Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche Fakultät I
– Mathematik –

# Elementare Invarianten von Dedekindschnitten angeordneter Körper

Diplomarbeit von

**Thomas Güldenberg**

vorgelegt bei

**Prof. Dr. Manfred Knebusch**

Regensburg, im Dezember 2004

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge. Ein (Dedekind-)Schnitt $p$ von $X$ ist ein Paar $(p^L, p^R)$ von Teilmengen $p^L$, $p^R$ von $X$ mit $p^L \cup p^R = X$ und $p^L < p^R$, das heißt $a < b$ für alle $a \in p^L$, $b \in p^R$. Dedekindschnitte wurden von Richard Dedekind (1831-1916) zu dem Zweck eingeführt, die reellen Zahlen axiomatisch zu beschreiben. Sie tauchen jedoch heutzutage in vielen anderen Zusammenhängen auf. Dabei werden auch im allgemeineren Kontext meist nur Dedekindschnitte bestimmter Strukturen betrachtet. Zum Beispiel ist es eine aus der reellen Algebra wohlbekannte Tatsache, daß eine natürliche Bijektion zwischen den Dedekindschnitten eines reell abgeschlossenen Körpers $R$ und den Anordnungen des rationalen Funktionenkörpers $R(t)$ besteht. Somit bietet das reelle Spektrum eine Möglichkeit, Dedekindschnitte reell abgeschlossener Körper zu verstehen.

In dieser Arbeit betrachten wir Dedekindschnitte in einer allgemeineren Situation. So beschäftigen wir uns hauptsächlich mit grundlegenden Eigenschaften von Schnitten angeordneter Körper, die bei uns nicht notwendig reell abgeschlossen sind. Hier können wir nicht analog unser Wissen über das reelle Spektrum eines Körpers ausnutzen, sondern müssen auf andere Weise an das Problem herangehen. Gibt es auch einige Arbeiten über Schnitte angeordneter Körper, erscheint es dennoch dringend notwendig, die grundlegenden algebraischen Eigenschaften zu untersuchen. Auch wenn sich die Vielzahl unserer Ergebnisse und Anwendungen im Fall eines angeordneten Körpers abspielt, ist es doch sinnvoll, noch allgemeiner Schnitte angeordneter (abelscher) Gruppen zu betrachten. Vieles ist bereits auf dieser Ebene möglich und steht uns dann automatisch sowohl für die additive Gruppe $(K, +)$ als auch die multiplikative Gruppe $(K^{>0}, \cdot)$ eines angeordneten Körpers $K$ zur Verfügung.

Wir beginnen in Kapitel 1 mit einer Einführung der grundlegenden Begriffe sowie der Bereitstellung der wichtigsten Hilfsmittel. In Abschnitt 1.1 betrachten wir Schnitte einer angeordneten abelschen Gruppe $G$. Wir ordnen die Menge $\mathrm{Cuts}(G)$ der Schnitte von $G$ an, indem wir für zwei Schnitte $p$ und $q$ von $G$ definieren: $p \leq q :\Leftrightarrow p^L \subseteq q^L$. Weiter definieren wir das Negative eines Schnittes sowie eine Operation $+$ von $G$ auf der Menge der Schnitte von $G$. Die Standgruppe eines Schnittes $p$ von $G$ unter dieser Operation, also die Menge $G(p) := \{g \in G \mid g + p = p\}$ ist eine konvexe Untergruppe von $G$ und heißt die Invarianzgruppe von $p$. Sie stellt die erste wichtige Invariante eines Schnittes dar. Die Oberkante von $G(p)$, das ist der Schnitt $\hat{p} = G(p)^+ = \big(\{g \in G \mid g \leq h \text{ für ein } h \in G(p)\}, \{g \in G \mid g > G(p)\}\big)$ von $G$, liefert uns eine im folgenden wichtige Fallunterscheidung. So gilt immer $\hat{p} \leq |p|$ (Proposition 1.15), wobei der Fall $\hat{p} < |p|$ für uns der interessantere ist. Ein weiteres wichtiges Instrument zur Einteilung von Dedekindschnitten finden wir in der sogenannten Signatur eines Schnittes (Definition 1.24). Diese teilt uns im wesentlichen mit, ob der Schnitt $p$ von $G$ als Translat der Ober- oder Unterkante seiner Invarianzgruppe darstellbar ist oder nicht.

In Abschnitt 1.2 betrachten wir dann einen angeordneten Körper $K$ mit der Multiplikation als zweiter Operation neben der Addition. Wir definieren entsprechend eine Multiplikation von Körperelementen mit den Schnitten von $K$. Die multiplikative Invarianzgruppe $G^*(p)$ eines Schnittes $p$ von $K$ führen wir ein als die Invarianzgruppe von $|p|$ bezüglich der angeordneten abelschen Gruppe $(K^{>0}, \cdot)$ im Sinne unserer ersten Definition der (additiven) Invarianzgruppe. Der sogenannte Invarianzbewertungsring $V(p)$ von $p$, gegeben durch $V(p) = \{a \in K \mid a \cdot G(p) \subseteq G(p)\}$, ist ein konvexer Bewertungsring von $K$ und stellt aufgrund der wichtigen Beziehung $V(p)^{*>0} = G^*(G(p)^+)$ (Proposition 1.44) eine weitere elementare Invariante des Schnittes $p$ von $K$ dar.

In Kapitel 2 betrachten wir einen Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$. Wir haben bereits $G(p)$ und $G^*(p)$ als additive und multiplikative konvexe Untergruppen von $(K, +)$ beziehungsweise $(K^{>0}, \cdot)$ kennengelernt und untersuchen den Zusammenhang zwischen beiden. Zur Beschreibung dieses Zusammenhangs definieren wir die Menge $J(p) := \{c \in K^{>0} \mid G^*(p) = c \cdot G(p) + 1\}$, welche sich genau dann als nichtleer herausstellt, wenn $|p| > \hat{p}$ gilt (Proposition 2.6). In diesem Fall finden wir für die Menge $I(p) := \frac{1}{J(p)}$ der Inversen der Elemente von $J(p)$ drei nützliche Beschreibungen. Lemma 2.10 sagt aus, daß sowohl die Ober- als auch die Unterkante von $I(p)$ Oberkanten von konvexen Untergruppen von $(K, +)$ sind. Mit Proposition 2.12 können wir $I(p)$ als Umgebung von $p$ verstehen, und Korollar 2.14 liefert eine Darstellung von $I(p)$ mittels einer Bedingung an die multiplikative Invarianzgruppe $G^*(p)$ von $p$. Diese letzte Darstellung wird ermöglicht durch das Schlüssellemma 2.1, das für Schnitte von Signatur 1 oder $-1$ die multiplikative Invarianzgruppe berechnet. Im kurzen Abschnitt 2.2 beweisen wir mit unseren Mitteln ein Theorem aus [K] von F.-V. Kuhlmann.

Kapitel 3 ist dem bereits in Definition 1.24 eingeführten Begriff der Signatur eines Schnittes gewidmet. Zu einem Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$ geben uns die additive Signatur $\mathrm{sign}(p)$ und die multiplikative Signatur $\mathrm{sign}^*(p)$ im wesentlichen an, ob $p$ durch Addition beziehungsweise Multiplikation mit einem Körperelement aus der Ober- oder Unterkante seiner additiven beziehungsweise multiplikativen Invarianzgruppe entstehen kann. Hier stoßen wir wieder auf die bereits in Kapitel 2 wichtige Fallunterscheidung zwischen $|p| > \hat{p}$ und $|p| = \hat{p}$. Im Fall $|p| > \hat{p}$ erhalten wir mit Theorem 3.5 eine direkte Verbindung zwischen $\mathrm{sign}(p)$ und $\mathrm{sign}^*(p)$. Für positive Schnitte $p > 0$ stimmen beide nämlich überein, für negative Schnitte $p < 0$ unterscheiden sie sich genau durch das Vorzeichen. Den Beweis dieser Aussage ermöglicht uns zum einen die Entdeckung, daß unter der Bedingung $|p| > \hat{p}$ nicht nur $\mathrm{sign}(p)$, sondern auch $\mathrm{sign}^*(p)$ ungleich $\infty$ sein müssen. Zum anderen kommt auch hier eine entscheidende Bedeutung dem Schlüssellemma 2.1 zu, das bereits in Abschnitt 2.1 die dritte Beschreibung der Menge $I(p)$ ermöglicht hat.

Im Fall $|p| = \hat{p}$ in Teil 3.2 stellen wir fest, daß wir keine Beziehung zwischen $\mathrm{sign}(p)$ und $\mathrm{sign}^*(p)$ wie die von Theorem 3.5 finden können. Vielmehr konstruieren wir mit Hilfe des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers Beispiele dafür, daß alle denkbaren Kombinationen aus additiven und multiplikativen Signaturen auch tatsächlich auftreten.

