslant j \leqslant e_{n,\omega} - 1$. On suppose de plus que :

$$\left[k : k^{p^{e_{n,\omega}}}\right] < +\infty.$$

Il existe alors une suite formelle encadrée :

$$(R, u) \to (R', u'),$$

où $u = (u_1, ..., u_n)$, $u' = (u'_1, ..., u'_n)$, telle que :

(1) $Q_{n,\omega}$ est un monôme en u' fois une unité de R' ;

(2) Dans R', u'_n divise $Q_{n,\omega}$ mais u'^2_n ne divise pas $Q_{n,\omega}$.

Plus précisément, à une suite formelle encadrée près, il existe $j \in \{r+1, ..., n-1\}$ et $e \in \mathbb{N}$, $e < e_{n,\omega}$, tels que :

(3) Il existe g, $h \in R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_{n-1}]]$ tels que $c_0 = g + h$;

(4) $\nu_{0,u}(h) \geqslant p^{e_{n,\omega}} \overline{\beta}_{n,\omega}$, en particulier, $h = 0$ si $\overline{\beta}_{n,\omega} = \infty$;

(5) g contient un monôme de la forme $\varpi u_j^{p^e}$ où ϖ est un monôme en $u_1, ..., u_r$ et, pour tous les autres monômes de la forme $\varpi' u_j^d$ avec ϖ' monôme en $u_1, ..., u_{j-1}, u_{j+1}, ..., u_n$, apparaissant dans $Q_{n,\omega}$, $\nu(\varpi') \geqslant \nu(\varpi)$;

(6) Si $\overline{\beta}_{n,\omega} = \infty$ alors $j = n - 1$.

Nous allons donner quelques idées pour essayer de démontrer cette conjecture. Il faut procéder par récurrence sur le degré de $Q_{n,\omega}$. Le fait d'obtenir dans c_0 un monôme de la forme $\varpi u_j^{p^e}$ avec ϖ monôme en $u_1, ..., u_r$ va nous permettre d'échanger u_n et u_j et de conclure par récurrence. Il faut donc trouver des invariants par changements de variables qui soient décroissants. L'idée est d'utiliser les séries de Puiseux pour obtenir ces invariants qui sont fortement liés aux suites $\left(\varepsilon_{j,i}\right)_i$, $r+1 \leqslant j \leqslant n$. Mais on a vu dans la Remarque II.21 que ces suites ne sont pas invariantes par changements de variables. Il faut donc utiliser les séries de Puiseux universelles pour trouver des invariants convenables.

7. Un deuxième théorème de monomialisation via la Conjecture IV.15

Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet de caractéristique mixte et de dimension n tel que $\mathfrak{m} = (u) = (u_1, ..., u_n)$. Soient ν une valuation de $K = Frac(R)$ centrée en R et de groupe des valeurs Γ. Notons Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ. On pose :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

On suppose de plus que :

$$[k : k^p] < +\infty,$$
$$\nu(p) \notin p\Gamma$$

et :

$$n = e(R, \nu), \text{ c'est-à-dire, } H \subset \mathfrak{m}^2.$$

La valuation ν considérée est la composée de la valuation $\mu : L^* \to \Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L = Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta : K^* \to \Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta \simeq \kappa(H)$.

Considérons un sous-anneau local $(T, \mathfrak{m}_T)$ de R, non-nécessairement noethérien, contenant $u_1, ..., u_n$ et tel que $T/\mathfrak{m}_T \simeq k$.

Théorème IV.16 — *Sous les hypothèses précédentes et en supposant que la Conjecture IV.15 soit vraie :*

(1) (a) Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite locale encadrée $(R, u) \to (R', u')$ telle que :

$$e(R', \nu) < e(R, \nu).$$

(b) Ou bien $H = (0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite locale encadrée $(R, u) \to (R', u')$ telle que f soit un monôme en u' fois une unité de R'.

(2) La suite locale encadrée $(R, u) \to (R', u')$ de (1) peut être choisie définie sur T (voir Définition III.15).

Preuve : Comme $\nu(p) \notin p\Gamma$, par le Lemme IV.6, à une suite formelle encadrée près, on peut supposer que R est de la forme $R[r]\,[[u_{r+1}, ..., u_n]]$ où $R[r]$ est un anneau local régulier complet de dimension r et tel que $\nu_{|R[r]}$ soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de $R[r]$ et de rang rationnel r.
Or, $[k : k^p] < +\infty$, les hypothès de la Conjecture IV.15 sont donc vérifiées et le Théorème IV.11 est vrai pour l'anneau R. Comme le Théorème IV.11 est l'analogue du Théorème III.12, alors le Théorème III.16 est vrai pour notre anneau R de caractéristique mixte. Or ceci n'est rien d'autre que le Théorème IV.16.

□

Remarque IV.17 — Si l'on supprime l'hypothèse $\nu(p) \notin p\Gamma$, en faisant la même preuve et en supposant que la Conjecture IV.15 est vraie, on obtient le même résultat que celui du Théorème IV.16 pour un anneau de caractéristique p.
Enfin, si l'on suppose qu'il existe un ensemble de polynômes-clés pour R ne possédant pas de polynômes-clés limites, alors, par le Corollaire IV.14, le Théorème IV.16 est vrai.

CHAPITRE V

Uniformisation locale en caractéristique mixte

Soit S un anneau local noethérien. Pour montrer que S est transformé en un anneau régulier via une suite locale encadrée, il faut montrer que $\widehat{S}_{\overline{H}}$ et $\widehat{S}/\overline{H}$ le sont, $\overline{H}$ étant l'idéal premier implicite de $\widehat{S}$. Par le Théorème I.69, si S est quasi-excellent alors $\widehat{S}_{\overline{H}}$ est régulier. Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, $\widehat{S}/\overline{H}$ est aussi régulier. Ensuite nous montrerons le théorème d'uniformisation locale pour des valuations de rang 1 puis grâce à **[NS]**, pour des valuations de rang quelconque.

La plupart des preuves de ce chapitre sont les mêmes que celles du Chapitre III, nous les avons réécrite dans le cas mixte pour plus de clarté.

On suppose que la Conjecture IV.15 est vraie ce qui implique que le Théorème IV.16 est vrai. Remarquons que s'il existe un ensemble de polynômes-clés ne possédant pas de polynômes-clés limites, la conjecture IV.15 est inutile et le Théorème IV.16 est toujours vrai.

1. Un théorème préliminaire d'uniformisation locale via la Conjecture IV.15

Théorème V.1 — *Soient $(S,\mathfrak{m},k)$ un anneau local noethérien intègre de caractéristique mixte de corps des fractions L et μ une valuation de L de rang 1 et de groupe des valeurs Γ_1 centrée en S.*
Supposons que $[k:k^p]<+\infty$ ainsi que $\mu(p)\notin p\Gamma_1$, où $p=car(k)$.
Notons $u=(u_1,...,u_n)$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$ et $\overline{H}$ l'idéal premier implicite de $\widehat{S}$.
Soient $f_1,...,f_s\in\mathfrak{m}$ tels que $\mu(f_1)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$. Si la Conjecture IV.15 est vraie, alors, il existe une suite locale encadrée :

$$(S,u,k)=\left(S^{(0)},u^{(0)},k^{(0)}\right)\xrightarrow{\rho_0}\left(S^{(1)},u^{(1)},k^{(1)}\right)\xrightarrow{\rho_1}\cdots\xrightarrow{\rho_{i-1}}\left(S^{(i)},u^{(i)},k^{(i)}\right),$$

ayant les propriétés suivantes :
notons $\overline{H}_i$ l'idéal premier implicite de $\widehat{S}_i$ et $\overline{f_j}$ l'image de $f_j \mod \overline{H}_i$, $1\leqslant j\leqslant s$, alors :

(1) $\widehat{S}_i/\overline{H}_i$ est régulier ;

(2) Pour $1\leqslant j\leqslant s$, $\overline{f_j}$ est un monôme en $u^{(i)}$ fois une unité de $\widehat{S}_i/\overline{H}_i$;

(3) Pour $1\leqslant j\leqslant s$, $\overline{f_1}$ divise $\overline{f_j}$ dans $\widehat{S}_i/\overline{H}_i$.