Nach den ersten drei Kapiteln mit hauptsächlich allgemeinen Aussagen führen wir in Abschnitt 3.3 eine Vielzahl von Beispielen an und rechnen die bis dahin eingeführten Invarianten von Schnitten explizit aus. Wir betrachten dazu den verallgemeinerten Potenzreihenkörper $R((t^\Gamma))$ mit einer divisiblen angeordneten abelschen Gruppe $\Gamma$ und einem reell abgeschlossenen Körper $R$. Wir wählen einen reell abgeschlossenen Zwischenkörper $R(t) \subseteq M \subseteq P$, wobei $P = R((t^{\frac{1}{\infty}\mathbb{Z}}))$ den Körper der Puiseuxreihen bezeichnet. Jedes Element $b \in N \setminus M$ induziert dann auf natürliche Weise einen Schnitt $p := b \restriction M$ von $M$. Bereits Tressl führt diese Schnitte als Beispiele an ([T1], Beispiele 3.11, C). Allerdings beschränkt er sich auf den Fall $\Gamma = \mathbb{Q}$ und erhält nur Schnitte mit additiver Signatur 0. Wir lassen auch divisible angeordnete abelsche Obergruppen $\Gamma$ von $\mathbb{Q}$ zu und geben in Theorem 3.27 genaue Bedingungen für das Auftreten aller möglichen Kombinationen von $\operatorname{sign}(p)$ und $\operatorname{sign}^*(\hat{p})$ an. Desweiteren sehen wir dort explizit die jeweiligen Invarianten $G(p)$, $V(p)$ und $G^*(\hat{p})$. Da uns aber die Signaturen an dieser Stelle am meisten interessieren, finden wir die betreffenden Aussagen noch einmal zusammengefaßt in einer Tabelle am Ende des Abschnitts.

Nachdem wir zu einem Schnitt eines angeordneten Körpers seine elementaren Invarianten wie Invarianzgruppen und Signaturen kennengelernt haben, befassen wir uns in Kapitel 4 mit einer weiteren fundamentalen Frage über Schnitte: Wie kann man eine Addition von Schnitten definieren? Um dieser Frage nachzugehen, betrachten wir wieder Schnitte angeordneter abelscher Gruppen und untersuchen zunächst in Abschnitt 4.1 folgenden intuitiven Ansatz. Zu zwei echten Schnitten $p$ und $q$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ bilden wir das Paar $(p^L + q^L,\, p^R + q^R)$ von Teilmengen von $G$. Es stellt sich allerdings schnell heraus, daß es sich dabei im allgemeinen nicht um einen Schnitt von $G$ handelt. So betrachten wir die beiden Schnitte $(p+q)_{\text{links}} := (p^L + q^L)^+$ und $(p+q)_{\text{rechts}} := (p^R + q^R)^-$ (Definition 4.1) und fragen, unter welchen Bedingungen beide übereinstimmen. Die wichtige Proposition 4.7 zeigt, daß sich immer Schnitte finden, für die dies nicht der Fall ist. Zwar können wir mit Theorem 4.44 zumindest im Fall einer divisiblen angeordneten abelschen Gruppe genaue Kriterien für das Zusammenfallen des linken und rechten Schnittes geben. Der Beweis benutzt jedoch ein Werkzeug, das wir erst im nachfolgenden Abschnitt bereitstellen, und steht deshalb am Ende von Kapitel 4.

Da der intuitive Versuch Schnitte zu addieren im allgemeinen ein Paar von Schnitten liefert, kann Definition 4.1 nicht zufriedenstellen. Wollen wir die Addition mehrmals hintereinander ausführen oder fragen wir nach der Assoziativität der Addition, so stoßen wir sofort auf eine Vielzahl von Fallunterscheidungen und auf Probleme mit dieser Definition. Zudem läßt sich Definition 4.1 nur mit beträchtlichem formalen Aufwand auf unechte Schnitte ausdehnen. In Abschnitt 4.2 zeigen wir einen Weg auf, der die Addition von Schnitten von angeordneten abelschen Gruppen ohne Einschränkungen ermöglicht. Anstatt die linken oder rechten Hälften der Schnitte zu addieren, addieren wir zu den Schnitten assoziierte konvexe Mengen. Der Ausganspunkt bei dieser Überlegung ist die Tatsache, daß für zwei konvexe Teilmengen $C$ und $D$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ deren Summe

$C+D = \{c+d \mid c \in C,\ d \in D\}$ wieder eine konvexe Teilmenge ist. Auch F.-V. Kuhlmann macht sich diese Beobachtung in [K] zunutze. Er definiert zu einem Schnitt $p$ einer angeordneten abelschen Gruppe die von $p$ erzeugte konvexe symmetrische Menge $\mathrm{CS}(p) := \{g \in G \mid |g| < |p|\}$ und erhält hiermit eine Möglichkeit Schnitte zu addieren. Unsere Methode unterscheidet sich in der Wahl der zu einem Schnitt assoziierten konvexen Menge. Wir gehen dazu bei einer gegebenen angeordneten abelschen Gruppe $G$ zu einer (divisiblen) angeordneten abelschen Obergruppe $\Omega$ über, in der alle Schnitte von $G$ realisiert sind. Das heißt, daß für jeden Schnitt $p$ von $G$ ein Element $\omega \in \Omega$ existiert, so daß $p^L < \omega < p^R$ gilt. In dieser Obergruppe $\Omega$ ist die Menge $\mathrm{Real}_\Omega(p)$ aller Realisierungen eines Schnittes $p$ offensichtlich eine konvexe Teilmenge. Zur Addition zweier Schnitte $p$ und $q$ von $G$ gehen wir zunächst zur Menge $\mathrm{CT}(\Omega)$ aller konvexen Teilmengen von $\Omega$ über und addieren dort die zu $p$ und $q$ assoziierten konvexen Teilmengen (Definition 4.36). Die wichtige Proposition 4.40 zeigt, daß sich beim Zurückziehen der Situation auf die ursprüngliche Gruppe $G$ im wesentlichen wieder das Paar des linken und rechten Schnittes aus der intuitiven Definition ergibt. Somit ist die Addition mittels realisierender Obergruppen verträglich mit der anfangs untersuchten Addition mittels Paaren von Schnitten.

Bevor wir in Abschnitt 4.2.2 die Sinnhaftigkeit einer Definition der Addition von Schnitten mittels realisierender Obergruppen beziehungsweise bei Schnitten angeordneter Körper mittels realisierender Oberkörper aufzeigen, versichern wir uns in Abschnitt 4.2.1 davon, daß diese realisierenden Oberstrukturen auch mit den Begriffen aus Kapitel 1 und 2 harmonieren. So definieren wir zu den Invarianten $G(p)$, $G^*(p)$, $V(p)$, $J(p)$ und $I(p)$ eines Schnittes $p$ eines angeordneten Körpers $K$ mit realisierendem Oberkörper $\Omega$ in naheliegender Weise jeweils eine Entsprechung in $\Omega$ mit dem Index $_\Omega$. Es stellt sich heraus, daß diese Mengen über ihren Entsprechungen in $K$ liegen, also beim Zurückgehen auf $K$ wieder die ursprünglichen Mengen liefern. Diese Beobachtung liefert ein weiteres Argument für die Qualität der Addition von Schnitten mittels realisierender Oberstrukturen.

Bereits in Kapitel 1 haben wir Operationen von Gruppen auf Mengen von Schnitten eingeführt. Man kann diese als die Anwendung elementarer semialgebraischer Abbildungen auf Schnitte betrachten. So stellt sich die Frage, wie man beliebige semialgebraische Abbildungen auf Schnitte angeordneter Körper anwenden kann. Im Fall eines reell abgeschlossenen Körpers gibt uns der aus der reellen algebraischen Geometrie wohlbekannte Monotoniesatz 5.1 die Möglichkeit, die strenge Monotonie oder Konstanz einer semialgebraischen Abbildung in der Umgebung eines Schnittes auszunutzen und die recht naheliegende Definition 5.2 zu machen. Im allgemeinen Fall eines angeordneten Körpers ist dies nicht durchführbar. Denn Beispiel 5.12 zeigt, daß selbst Polynome nicht im allgemeinen konstant oder streng monoton in jedem Schnitt eines angeordneten Körpers sind. Theorem 5.18 liefert uns eine Bedingung, unter der dies jedoch schon gilt. Vielmehr zeigen wir hier, daß rationale Funktionen $f/g \in K(t)$ mit einem angeordneten Körper $K$ konstant oder streng monoton in einem Schnitt $\xi$ von $K$ sind, falls $f$ und $g$ gewisse Gradbedingungen in Abhängigkeit von $\xi$ erfüllen.

Wir gehen noch kurz auf zwei Arbeiten über Schnitte angeordneter Körper ein, nämlich [P] von G.G. Pestov und [K] von F.-V. Kuhlmann.