Preuve : Notons $\sigma:S\to\widehat{S}$ le morphisme de complétion formelle. Par le Théorème I.67, μ s'étend de manière unique en une valuation $\widehat{\mu}$ centrée en $\widehat{S}/\overline{H}$. Notons $u=(y,x)$ tel que $x=(x_1,...,x_l)$, $l=e(S,\mu)$, $y=(y_1,...,y_{n-l})$ et les images des $x_1,...,x_l$ dans $\widehat{S}/\overline{H}$ induisent un ensemble minimal de générateurs de $(\mathfrak{m}\widehat{S})/\overline{H}$.
Par le Théorème I.5 de structure de Cohen, on sait qu'il existe un anneau local régulier complet de caractéristique mixte R et un morphisme φ surjectif :

$$\varphi:R\twoheadrightarrow\widehat{S}/\overline{H}.$$

Notons $H = \ker \varphi$, comme $\overline{H}$ est un idéal premier (Théorème I.67), H est un idéal premier de R. On choisit R de telle sorte que $\dim(R) = l$. Notons K le corps des fractions de R. Soit θ une valuation de K centrée en R_H telle que $k_\theta = \kappa(H)$. Si l'on regarde $\widehat{\mu}$ comme une valuation centrée en R/H via le morphisme φ, on peut considérer la valuation $\nu = \widehat{\mu} \circ \theta$ centrée en R et de groupe des valeurs Γ. Alors, Γ_1 est le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ et :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

On s'est donc ramené aux hypothèses du Chapitre IV.
Soit $T = \varphi^{-1}(\sigma(S))$, c'est un sous-anneau local de R d'idéal maximal $\varphi^{-1}(\sigma(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m} \cap T$. Ainsi, T contient $x_1, ..., x_l$ et :

$$T/(\mathfrak{m} \cap T) \simeq k.$$

Comme on suppose la Conjecture IV.15 vraie, par le Théorème IV.16, plusieurs cas se présentent :

(1) Si $H \neq (0)$, il existe une suite locale encadrée $(R, x) \to \left(R^{(i)}, x^{(i)}\right)$ telle que $e(R, \nu)$ décroisse strictement. En particulier, ce cas ne peut arriver qu'un nombre fini de fois, ainsi, on arrive à la situation où $H = (0)$ et donc R/H est régulier.

(2) Si $H = (0)$, alors pour chaque f_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, il existe une suite locale encadrée $(R, x) \to \left(R^{(i)}, x^{(i)}\right)$ telle que f_j soit un monôme en $x^{(i)}$ multiplié par une unité de $R^{(i)}$.

Par la Proposition I.79, la propriété d'être un monôme fois une unité est préservée par les suites locales encadrées. Ainsi, en itérant la procédure de (2), on arrive à la situation où tous les $f_1, ..., f_s$ sont simultanéments des monômes en $x^{(i)}$. Après une suite locale encadrée de plus $(R, x) \to (R', x')$, on peut supposer que les f_j sont des monômes uniquement en $x'_1, ..., x'_r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $r = r(R, x, \nu)$. Enfin, en appliquant plusieurs fois le Corollaire I.92, on est ramené à la situation où chaque f_j est un monôme en $x'_1, ..., x'_r$, $1 \leqslant j \leqslant s$ et, pour $j, j' \in \{1, ..., s\}$, f_j divise $f_{j'}$ ou $f_{j'}$ divise f_j. De plus, toutes ces suites locales encadrées sont définies sur T. Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(R,x,k) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d] & \left(R^{(1)},x^{(1)},k^{(1)}\right) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\pi_{i-1}"] & \left(R^{(i)},x^{(i)},k^{(i)}\right) \arrow[d] \\
\left(\widehat{S}/\overline{H},x,k\right) \arrow[r, "\tilde{\pi}_0"] & \left(\tilde{S}^{(1)},x^{(1)},k^{(1)}\right) \arrow[r, "\tilde{\pi}_1"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{\pi}_{i-1}"] & \left(\tilde{S}^{(i)},x^{(i)},k^{(i)}\right) \\
(S,u,k) \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[u] & \left(S^{(1)},u^{(1)},k^{(1)}\right) \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[u] & \cdots \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \left(S^{(i)},u^{(i)},k^{(i)}\right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Par ce que l'on vient de voir, la première colonne et la première ligne on déjà été construit. En passant au transformé strict de $R/H \simeq \widehat{S}/\overline{H}$ à chaque étape de la suite $(\pi_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$, on construit la suite d'éclatements encadrés $\left(\tilde{\pi}_j\right)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$ de $\widehat{S}/\overline{H}$ définie sur S. Enfin, la suite $\left(\tilde{\pi}_j\right)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$ se relève en une suite locale encadrée $(\rho_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$.
Si R/H est singulier, par le Théorème III.12, il existe une suite locale encadrée $(\pi_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$