G.G. Pestov bedient sich in [P] hauptsächlich zweier Kriterien zur Klassifizierung von Schnitten angeordneter Körper, nämlich ob der Schnitt Symmetrie aufweist, und wie sich Polynome in einer Umgebung des Schnittes verhalten. Das Hauptergebnis bezüglich des zweiten Kriteriums finden wir in [P], Theorem 3.2. Während Pestov hier Vorzeichenbedingungen an das Polynom und sämtliche seiner Ableitungen stellt, benötigen wir für unser Theorem 5.18 lediglich eine Gradbedingung. Zumal befinden wir uns in Kapitel 5 in einer etwas allgemeineren Situation, da wir nicht nur Polynome, sondern auch rationale Funktionen behandeln. Pestovs Begriff der Symmetrie läßt sich leicht in unseren Zusammenhang übertragen. So zeigen wir in Abschnitt 1.1, daß ein Schnitt eines angeordneten Körpers genau dann symmetrisch im Sinne von [P] ist, wenn seine (additive) Signatur gleich 0 ist.

Bereits angesprochen haben wir die Arbeit [K]. F.-V. Kuhlmann behandelt dort recht ähnliche Fragen wie wir. So betrachtet er zu einem Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$ ebenfalls die additive und muliplikative Invarianzgruppe sowie den Invarianzbewertungsring von $p$. Viele unserer Aussagen aus Kapitel 1 finden sich auch bei Kuhlmann. Daneben beschäftigt sich Kuhlmann wie wir mit der Frage nach der Addition und Multiplikation von Schnitten, wählt aber wie beschrieben einen etwas anderen Weg. Da im zweiten Teil seiner Arbeit bewertungstheoretische Aspekte im Vordergrund stehen, beschränken sich die Gemeinsamkeiten von [K] mit der vorliegenden Arbeit eher auf die genannten Invarianten eines Schnittes.

Hervorzuheben sind noch die Arbeiten [T1] und [T2] von Tressl. In [T1] werden die grundlegenden Invarianten eines Schnittes eingeführt, wie sie auch wir verwenden. Während bei Tressl im wesentlichen nur reell abgeschlossene Körper auftreten können, legen wir unseren Schwerpunkt auf die allgemeine Betrachtung von Schnitten angeordneter Körper. Ideen aus [T2] gehen bei uns vor allem bezüglich des Signaturbegriffs sowie im Kapitel über die Bewegung von Schnitten ein.

Abschließend möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Manfred Knebusch für die Möglichkeit bedanken, unter seiner Anleitung an einem Thema zu arbeiten, das für mich sehr interessant und motivierend war. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Marcus Tressl, bei dem ich jederzeit ein offenes Ohr fand. Seine zahlreichen, nicht nur inhaltlichen Ratschläge waren mir eine große Hilfe.

# 1. Allgemeines über Schnitte

In diesem ersten Kapitel definieren wir die wichtigsten Begriffe bezüglich Schnitten angeordneter Strukturen und führen grundlegende Eigenschaften auf. Wir beschränken uns zunächst in Abschnitt 1.1 auf den allgemeinen Fall angeordneter abelscher Gruppen mit der Addition als einziger Operation. Danach nehmen wir in Abschnitt 1.2 mit der Multiplikation eine zweite Operation dazu und betrachten Schnitte angeordneter Körper. Hier wissen wir aufgrund unserer Betrachtungen des Gruppenfalles schon alles über die Operationen für sich, machen aber auch schon erste Aussagen über das Verhältnis von Addition und Multiplikation.

Zu Beginn machen wir einige elementare Definitionen, für die wir noch keinerlei Struktur auf der betrachteten angeordneten Menge benötigen.

*Vorbemerkung 1.1.* Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge. Für ein Element $a \in X$ und Teilmengen $M, N \subseteq X$ schreiben wir $a < M$, falls $a < m$ für alle $m \in M$, und $M < N$, falls $m < n$ für alle $m \in M$, $n \in N$. Für ein Element $a \in X$ bezeichnet $|a| := \max\{-a,\, a\}$ den Betrag von $a$.

**Definition 1.2.** Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge. Ein **(verallgemeinerter) (Dedekind-)Schnitt** $p$ von $X$ ist ein Paar $(p^L, p^R)$ von Teilmengen $p^L$ und $p^R$ von $X$, so daß $p^L \cup p^R = X$ und $p^L < p^R$ gilt, das heißt $a < b$ für alle $a \in p^L$, $b \in p^R$. Dabei nennen wir $p^L$ die **linke** und $p^R$ die **rechte Hälfte** von $p$. Die Bezeichnungen $p^L$ und $p^R$ finden wir erstmals bei J.H. Conway, [C]. Ein Schnitt $p$ von $X$ heißt **echt**, wenn $p^L$ und $p^R$ beide nicht leer sind. Ein Schnitt $p$ von $M$ heißt **frei**, wenn er echt ist und weder $p^L$ ein größtes noch $p^R$ ein kleinstes Element enthält.
Wir schreiben $\mathrm{Cuts}(X)$ für die Menge der Schnitte von $X$. Wir ordnen $\mathrm{Cuts}(X)$ an, indem wir für zwei Schnitte $p$, $q \in \mathrm{Cuts}(X)$ definieren:

$$p \leq q :\Leftrightarrow p^L \subseteq q^L.$$

Wir schreiben $\mathrm{DC}(X) := X \cup \mathrm{Cuts}(X)$ und setzen die Anordnung von $\mathrm{Cuts}(X)$ fort, indem wir für ein $x \in X$ und ein $p \in \mathrm{Cuts}(X)$ definieren:

$$x < p :\Leftrightarrow x \in p^L.$$

$\mathrm{DC}(X)$ heißt die **Dedekind-Komplettierung** von $X$. (Untersucht wurde die Vervollständigung teilweise geordneter Mengen mittels Dedekindschnitten bereits von MacNeille in [M]. Baer betrachtet in [Ba] den Dedekindschen Abschluß eines angeordneten Körpers.) Für eine nichtleere Teilmenge $Z \subseteq X$ schreiben wir $Z^-$ für den Schnitt $p$ von $X$ mit $p^L = \{x \in X \mid x < Z\}$ und $Z^+$ für den Schnitt $q$ von $X$ mit $q^R = \{x \in X \mid x > Z\}$. Wir nennen $Z^-$ die **Unterkante** von $Z$ und $Z^+$ die **Oberkante** von $Z$. Im Falle eines einpunktigen $Z = \{a\}$ schreiben wir kurz $a^+ := \{a\}^+$ und $a^- := \{a\}^-$. Für $Z = X$ setzen wir $Z^- =: -\infty_X$ und $Z^+ =: +\infty_X$. Den Index werden wir auch weglassen, wenn es der Zusammenhang erlaubt. Ein Schnitt $p$ von $X$ heißt **prinzipal**, wenn $p$ nicht frei ist, das heißt, wenn $p$ gleich $-\infty$ oder $+\infty$ oder gleich $a^-$ oder $a^+$ für ein $a \in X$ ist.

**Definition/Bemerkung 1.3 (**Erweiterung, Realisierung)**.** Sei $p$ ein Schnitt einer total geordneten Menge $X$ und sei $Y \supseteq X$ eine weitere total geordnete Menge.
a) Falls $q$ ein Schnitt von $Y$ ist, so heißt $q$ eine **Erweiterung von** $p$ **auf** $Y$, falls $q^L \cap X = p^L$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $p = q \restriction X$. $p$ hat stets eine kleinste und eine größte Erweiterung auf $Y$, nämlich die Schnitte $(p^L)^+$ und $(p^R)^-$ von $Y$.
b) Ein Element $y \in Y$ heißt **Realisierung von** $p$, falls $p^L < y < p^R$ gilt. Wir sagen, $p$ **wird in** $Y$ **realisiert** und schreiben $y \models p$. In diesem Fall ist $y \notin X$. Wird $p$ nicht in $Y$ realisiert, so sagen wir: $p$ **ist in** $Y$ **ausgelassen**.
c) Eine Teilmenge $N \subseteq Y$ **liegt über** einer Teilmenge $M \subseteq X$, wenn $N \cap X = M$.
d) Ist $y \in Y \setminus X$, so bezeichnen wir den Schnitt $\big(\{x \in X \mid x < y\}, \{x \in X \mid x > y\}\big)$ von $X$ mit $y \restriction X$. Für ein $x \in X$ setzen wir $x \restriction X := x$.

**Lemma 1.4.** *Sei $X$ eine total geordnete Menge und seien $C$, $D \subseteq X$ konvexe Teilmengen von $X$. Gilt $C^- = D^-$ und $C^+ = D^+$, so ist $C = D$.*

*Beweis.* Sei $c \in C$. Dann ist $c > C^- = D^-$ und $c < C^+ = D^+$, also gibt es Elemente $d_1$, $d_2 \in D$ mit $d_1 \leq c \leq d_2$. Weil $D$ konvex ist, gilt $c \in D$. Das zeigt $C \subseteq D$. Die andere Inklusion gilt aus Symmetriegründen. □

## 1.1. Schnitte angeordneter abelscher Gruppen

**Definition 1.5.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Für einen Schnitt $p$ von $G$ definieren wir den Schnitt $-p$ von $G$ durch

$$-p := (-p^R, -p^L).$$

Wir definieren den **Betrag von** $p$ als

$$|p| := \begin{cases} p & \text{, falls } p > 0 \\ -p & \text{, falls } p < 0. \end{cases}$$

Weiter definieren wir die Operation $+$ der Gruppe $G$ auf $\mathrm{Cuts}(G)$ durch

$$+ : G \times \mathrm{Cuts}(G) \to \mathrm{Cuts}(G)$$
$$g + p := (g + p^L, g + p^R) \quad (g \in G,\, p \in \mathrm{Cuts}(G)).$$

Wir werden dabei gleichwertig sowohl die Schreibweise $g+p$ als auch $p+g$ verwenden.

**Lemma 1.6.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $Z \subseteq G$ eine nichtleere Teilmenge von $G$. Dann gilt*

$$Z^+ = -((-Z)^-) \text{ und } Z^- = -((-Z)^+).$$

*Beweis.* Wir zeigen den ersten Teil der Aussage, indem wir die Gleichheit der beiden rechten Hälften nachrechnen:

$$\big(-((-Z)^-)\big)^R = -\big((-Z)^-\big)^L = -\{g \in G \mid g < -Z\} =$$
$$= -\{g \in G \mid -g > Z\} = \{g \in G \mid g > Z\} = (Z^+)^R.$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt jetzt durch Anwenden des eben Gezeigten auf $-Z$. □

Meistens brauchen wir diese allgemeine Tatsache nur für konvexe Untergruppen, in welchem Falle wir die Aussage etwas einfacher formulieren können.

**Korollar 1.7.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt*

$$-(H^+) = H^-.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt sofort nach Lemma 1.6, weil $H = -H$. □

**Lemma 1.8.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und seien $H_1$, $H_2 \subseteq G$ konvexe Untergruppen von $G$. Ist $H_1^+ = H_2^+$ oder $H_1^- = H_2^-$, so gilt $H_1 = H_2$.*

*Beweis.* Mit $H_1^+ = H_2^+$ folgt auch $H_1^- = -H_1^+ = -H_2^+ = H_2^-$ und mit $H_1^- = H_2^-$ folgt auch $H_1^+ = -H_1^- = -H_2^- = H_2^+$. Die Behauptung folgt mit Lemma 1.4. □

Wir kommen zur ersten fundamentalen Invariante eines Schnittes einer angeordneten abelschen Gruppe.

**Definition 1.9** (Invarianzgruppe eines Schnittes)**.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann definieren wir die **(additive) Invarianzgruppe** von $p$ als die Standgruppe von $p$ bezüglich der Operation $+$

$$G(p) := \{g \in G \mid g + p = p\}.$$

*Bemerkung 1.10.* Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Da zwei Schnitte bereits gleich sind, wenn ihre linken oder rechten Hälften übereinstimmen, haben wir für die Invarianzgruppe $G(p)$ auch die Darstellungen

$$G(p) = \{g \in G \mid g + p^L = p^L\} = \{g \in G \mid g + p^R = p^R\}.$$

Für die Berechnung von Invarianzgruppen ist folgendes Lemma nützlich.

**Lemma 1.11.** *Seien $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $p$ ein Schnitt von $G$ und $g \in G$. Ist $g > 0$, dann gilt $g \in G(p)$ genau dann, wenn $g + p^L \subseteq p^L$ gilt. Ist $g < 0$, dann gilt $g \in G(p)$ genau dann, wenn $g + p^R \subseteq p^R$ gilt.*

*Beweis.* Wir beweisen nur die Aussage für $g > 0$, für $g < 0$ geht der Beweis völlig analog. Sei also $g > 0$ mit $g + p^L \subseteq p^L$. Wegen $g > 0$ gilt auch $g + p^R \subseteq p^R$. Aus $(g + p^L) \cup (g + p^R) = G$ und $g + p^L < g + p^R$ folgt $g + p^L = p^L$ und damit $g \in G(p)$. Die andere Richtung ist trivial. □

**Proposition 1.12.** *Sei $G$ eine angeordnete Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann ist die Invarianzgruppe $G(p)$ eine konvexe Untergruppe von $G$.*

*Beweis.* Daß $G(p)$ eine Untergruppe von $G$ ist, folgt aus der Tatsache, daß $G(p)$ die Standgruppe einer Operation von $G$ auf $\mathrm{Cuts}(G)$ ist. Seien nun Elemente $g \in G(p)$ und $h \in G$ gegeben mit $0 < h < g$. Für alle $x \in p^L$ gilt dann $h + x < g + x \in (g + p)^L = p^L$ und damit $h + x \in p^L$. Damit ist $h + p^L \subseteq p^L$ und nach Lemma 1.11 gilt $h \in G(p)$. □

**Proposition 1.13.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann gilt*

$$G(-p) = G(p),$$

*und für alle $g \in G$ gilt*

$$G(g + p) = G(p).$$

*Beweis.* Die Behauptungen folgen sofort aus den Definitionen. Denn weil $G(p)$ eine Gruppe ist, gilt $g \in G(p)$ genau dann, wenn $-g \in G(p)$ gilt. Das ist aber äquivalent zu $-g + p^L = p^L$, also auch zu $g + (-p^L) = -p^L$. Dies wiederum ist gleichwertig zu $g + (-p)^R = (-p)^R$ oder $g \in G(-p)$.
Für alle $g$, $h \in G$ gilt $h + g + p^L = g + p^L$ genau dann, wenn $h + p^L = p^L$ gilt. Dies zeigt die zweite Behauptung. □

**Definition 1.14 (**Oberkante der Invarianzgruppe**).** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann setzen wir

$$\hat{p} := G(p)^+.$$

**Proposition 1.15.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann gilt*

$$\hat{p} \leq |p|.$$

*Beweis.* Da nach Proposition 1.13 $G(p) = G(-p)$ gilt, können wir ohne Einschränkung $p > 0$ annehmen. Sei also $x \in p^R$, mit anderen Worten $x > p$. Dann ist $0 < p$, aber $0 + x > p$, das heißt $x \notin G(p)$. Wegen $x > 0$ folgt $x > \hat{p}$. Wir erhalten also $(\hat{p})^R \supseteq p^R$. Dies ist äquivalent zu $(\hat{p})^L \subseteq p^L$ oder $\hat{p} \leq p$. □

**Lemma 1.16.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $Z \subseteq G$ eine nichtleere Teilmenge von $G$. Sei $g \in G$ mit $g > 0$. Dann ist $g \in G(Z^+)$ genau dann, wenn $g + z < Z^+$ für alle $z \in Z$ gilt.*

*Beweis.* Ist $g \in G(Z^+)$, so gilt für alle $z \in Z$ natürlich $g + z < g + Z^+ = Z^+$. Sei umgekehrt $g + z < Z^+$ für alle $z \in Z$. Für ein beliebiges $x < Z^+$ existiert nach Definition von $Z^+$ ein $z(x) \in Z$ mit $x \leq z(x)$ und damit ist $g + x \leq g + z(x) < Z^+$. Deshalb ist $g + (Z^+)^L \subseteq (Z^+)^L$ und mit Lemma 1.11 folgt $g \in G(Z^+)$. □

**Lemma 1.17.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $Z \subseteq G$ eine nichtleere Teilmenge von $G$. Dann gilt für alle $g \in G$*

$$(g + Z)^+ = g + Z^+.$$

*Beweis.* Für ein $g \in G$ zeigen wir die Gleichheit der rechten Hälften:

$$((g + Z)^+)^R = \{h \in G \mid h > g{+}Z\} = g{+}\{h \in G \mid h > Z\} = g{+}(Z^+)^R = (g + Z^+)^R.$$

□

**Proposition 1.18.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und sei $H \subseteq G$ eine konvexe Untergruppe von $G$. Dann gilt*

$$G(H^+) = H.$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “: Sei ohne Einschränkung $g \in G(H^+)$ mit $g \geq 0$. Dann gilt $g + H^+ = H^+$ und somit ist $0 \leq g + 0 < g + H^+ = H^+$. Da $H$ konvex ist, folgt $g \in H$.
„ $\supseteq$ “: Sei ohne Einschräkung $h \in H$ mit $h > 0$. Für alle $h' \in H$ ist natürlich $h + h' < H^+$ und damit ist $h \in G(H^+)$ nach Lemma 1.16. □

Das folgende Lemma verallgemeinert Lemma 1.8.