qui fasse décroître $e(R,\nu)$. Ainsi, la suite locale encadrée $(\rho_j)_{1\leqslant j\leqslant i-1}$ résultante possède la propriété :

$$e\left(S^{(i)},\mu\right) < e(S,\mu).$$

Ceci n'arrive qu'un nombre fini de fois. Ainsi, après un nombre fini de pas, on arrive à la situation où $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$ est régulier. Maintenant, si l'on suppose que $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$ est régulier, considérons $f_1,...,f_s$ des éléments non-nuls de S tels que $\mu(f_1) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$, alors, par le (2) vu plus haut, on en déduit que, pour $1 \leqslant j \leqslant s$, $f_j \mod \overline{H}_i$ sont des monômes en $u^{(i)}$ et $f_1 \mod \overline{H}_i$ divise $f_j \mod \overline{H}_i$.

□

2. Uniformisation locale plongée pour des valuations de rang 1

Théorème V.2 — *Soient $(S,\mathfrak{m},k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de caractéristique mixte de corps des fractions L et μ une valuation de L de rang 1 et de groupe des valeurs Γ_1 centrée en S.*
Supposons que $[k:k^p] < +\infty$ ainsi que $\mu(p) \notin p\Gamma_1$, où $p = car(k)$.
Notons $u = (u_1,...,u_n)$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$.
Soient $f_1,...,f_s \in \mathfrak{m}$ tels que $\mu(f_1) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$. Si la Conjecture IV.15 est vraie, alors, il existe une suite locale encadrée :

$$(S,u,k) = \left(S^{(0)},u^{(0)},k^{(0)}\right) \xrightarrow{\rho_0} \left(S^{(1)},u^{(1)},k^{(1)}\right) \xrightarrow{\rho_1} \cdots \xrightarrow{\rho_{i-1}} \left(S^{(i)},u^{(i)},k^{(i)}\right),$$

ayant les propriétés suivantes :

(1) S_i est régulier ;

(2) Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, f_j est un monôme en $u^{(i)}$ fois une unité de S_i ;

(3) Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, f_1 divise f_j dans S_i.

En d'autres termes, μ admet une uniformisation locale plongée au sens de la Propriété I.63.

Preuve : Reprenons les notations du Théorème V.1. On a vu qu'il existe un morphisme surjectif :

$$\psi : \widehat{S} \twoheadrightarrow \widehat{S}/\overline{H} \simeq R/H.$$

Par le Théorème V.1, après une suite locale encadrée auxiliaire, on peut supposer que $\widehat{S}/\overline{H}$ est régulier. Par le Lemme IV.6, on peut supposer que $R/H \simeq R[r]\left[\left[x_{r+1},...,x_l\right]\right]$. Ainsi, il existe un ensemble de générateurs $\widehat{y} = (\widehat{y}_1,...,\widehat{y}_{n-l})$ de $\overline{H}$ et des séries formelles $\phi_j \in R[r]\left[\left[x_{r+1},...,x_l\right]\right]$ tels que :

$$\widehat{y}_j = y_j + \phi_j \in \widehat{S},\ 1 \leqslant j \leqslant n-l.$$

Quitte à renuméroter les y_j, on peut supposer que :

$$\mu(y_1) \leqslant \mu(y_2) \leqslant ... \leqslant \mu(y_{n-l}).$$

Comme $\mu_{|\ R[r]}$ est monomiale, par le Théorème I.99, on peut supposer que les coefficients de ϕ_j, $1 \leqslant j \leqslant n-l$, sont des monômes en $x_1,...,x_r$. En appliquant le Corollaire I.96 aux monômes de ϕ_j, $1 \leqslant j \leqslant n-l$, on peut supposer que :

$$\phi_j = \varpi_j \widehat{v}_j,$$

où les ϖ_j sont des monômes en $x_1,...,x_l$, $\widehat{v}_j \in R[r]\left[\left[x_{r+1},...,x_l\right]\right]^\times$ et tels que :

$$\varpi_1/.../\varpi_{n-l}.$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\forall\, j \in \{1, ..., n-l\},\ \forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, v_j \in S^\times,\ \widehat{y}_j - y_j - \omega_j v_j \in \omega_j \mathfrak{m}^N.$$