**Lemma 1.19.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, seien $H_1$, $H_2 \subseteq G$ konvexe Untergruppen von $G$ und sei $g \in G$. Ist $g + H_1^+ = H_2^+$, so gilt $H_1 = H_2$.*

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung $H_1 \subseteq H_2$. Ist $g \leq 0$, so gilt $H_2^+ = g + H_1^+ \leq H_1^+ \leq H_2^+$. Damit gilt Gleichheit überall und mit Lemma 1.8 folgt $H_1 = H_2$. Ist $g > 0$, so gilt die Abschätzung $0 < g + 0 < g + H_1^+ = H_2^+$. Da $H_2$ eine konvexe Untergruppe von $G$ ist, folgt $g \in H_2$. Nach Proposition 1.18 gilt dann $g \in G(H_2^+)$ und somit $H_1^+ = H_2^+ - g = H_2^+$. Wieder mit Lemma 1.8 folgt $H_1 = H_2$. □

Wir führen nun zu einem Schnitt $p$ einer angeordneten abelschen Gruppe eine weitere Invariante ein, nämlich die Signatur von $p$. Dafür benötigen wir den Begriff der divisiblen Hülle einer angeordneten abelschen Gruppe.

**Definition/Bemerkung 1.20 (**Divisible Hülle**).** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Dann definieren wir

$$\mathrm{dh}(G) := G \times \mathbb{N}/\sim$$

mit $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ der Menge der natürlichen Zahlen und der Äquivalenzrelation

$$(g, n) \sim (h, k) :\Leftrightarrow k \cdot g = n \cdot h \quad ((g, n), (h, k) \in G \times \mathbb{N}).$$

Wir schreiben $\frac{g}{n}$ für die Äquivalenzklassen $(g, n)$ bezüglich $\sim$. Mit der Addition

$$\frac{g}{n} + \frac{h}{k} := \frac{kg + nh}{kn} \quad (\frac{g}{n}, \frac{h}{k} \in \mathrm{dh}(G))$$

ist $\mathrm{dh}(G)$ eine abelsche Gruppe. Die Gruppe $G$ ist via

$$G \hookrightarrow \mathrm{dh}(G),\ g \mapsto \frac{g}{1} \quad (g \in G)$$

eingebettet in $\mathrm{dh}(G)$. $\mathrm{dh}(G)$ ist divisibel (das heißt $n \cdot \mathrm{dh}(G) = \mathrm{dh}(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}$), da für alle $\frac{h}{k} \in \mathrm{dh}(G)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\frac{h}{k} = n \cdot \frac{h}{nk}$ gilt. Wir definieren auf $\mathrm{dh}(G)$ eine Anordnung durch

$$\frac{g}{n} \leq \frac{h}{k} :\Leftrightarrow k \cdot g \leq_G n \cdot h \quad (\frac{g}{n}, \frac{h}{k} \in \mathrm{dh}(G)).$$

Wir rechnen leicht nach, daß $\mathrm{dh}(G)$ damit zu einer angeordneten abelschen Gruppe wird. Seien nämlich $\frac{g}{n}, \frac{h}{k}, \frac{i}{l} \in \mathrm{dh}(G)$ und sei $\frac{g}{n} \leq \frac{h}{k}$. Dann ist nach Definition $kg \leq nh$ und damit auch $kl^2g = nl^2h$. Daraus folgt $kl^2g + nkli \leq nl^2h + nkli$ oder $kl(lg + ni) \leq nl(lh + ki)$. Das bedeutet aber $\frac{g}{n} + \frac{i}{l} = \frac{lg+ni}{nl} \leq \frac{lh+ki}{kl} = \frac{h}{k} + \frac{i}{l}$.

$\mathrm{dh}(G)$ ist also eine divisble angeordnete abelsche Obergruppe von $G$, deren Anordnung die Anordnung von $G$ fortsetzt. Da für jede divisible angeordnete abelsche Obergruppe $H$ von $G$, deren Ordnung die von $G$ fortsetzt, genau ein Homomorphismus $\varphi$ von angeordneten Gruppen $\mathrm{dh}(G) \xrightarrow{G} H$ über $G$ existiert, so daß folgendes Diagramm kommutiert,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dh}(G) \arrow[rr, "\varphi"] & & H \\ & G \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

heißt $\mathrm{dh}(G)$ <u>die</u> **divisible Hülle von** $G$.

*Bemerkung 1.21.* Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Dann ist die Abbildung

$$\begin{gathered} G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{dh}(G) \\ g \otimes \tfrac{r}{s} \mapsto \tfrac{rg}{s} \quad (g \otimes \tfrac{r}{s} \in G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \end{gathered}$$

mit der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ein kanonischer Isomorphismus. Für Details verweisen wir auf [B], 7.2, Satz 8 (ii), S. 304. Wir identifizieren von nun an $\mathrm{dh}(G)$ mit $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

*Bemerkung 1.22.* Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und sei $H \subseteq G$ eine konvexe Untergruppe von $G$. Dann wird durch

$$g \bmod H \geq 0 :\Leftrightarrow \text{es existiert ein } h \in H \text{ mit } g \geq h$$

eine Anordnung auf der Restklassengruppe $G/H$ definiert. Für ein $g \in G$ gilt

$$g \bmod H > 0 \text{ genau dann, wenn } g > H.$$

Denn es gilt $g \bmod H > 0$ genau dann, wenn $g \bmod H \geq 0$ und $g \bmod H \neq 0$, genau dann, wenn ein $h \in H$ existiert mit $g \geq h$ und $g \notin H$, genau dann, wenn $g > H$, Letzteres, weil $H$ konvex ist.

Wir zitieren ein wichtiges Lemma aus [T2], das uns die Definition der Signatur eines Schnittes einer angeordneten abelschen Gruppe im Anschluß ermöglicht.

**Lemma 1.23** (Tressl). *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $H \subseteq G$ eine konvexe Untergruppe von $G$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(i) $H^+$ besitzt eine Realisierung in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

*(ii) $G/H$ besitzt ein kleinstes positives Element.*

*(iii) Es existiert ein* $g \in G$ *mit* $H^+ = g + H^-$.

*(iv) Es existiert ein* $g \in G$ *mit* $g > H$, *so daß für alle* $g_0 \in G$ *mit* $H < 2g_0$ *gilt, daß* $2g_0 > g$ *ist.*

*(v) Es existiert eine angeordnete abelsche Gruppe* $L \supseteq G$, *so daß die größte Erweiterung von* $H^+$ *auf* $L$ *nicht die Oberkante einer konvexen Untergruppe von* $L$ *ist.*

*Für ein* $g \in G$ *gilt in diesem Fall* $H^+ = g + H^-$ *genau dann, wenn* $g/2 \models H^+$ *gilt, genau dann, wenn* $g \bmod H$ *das kleinste positive Element von* $G/H$ *ist.*

*Beweis.* Den (etwas knapperen) Beweis finden wir in der vorliegenden Form in [T2]. Wegen der grundlegenden Bedeutung des Lemmas führen wir ihn dennoch an.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\frac{g'}{k} \in G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ eine Realisierung von $H^+$. Dann gilt auch $\frac{g'}{2^k} \models H^+$. Wir setzen $l := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{g'}{2^n} \models H^+\}$. Ist $\frac{g'}{2^{l-1}} \in G$, so setzen wir $g := \frac{g'}{2^{l-1}}$ und erhalten $g/2 \models H^+$. Ist $\frac{g'}{2^{l-1}} \notin G$, so existiert wegen $\frac{g'}{2^{l-1}} \not\models H^+$ ein $x \in G$ mit $H < x < \frac{g'}{2^{l-1}}$. Dann gilt $H < \frac{x}{2} < \frac{g'}{2^l}$, also ist $x \in G$ mit $\frac{x}{2} \models H^+$. In jedem Fall erhalten wir ein $g \in G$ mit $g/2 \models H^+$.
Angenommen, es gilt $0 < a \bmod H < g \bmod H$ für ein $a \in G$. Dann ist $a > H$ und $g - a > H$, also $a > g/2$ und $g - a > g/2$. Aber aus $g - a > g/2$ folgt $2g - 2a > g$, also $g > 2a$, ein Widerspruch zu $a > g/2$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $g \bmod H$ das kleinste positive Element von $G/H$. Ist $a \in G$ mit $a > g + H^-$, dann ist $a \geq g + h$ für ein $h \in H$. Da $g > H$ ist, gilt auch $a > H$. Dies zeigt $H^+ \leq g + H^-$. Ist umgekehrt $a \in G$ mit $a > H$, dann ist $a \bmod H \geq g \bmod H$, also $(a-g) \bmod H \geq 0$, also existiert ein $h \in H$ mit $a - g \geq h$. Dies zeigt $H^+ \geq g + H^-$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $g \in G$ mit $H^+ = g + H^-$ und sei $g_0 \in G$ mit $H < 2g_0$. Dann ist $g_0 > H$ und $g - h \leq g_0$ für ein $h \in H$. Daraus folgt $2g_0 \geq g_0 + g - h = g + (g_0 - h) > g$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $g \in G$ mit $g > H$ mit der Eigenschaft, daß $2g_0 > g$ für alle $g_0 \in G$ mit $2g_0 > H$. Dann ist auch $g/2 > H$ und $g/2 < g_0$ für alle $g_0 \in G$ mit $g_0 > H$, also gilt $g/2 \models H^+$.