Enfin, rappelons que, par le Corollaire I.69, l'anneau $\widehat{S}_{\overline{H}}$ est régulier. On applique alors le Lemme III.18 à $A = \widehat{S}$, $J = \overline{H}$, $T = S$ et $\nu = \mu$. On en déduit alors une uniformisation locale plongée (Propriété I.63) de $\widehat{S}$. Comme S est quasi-excellent, par le (2) de la Remarque I.12, on en déduit que S est régulier.

□

3. Théorèmes d'uniformisation locale plongée via la Conjecture IV.15

Corollaire V.3 — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de caractéristique mixte de corps des fractions L et ν une valuation de L centrée en S et de groupe des valeurs Γ. Supposons que $[k : k^p] < +\infty$ ainsi que $\nu(p) \notin p\Gamma$, où $p = car(k)$.*
Si la Conjecture IV.15 est vraie, alors, ν admet une uniformisation locale plongée au sens de la Propriété I.63.

Preuve : On applique le Théorème V.2 et le Théorème 1.3 de [**NS**].

□

Corollaire V.4 — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de caractéristique mixte de corps des fractions L et ν une valuation de L centrée en S et de groupe des valeurs Γ. Supposons que $[k : k^p] < +\infty$ ainsi que $\nu(p) \notin p\Gamma$, où $p = car(k)$.*
Si la Conjecture IV.15 est vraie, alors, pour I un idéal de S, la paire (S, I) admet une uniformisation locale plongée par rapport à ν au sens de la Définition I.61.

Preuve : C'est une application immédiate du Corollaire V.3.

□

Théorème V.5 — *Soit $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local (non nécessairement intègre), quasi-excellent et de caractéristique mixte. Soient P un idéal premier minimal de S et ν une valuation du corps des fractions de S/P centrée en S/P et de groupe des valeurs Γ. Supposons que $[k : k^p] < +\infty$ ainsi que $\nu(p) \notin p\Gamma$, où $p = car(k)$.*
Si la Conjecture IV.15 est vraie, alors, il existe un éclatement local $\pi : S \to S'$ par rapport à ν tel que S'_{red} soit régulier et $Spec(S')$ soit normalement plat le long de $Spec(S'_{red})$, c'est-à-dire que l'anneau S admet une uniformisation locale par rapport à ν au sens de la Propriété I.58.

Preuve : La preuve est la même que celle du Théorème III.22.

□

Bibliographie

[A1] Shreeram Abhyankar. *Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$*. Ann. of Math. (2), 63 :491–526, 1956.

[A2] Shreeram Abhyankar. *Two notes on formal power series*. Proc. Amer. Math. Soc., 7 :903–905, 1956.

[A3] Shreeram Abhyankar. *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Second edition, 1998.

[AMo] Shreeram Abhyankar et Tzuong Tsieng Moh. *Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation. I, II*. J. Reine Angew. Math., 260 :47–83 ; ibid. 261 (1973), 29–54, 1973.

[AMa] M. F. Atiyah et I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[BM] Edward Bierstone et Pierre D. Milman. *Local resolution of singularities*. In Real analytic and algebraic geometry (Trento, 1988), volume 1420 of Lecture Notes in Math., pages 42–64. Springer, Berlin, 1990.

[B] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative : Chapitres 5 à 7*. Springer, 2006.

[Ch] Claude Chevalley. *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable*. Mathematical Surveys, No. VI. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1951.

[Co1] Vincent Cossart. *Forme normale d'une fonction sur un k-schéma de dimension 3 et de caractéristique positive*. In Géométrie algébrique et applications, I (La Rábida, 1984), volume 22 of Travaux en Cours, pages 1–21. Hermann, Paris, 1987.