(i) $\Rightarrow$ (v): $L := G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ liefert das Gewünschte.

(v) $\Rightarrow$ (i): Wir wählen ein $l \in L$ mit $l \models H^+$, so daß $2l$ die Oberkante $H^+$ nicht realisiert. Dann existiert ein $g \in G$ mit $H < g \leq 2l$ und $g/2 \models H^+$.
Unser Beweis zeigt gleichzeitig den Zusatz. □

**Definition 1.24 (**Signatur**).** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann definieren wir die **Signatur von** $p$ als

$$\operatorname{sign}(p) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p = g + \hat{p} \text{ für ein } g \in G \text{ und } \hat{p} \text{ nicht realisiert ist in } G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ -1 & \text{falls } p = g - \hat{p} \text{ für ein } g \in G \text{ und } \hat{p} \text{ nicht realisiert ist in } G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls kein } g \in G \text{ existiert mit } p = g + \hat{p} \text{ oder } p = g - \hat{p} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beispiel 1.25.* Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir erinnern an die Definitionen $-\infty := G^-$ und $+\infty := G^+$. Da $G(G^-) = G(G^+) = G$ gilt und $G^+$ nicht realisiert ist in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, gilt für diese beiden Schnitte

$$\operatorname{sign}(-\infty) = -1 \text{ und } \operatorname{sign}(+\infty) = +1.$$

**Korollar 1.26** (Tressl)**.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Ist $\operatorname{sign}(p) = 0$, so ist $\hat{p}$ nicht realisiert in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

*Beweis.* Auch diesen Beweis zitieren wir aus [T2]. Angenommen, $\hat{p}$ ist realisiert in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dann existiert nach Lemma 1.23, angewandt auf $H = G(p)$, ein $g \in G$, so daß $g \bmod G(p)$ das kleinste positive Element in $G/G(p)$ ist. Wegen $g > G(p)$ existiert ein $h \in G$ mit $h < p < h + g$. Wir zeigen $p = h + \hat{p}$. Die Abschätzung $h + \hat{p} \leq p$ ist klar. Sei umgekehrt $g_1 \in G$ mit $h + \hat{p} < g_1$. Dann ist $g_1 - h > \hat{p}$, also $(g_1 - h) \bmod G(p) > 0$ in $G/G(p)$. Deshalb ist $(g_1 - h) \bmod G(p) \geq g \bmod G(p)$ und es existiert ein $a \in G(p)$ mit $g_1 - h \geq g + a$. Es folgt $g_1 \geq h + g + a > p + a = p$. □

*Bemerkung 1.27.* Für einen Schnitt $p$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ sagt die Signatur $\operatorname{sign}(p)$ im wesentlichen aus, ob sich $p$ als Translat der Ober- oder Unterkante seiner Invarianzgruppe darstellen läßt. Schreibt sich $p$ als Translat der Ober- oder Unterkante einer beliebigen konvexen Untergruppe $H$ von $G$, so folgt bereits $H = G(p)$. Denn ist zum Beispiel $p = g + H^+$ mit einem $g \in G$, so liefern uns die Propositionen 1.13 und 1.18 die Gleichheit $G(p) = G(g + H^+) = G(H^+) = H$.

Die folgende Aussage ist nicht schwer zu zeigen, dennoch aber recht wichtig. Zum einen verdeutlicht sie den engen Zusammenhang zwischen den Signaturen $+1$ und $-1$ und erlaubt uns oftmals, uns auf positive Schnitte von angeordneten abelschen Gruppen zu beschränken.

**Proposition 1.28.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Ist $\operatorname{sign}(p) \neq \infty$, so gilt*

$$\operatorname{sign}(-p) = -\operatorname{sign}(p).$$

*Ist $\operatorname{sign}(p) = \infty$, so gilt $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sign}(-p)$.*

*Beweis.* Der Zusatz ist wegen $\hat{p} = \widehat{(-p)}$ klar. Sei also $\operatorname{sign}(p) \neq \infty$ und damit auch $\operatorname{sign}(-p) \neq \infty$. In dieser Situation gilt genau dann $\operatorname{sign}(p) = 1$, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $p = g + G(p)^+$, genau dann, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $-p = -g - G(p)^+ = -g + G(p)^- = -g + G(-p)^-$, also genau dann, wenn $\operatorname{sign}(-p) = -1$ gilt. Damit folgt die Behauptung für $\operatorname{sign}(p) \in \{\pm 1\}$. Dann muß sie aber auch im Falle $\operatorname{sign}(p) = 0$ gelten. □

An dieser Stelle weisen wir auf eine Arbeit hin, in der die Signatur eines Schnittes eines angeordneten Körpers implizit auftaucht. G.G. Pestov definiert in [P] den Begriff eines symmetrischen Schnittes und benutzt ihn, um Schnitte angeordneter Körper zu klassifizieren. Wir zeigen, daß ein solcher symmetrischer Schnitt bei uns gerade einem Schnitt mit Signatur 0 entspricht.

**Definition 1.29** (Pestov)**.** Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p = (p^L, p^R)$ ein Schnitt von $K$.
a) Die linke Hälfte $p^L$ heißt **lang**, wenn es für jedes $a < p$ ein $a_1 < p$ gibt, so daß $(a_1 + (a_1 - a)) > p$ gilt. Ebenso heißt die rechte Hälfte $p^R$ **lang**, wenn es für jedes $b > p$ ein $b_1 > p$ gibt, so daß $(b_1 + (b_1 - b)) < p$ gilt. Eine Hälfte $p^L$ oder $p^R$ heißt **kurz**, wenn sie nicht lang ist.
b) Der Schnitt $p$ heißt **symmetrisch**, wenn $p^L$ und $p^R$ lang sind.

Wir zeigen, wie wir die Begriffe „kurz“, „lang“ und „symmetrisch“ aus Definition 1.29 mittels unseres Signaturbegriffs ausdrücken können.

**Lemma 1.30.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann gilt*

$$\begin{array}{lllll} (p^L \textit{ ist lang} \Leftrightarrow \operatorname{sign}(p) \neq 1) & \textit{und} & (p^L \textit{ ist kurz} \Leftrightarrow \operatorname{sign}(p) = 1) & \textit{sowie} \\ (p^R \textit{ ist lang} \Leftrightarrow \operatorname{sign}(p) \neq -1) & \textit{und} & (p^R \textit{ ist kurz} \Leftrightarrow \operatorname{sign}(p) = -1). & \end{array}$$

*Beweis.* Wir zeigen die erste Äquivalenzaussage, die restlichen drei folgen dann sofort.
Da $(K, +)$ divisibel ist, ist $\hat{p}$ nicht realisiert in $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = K$ und damit gilt $\operatorname{sign}(p) \neq \infty$. „ $\Leftarrow$ “: Sei $a < p$. Dann gilt auch ohne weitere Voraussetzung $a + \hat{p} \leq p$. Wegen $\operatorname{sign}(p) \neq 1$ gilt sogar $a + \hat{p} < p$, das heißt, es existiert ein $a + \hat{p} < b < p$. Wir erhalten $b - a > \hat{p}$ und somit die Existenz eines Elements $b' < p$ mit $b' + (b - a) > p$. Wir setzen $c := \max\{b, b'\}$. Dann gilt $c < p$ und $c + (c - a) \geq b' + (b - a) > p$. Da $a$ beliebig war, ist $p^L$ lang. „ $\Rightarrow$ “: Wir nehmen an, daß es ein $a \in K$ gibt mit $p = a + \hat{p}$. Dann ist $a < p$ und für alle $b < p$ gibt es ein $g(b) \in G(p)$ mit $b \leq a + g(b)$. Deshalb gilt für alle $b < p$ die Abschätzung $(b + (b - a)) \leq a + g(b) + a + g(b) - a = a + 2g(b) < p$. Dies bedeutet aber gerade, daß $p^L$ kurz ist, was ein Widerspruch ist.
Die zweite Aussage ist lediglich eine Umformulierung der ersten. Wir sehen weiter leicht ein, daß $p^R$ genau dann lang ist, wenn $(-p)^L$ lang ist. Damit erhalten wir die dritte Äquivalenz aus der ersten, da nach Proposition 1.28 $\operatorname{sign}(-p) = -\operatorname{sign}(p)$ gilt. Die vierte Aussage ist wieder gleichbedeutend mit der dritten. □

**Korollar 1.31.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann ist $p$ genau dann symmetrisch, wenn $p$ Signatur* $\operatorname{sign}(p) = 0$ *besitzt.*

Wir zitieren noch eine Aussage aus [T2], die uns angibt, wie sich für Erweiterungen eines Schnittes einer angeordneten abelschen Gruppe die zugehörigen Invarianzgruppen in Abhängigkeit von der Signatur des ursprünglichen Schnittes verhalten. Die Proposition wird vor allem im Abschnitt 4.2.1 über realisierende Obergruppen und Oberkörper sehr nützlich sein. Deshalb werden wir auch in diesem Fall den Beweis (leicht modifiziert) anführen statt nur auf die Quelle zu verweisen.

**Proposition 1.32** (Tressl)**.** *Sei $G \subseteq H$ eine Erweiterung von angeordneten abelschen Gruppen und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann gilt:*

(i) *Falls $s$ eine Erweiterung von $p$ auf $H$ ist, so gilt $G(s) \cap G \subseteq G(p)$.*

(ii) *Falls $s$ die kleinste oder größte Erweiterung von $p$ auf $H$ ist, so ist $\hat{s}$ die kleinste oder größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$.*

(iii) *Falls $p$ in $H$ nicht realisiert ist und $s$ die eindeutige Erweiterung von $p$ auf $H$ ist, so ist $\hat{s}$ die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$. Falls zusätzlich* $\operatorname{sign}(p) = 0$ *gilt, dann ist auch* $\operatorname{sign}(s) = 0$.

(iv) *Sei* $\operatorname{sign}(p) = 0$ *und seien $q$ und $r$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $H$. Dann ist $\hat{q} = \hat{r}$ die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$, und für jede Realisierung $h$ von $p$ in $H$ gilt $q = h - \hat{q}$, $r = h + \hat{r}$ und $r = 2h - q$.*

(v) *Sei* $\operatorname{sign}(p) = 1$ *und seien $q$ und $r$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $H$. Dann ist $\hat{q}$ die kleinste Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$ und $\hat{r}$ ist die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$.*

(vi) *Sei* $\operatorname{sign}(p) = -1$ *und seien $q$ und $r$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $H$. Dann ist $\hat{q}$ die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$ und $\hat{r}$ ist die kleinste Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$.*

(vii) *Sei* $\operatorname{sign}(p) = \infty$ *und sei $g \in G$, so daß $g \bmod G(p)$ das kleinste positive Element von $G/G(p)$ ist. Seien $q$ und $r$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $H$. Dann ist $\hat{q} = \hat{r}$ die kleinste Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$ und es gilt $\hat{r} = g - \hat{q}$.*

*Beweis.* (i) Sei $s$ eine Erweiterung von $p$ auf $H$. Ist $g \in G(s) \cap G$, dann gilt $g + p^L = g + (s^L \cap G) = (g + s^L) \cap G = s^L \cap G = p^L$, also $g \in G(p)$.

Zwischenbehauptung: Ist $s$ die kleinste oder größte Erweiterung von $p$ auf $H$ ist, so ist $\hat{s}$ eine Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$.

Beweis dazu: Sei $g \in G(p)$ mit $g > 0$. Ist $s = (p^L)^+$, so ist $g + s^L \subseteq s^L$. Ist $s = (p^R)^-$, so ist $-g + s^R \subseteq s^R$. Mit Lemma 1.11 gilt immer $g \in G(s)$. Dies zeigt $\hat{p}^L \subseteq \hat{s}^L \cap G$. Nach (i) gilt $\hat{s}^L \cap G \subseteq \hat{p}^L$. Insgesamt folgt die Zwischenbehauptung.

(iii) Sei $h \in H$ mit $h + s > s$. Da $p$ in $H$ nicht realisiert ist, existiert ein $g_1 \in G$ mit $g_1 < p$ und $h + g_1 > s$. Aus demselben Grund existiert auch ein $g_2 \in G$ mit $h + g_1 \geq g_2 > s$. Dann ist $h \geq g_2 - g_1 > G(p)$, denn es gilt $g_1 + (g_2 - g_1) = g_2 > p$. Damit kann $h$ keine Realisierung von $\hat{p}$ sein. Mit der Zwischenbehauptung folgt jetzt, daß $\hat{s}$ die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$ ist.

Sei nun $p$ nicht realisiert in $H$ und zusätzlich $\operatorname{sign}(p) = 0$. Wir nehmen an, daß es ein $h \in H$ gibt mit $s = h + \hat{s}$. Da $p$ in $H$ ausgelassen ist, gibt es ein $g \in G$ mit $h \leq g < p$. Damit folgt $s = g + \hat{s}$ und $p = g + \hat{p}$, was nicht sein kann. Ebenso auf einen Widerspruch führt die Annahme, daß es ein $h \in H$ gibt mit $s = h - \hat{s}$. Das zeigt $\operatorname{sign}(s) = 0$.

(iv) Wegen Korollar 1.26 und Lemma 1.23 (v) ist die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$ die Oberkante einer konvexen Untergruppe $H_0$ von $H$. Nach der Zwischenbehauptung sind $\hat{q}$ und $\hat{r}$ Erweiterungen von $\hat{p}$ auf $H$. Falls keine Realisierung von $\hat{p}$ in $H_0$

und damit in $H$ existiert, so ist $\hat{q} = \hat{r}$ die eindeutige Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$.

Sei andernfalls $h_0 \in H_0$ eine Realisierung von $\hat{p}$. Da $\operatorname{sign}(p) = 0$ und $k \cdot h_0 \in H_0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, ist $p$ nicht in der von $G$ und $h_0$ erzeugten Untergruppe $G(h_0) \subseteq H$ realisiert. Sei $s$ die eindeutige Erweiterung von $p$ auf $G(h_0)$. Dann sind $q$ und $r$ die kleinste und die größte Erweiterung von $s$ auf $H$. Nach Teil (iii) gilt $h_0 + s = s$. Nach der Zwischenbehauptung angewandt auf $s$ erhalten wir $h_0 + q = q$ und $h_0 + r = r$. Das zeigt $\hat{q} = \hat{r} = H_0^+$.

Sei jetzt $h \in H$ eine Realisierung von $p$. Wir wissen bereits $h + H_0^+ \leq r$. Angenommen, es existiert ein $h_1 \in H$ mit $h + H_0 < h_1 < r$. Dann ist $h_1 - h$ keine Realisierung von $\hat{p}$, weil $H_0^+$ die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $H$ ist. Also existiert ein $g \in G$ mit $h_1 - h \geq g > \hat{p}$. Es gilt $h + g \leq h_1$, aber $h + g$ realisiert $p$ nicht, weil $g > \hat{p}$ ist und somit ein $x \in G$ mit $x < p < h$ und $p < x + g < h + g$ existiert. Dies ergibt einen Widerspruch. Analog können wir $q = h - \hat{q}$ zeigen und erhalten schließlich auch die Gleichung $r = h + \hat{r} = h + \hat{q} = h + h - q = 2h - q$.
(v), (vi) und (vii) sind direkte Folgerungen aus Lemma 1.23. (ii) folgt mit (iv)-(vii). □

## 1.2. Schnitte angeordneter Körper

In diesem Abschnitt betrachten wir Schnitte angeordneter Körper. Wir definieren eine multiplikative Entsprechung zur (additiven) Invarianzgruppe und führen den Invarianzbewertungsring als weitere wichtige Invariante eines Schnittes eines angeordneten Körpers ein.

**Definition/Bemerkung 1.33.** Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $p > 0$, dann betrachten wir $p$ als Schnitt der angeordneten abelschen Gruppen $(K, +)$ und $(K^{>0}, \cdot)$. Für alle $a \in K^{>0}$ haben wir analog zu Definition 1.5 den Schnitt

$$a \cdot p = (a \cdot p^L,\, a \cdot p^R).$$

Für Schnitte $p$ von $K$ mit $p < 0$ definieren wir für alle $a \in K^{>0}$

$$a \cdot p := -(a \cdot (-p)) = (a \cdot p^L,\, a \cdot p^R).$$

Für beliebige Schnitte $p$ von $K$ definieren wir für alle $a \in K^{>0}$

$$(-a) \cdot p = -(a \cdot p).$$

Weiter definieren wir analog zur additiven Definition 1.5 für einen Schnitt $p > 0$ von $K^{>0}$ oder einen Schnitt $p < 0$ von $K^{<0}$ den Schnitt $\frac{1}{p}$ von $K^{>0}$ beziehungsweise von $K^{<0}$ durch

$$\frac{1}{p} := (\frac{1}{p^R}, \frac{1}{p^L}).$$

Wir können den Schnitt $\frac{1}{p}$ von $K^{>0}$ beziehungsweise $K^{<0}$ auch jeweils als Schnitt von $K$ auffassen. Dann gilt $\frac{1}{p} = -\frac{1}{(-p)}$.