[Co2] Vincent Cossart. *Contact maximal en caractéristique positive et petite multiplicité*. Duke Math. J., 63(1) :57–64, 1991.

[CP1] Vincent Cossart et Olivier Piltant. *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings*. J. Algebra, 320(3) :1051–1082, 2008.

[CP2] Vincent Cossart et Olivier Piltant. *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II*. J. Algebra, 321(7) :1836–1976, 2009.

[CP3] Vincent Cossart et Olivier Piltant. *Resolution of singularities of threefolds in mixed characteristic : case of small multiplicity*. pages 1-39 ; The final publication is available at www.springerlink.com DOI : 10.1007/s13398-012-0103-5, March 2012.

[Cu1] Steven Dale Cutkosky. *Local factorization of birational maps*. Adv. Math., 132(2) :167–315, 1997.

[Cu2] Steven Dale Cutkosky. *Local monomialization and factorization of morphisms*. Astérisque, (260), 1999.

[Cu3] Steven Dale Cutkosky. *Resolution of singularities*, volume 63 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Cu4] Steven Dale Cutkosky. *Resolution of singularities for 3-folds in positive characteristic*. Amer. J. Math., 131(1) :59–127, 2009.

[CE] Steven Dale Cutkosky et Samar ElHitti. *Formal prime ideals of infinite value and their algebraic resolution*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 19(3-4) :635–649, 2010.

[CG] Steven Dale Cutkosky et Laura Ghezzi. *Completions of valuation rings*. In Recent progress in arithmetic and algebraic geometry, volume 386 of Contemp. Math., pages 13–34. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[EH] Santiago Encinas et Herwig Hauser. *Strong resolution of singularities in characteristic zero*. Comment. Math. Helv., 77(4) :821–845, 2002.

[EV] Santiago Encinas et Orlando Villamayor. *A new proof of desingularization over fields of characteristic zero*. In Proceedings of the International Conference on Algebraic Geometry and Singularities (Sevilla, 2001), volume 19, pages 339–353, 2003.

[G1] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (20) :259, 1964.

[G2] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (24) :231, 1965.

[HGOAS] F. J. Herrera Govantes, M. A. Olalla Acosta, et M. Spivakovsky. *Valuations in algebraic field extensions*. J. Algebra, 312(2) :1033–1074, 2007.

[HGOAST] F. J. Herrera Govantes, M. A. Olalla Acosta, M. Spivakovsky, et B. Teissier. *Extending a valuation centered in a local domain to the formal completion*. Proc. London Math. Soc., 105(3) :571–621, 2012.

[H1] Heisuke Hironaka. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*. Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; ibid. (2), 79 :205–326, 1964.

[H2] Heisuke Hironaka. *Theory of infinitely near singular points*. J. Korean Math. Soc., 40(5) :901–920, 2003.

[ILO] Luc Illusie, Yves Laszlo, et Fabrice Orgogozo. *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schemas quasi-excellents. Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008.*, 2012. preprint math.AG/arXiv :1207.3648v1.

[Ka] Irving Kaplansky. *Maximal fields with valuations*. Duke Math. J., 9 :303–321, 1942.

[Ke] Kiran S. Kedlaya. *Power series and p-adic algebraic closures*. J. Number Theory, 89(2) :324–339, 2001.

[KK1] Hagen Knaf et Franz-Viktor Kuhlmann. *Abhyankar places admit local uniformization in any characteristic*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 38(6) :833–846, 2005.

[KK2] Hagen Knaf et Franz-Viktor Kuhlmann. *Every place admits local uniformization in a finite extension of the function field*. Adv. Math., 221(2) :428–453, 2009.

[Kr] Wolfgang Krull. *Allgemeine Bewertungstheorie*. J. Reine Angew. Math., 167 :160–196, 1932.

[L] Serge Lang. *Algèbre*. Sciences Sup. Dunod, 2004.

[LJ] Monique Lejeune-Jalabert. *Sur l'équivalence des courbes algébroïdes planes. Coefficients de Newton. Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton*. Université de Paris VII, Paris, 1973. Thèse présentée à l'Université Paris VII pour obtenir le grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques, Partiellement en collaboration avec Bernard Teissier.

[Mah] Wael Mahboub. *Key Polynomials*. Journal of Pure and Applied Algebra, 217(6) :989–1006, 2013.

[Mat1] Hideyuki Matsumura. *Commutative Algebra*. Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1980.

[Mat2] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Mo] Tzuong Tsieng Moh. *On a Newton polygon approach to the uniformization of singularities of characteristic p*. In Algebraic geometry and singularities (La Rábida, 1991), volume 134 of Progr. Math., pages 49–93. Birkhäuser, Basel, 1996.

[NS] Josnei Novacoski et Mark Spivakovsky. *Reduction of Local Uniformization to the rank one case*, 2012. preprint math.AC/arXiv :1204.4751v1.

[P] Bjorn Poonen. *Maximally complete fields*. Enseign. Math. (2), 39(1-2) :87–106, 1993.

[PP] Patrick Popescu-Pampu. *Approximate roots*. In Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999), volume 33 of Fields Inst. Commun., pages 285–321. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[SS] Jean-Christophe San Saturnino. *Théorème de Kaplansky effectif pour des valuations de rang 1 centrées sur des anneaux locaux réguliers et complets*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 63, 2013. À paraître.

[S1] Mark Spivakovsky. *Resolution of singularities I : local uniformization of an equicharacteristic quasi-excellent local domain whose residue field k satisfies* $[k : k^p] < \infty$. In preparation, 2013.

[S2] Mark Spivakovsky. *A solution to Hironaka's polyhedra game*. In Arithmetic and geometry, Vol. II, volume 36 of Progr. Math., pages 419–432. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[S3] Mark Spivakovsky. *Valuations in function fields of surfaces*. Amer. J. Math, 112 (1) :107–156, 1990.

[Tei1] Bernard Teissier. *Valuations, deformations, and toric geometry*. In Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999), volume 33 of Fields Inst. Commun., pages 361–459. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[Tei2] Bernard Teissier. *Complex curve singularities : a biased introduction*. In Singularities in geometry and topology, pages 825–887. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

[Tem1] Michael Temkin. *Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero*. Adv. Math., 219(2) :488–522, 2008.

[Tem2] Michael Temkin. *Functorial desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero : the nonembedded case*. Duke Math. J., 161(11) :2207–2254, 2012.

[Tem3] Michael Temkin. *Inseparable local uniformization*. J. Algebra, 373 :65–119, 2013.

[Va1] Michel Vaquié. *Valuations*. In Resolution of singularities (Obergurgl, 1997), volume 181 of Progr. Math., pages 539–590. Birkhäuser, Basel, 2000.

[Va2] Michel Vaquié. *Famille admise associée à une valuation de $K[x]$*. In Singularités Franco-Japonaises, volume 10 of Sémin. Congr., pages 391–428. Soc. Math. France, Paris, 2005.

[Va3] Michel Vaquié. *Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$*. In Singularities in geometry and topology 2004, volume 46 of Adv. Stud. Pure Math., pages 259–271. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.

[Va4] Michel Vaquié. *Extension d'une valuation*. Trans. Amer. Math. Soc., 359(7) :3439–3481 (electronic), 2007.

[Va5] Michel Vaquié. *Famille admissible de valuations et défaut d'une extension*. J. Algebra, 311(2) :859–876, 2007.

[Va6] Michel Vaquié. *Extensions de valuation et polygone de Newton*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 58(7) :2503–2541, 2008.

[Vi] Orlando Villamayor. *Constructiveness of Hironaka's resolution*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 22(1) :1–32, 1989.

[W] Jarosław Włodarczyk. *Simple Hironaka resolution in characteristic zero*. J. Amer. Math. Soc., 18(4) :779–822, 2005.

[Z1] Oscar Zariski. *The reduction of the singularities of an algebraic surface*. Ann. of Math. (2), 40 :639–689, 1939.

[Z2] Oscar Zariski. *Le problème des modules pour les branches planes*. École Polytechnique, Paris, 1973. Cours donné au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, Octobre-Novembre 1973. Rédigé par François Kmety et Michel Merle, avec un Appendice de Bernard Teissier.

[ZS] Oscar Zariski et Pierre Samuel. *Commutative Algebra II*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1976.