**Lemma 1.34.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $Z \subseteq K$ eine Teilmenge von $K$ mit $Z \cap K^{>0} \neq \emptyset$. Dann gilt für alle $a \in K^{>0}$ und alle $b \in K$*

$$(a \cdot Z + b)^+ = a \cdot Z^+ + b.$$

*Beweis.* Da $Z \cap K^{>0} \neq \emptyset$ sowie $a > 0$ gilt und wir nur Oberkanten betrachten, können wir ohne Einschränkung $Z \subseteq K^{>0}$ annehmen. Dann folgt die Behauptung nach Lemma 1.17, einmal additiv und einmal multiplikativ angewandt. □

**Proposition 1.35.** *Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Dann gilt für alle $a \in K^* := K \setminus \{0\}$*

$$G(a \cdot p) = a \cdot G(p).$$

*Beweis.* Sei zunächst $a > 0$. Dann gilt

$$g \in G(ap) \Leftrightarrow ap^L = g + ap^L \Leftrightarrow p^L = \tfrac{1}{a}(g + ap^L) = \tfrac{g}{a} + p^L \Leftrightarrow g \in aG(p).$$

Für ein Element $a < 0$ gilt nach Proposition 1.13 und dem gerade Gezeigten $G(ap) = G(-(ap)) = G((-a)p) = -aG(p) = aG(p)$. □

**Definition 1.36 (**Invarianzbewertungsring einer Gruppe**).** Sei $K$ ein angeordneter Körper und $G \subseteq K$ eine konvexe Untergruppe von $(K, +)$. Dann definieren wir den **Invarianzbewertungsring von** $G$ als

$$V(G) := \{a \in K \mid a \cdot G \subseteq G\}.$$

**Proposition 1.37.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $G \subseteq K$ eine konvexe Untergruppe von $(K, +)$. Dann ist $V(G)$ ein konvexer Bewertungsring von $K$.*

*Beweis.* Trivialerweise ist $V(G)$ ein Teilring von $K$. Sei $0 < a < b$ mit $b \in V(G)$ und $a \in K$. Dann sind mit $G$ auch $a \cdot G$ und $b \cdot G$ konvexe Untergruppen von $K$ und es gilt $a \cdot G \subseteq b \cdot G \subseteq G$. Das zeigt $a \in V(G)$ und damit die Konvexität von $V(G)$. Als konvexer Teilring von $K$ ist $V(G)$ nach [KS], Kap. II, §2, Satz 2, S. 55, Bewertungsring. □

**Bezeichnung 1.38.** In der Situation von Proposition 1.37 ist $V(G)$ ein Bewertungsring und damit nach [KS], Kap. II, §2, Satz 1, S. 55, ein lokaler Ring. Wir schreiben

$$m(G) := V(G) \setminus V(G)^*$$

für das eindeutige maximale Ideal von $V(G)$, wobei $V(G)^*$ die Einheitengruppe von $V(G)$ bezeichnet.

**Definition 1.39 (**Invarianzbewertungsring eines Schnittes**).** Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Wir definieren den **Invarianzbewertungsring von** $p$ als den Invarianzbewertungsring seiner Invarianzgruppe,

$$V(p) := V(G(p)).$$

Sein (eindeutiges) maximales Ideal bezeichnen wir mit

$$m(p) = V(p) \setminus V(p)^*,$$

wobei wieder $V(p)^*$ die Einheitengruppe von $V(p)$ bezeichnet.

Zwischen Invarianzbewertungsring eines Schnittes und dem zugehörigen maximalen Ideal haben wir folgende Beziehung für die Kanten.

**Proposition 1.40.** *Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Dann gilt*

$$m(p)^+ = \frac{1}{V(p)^+} \text{ und } m(p)^- = \frac{1}{V(p)^-}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$0 < x < m(p)^+ \Leftrightarrow 0 < x \in m(p) = V(p) \setminus V(p)^* \Leftrightarrow \tfrac{1}{x} > V(p) \Leftrightarrow x < \tfrac{1}{V(p)^+}.$$

Richtig gelesen folgt die zweite Aussage jetzt sofort wegen $m(p)^- = -m(p)^+ = -\frac{1}{V(p)^+} = \frac{1}{-V(p)^+} = \frac{1}{V(p)^-}$. □

**Proposition 1.41.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Für alle $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ und alle $b \in K$ gilt dann*

$$V(ap + b) = V(p).$$

*Beweis.* Nach Definition ist $V(ap+b) = \{c \in K \mid cG(ap+b) \subseteq G(ap+b)\}$. Nach den Propositionen 1.13 und 1.35 gilt $G(ap+b) = G(ap) = aG(p)$. Damit folgt die Behauptung. □

**Definition 1.42** (Multiplikative Invarianzgruppe)**.** Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Wir definieren die **multiplikative Invarianzgruppe von** $p$ als

$$G^*(p) := \{a \in K^{>0} \mid a \cdot p = p\}.$$

Also ist $G^*(p)$ die Invarianzgruppe von $|p|$ bezüglich $(K^{>0}, \cdot)$, insbesondere gilt $G^*(p) \subseteq K^{>0}$.

**Proposition 1.43.** *Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Dann gilt*

$$G^*(-p) = G^*(p)$$

*und damit für alle $a \in K^* = K \setminus \{0\}$*

$$G^*(ap) = G^*(p).$$

*Beweis.* Wir bemerken, daß $G^*(p)$ und $G^*(-p) > 0$ gilt. Somit gilt

$$a \in G^*(-p) \Leftrightarrow a(-p)^L = -ap^R = (-p)^L = -p^R \Leftrightarrow ap^R = p^R \Leftrightarrow a \in G^*(p).$$

Das zeigt die erste Behauptung.
Für $a > 0$ und $p > 0$ ist die zweite Behauptung gerade die multiplikative Version von Propostion 1.13. Anhand von Definition 1.33 und der ersten Behauptung folgt der Rest jetzt leicht.
Für $a > 0$ und $p < 0$ ist $G^*(ap) = G^*(-(ap)) = G^*(a(-p)) = G^*(-p) = G^*(p)$.
Für $a < 0$ ist $G^*(ap) = G^*(-(ap)) = G^*((-a)p) = G^*(p)$, nach den ersten zwei Fällen. □

**Proposition 1.44.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $G \subseteq K$ eine konvexe Untergruppe von $(K, +)$. Dann gilt für die positiven Einheiten $V(G)^{*>0}$ von $V(G)$*

$$V(G)^{*>0} = G^*(G^+).$$

*Beweis.* Falls $G = \{0\}$ die triviale Gruppe ist, so sehen wir leicht ein, daß $V(G)^{*>0} = K^{>0} = G^*(G^+)$ gilt. Sei also ohne Einschränkung $\{0\} \subsetneq G$. Offensichtlich gilt $V(G)^{*>0} = \{a \in K^{>0} \mid a \cdot G = G\} = \{a \in K^{>0} \mid a \cdot G^{>0} = G^{>0}\}$. Wir können ohne Einschränkung nur Elemente größer 1 betrachten. Dann liefert die multiplikativ gelesene Version von Lemma 1.16 angewandt auf die konvexe Menge $G^{>0} \subseteq (K^{>0}, \cdot)$ die Behauptung. □

**Bezeichnung 1.45.** Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann definieren wir

$$\tilde{p} := G^*(p)^+ - 1.$$

**Lemma 1.46.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

*(i)* $2 \in G^*(p)$.

*(ii)* $|p| = \hat{p}$.

*(iii)* $G^*(p) = G^*(\hat{p})$.

*(iv)* $G^*(p) - 1$ *ist keine konvexe Untergruppe von* $(K, +)$.

*Beweis.* (i)⇒(ii): Nach Proposition 1.15 gilt $|p| \geq \hat{p}$. Angenommen, es gilt $p > \hat{p}$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $\hat{p} < x < p$. Wegen $x > \hat{p}$ existiert ein $y \in K$ mit $y < p$ und $x + y > p$. Ist ohne Einschränkung $x \leq y$, so folgt $p < x + y \leq 2y \in 2p^L = p^L$ und damit ein Widerspruch. Aus der Annahme $p < -\hat{p}$ erhalten wir analog einen Widerspruch.
(ii)⇒(iii): Diese Behauptung ist trivial, da $G^*(p) = G^*(-p)$ gilt.
(iii)⇒(i): Offensichtlich gilt $2 \in G^*(\hat{p})$ und somit auch $2 \in G^*(p)$.
¬(iv)⇒ ¬(i): Diese Richtung finden wir in [K], Proposition 5.21. Wegen der Kürze des Beweises führen wir ihn direkt an. Wegen $G^*(p) \subseteq K^{>0}$ gilt $-1 \notin G^*(p) - 1$. Nach Voraussetzung ist $G^*(p) - 1$ eine additive Untergruppe von $K$, also gilt auch $1 \notin G^*(p) - 1$. Damit folgt $2 \notin G^*(p)$.
¬(i)⇒ ¬(iv): Diese Richtung gilt nicht nur für $G^*(p)$, sondern allgemein für eine konvexe Untergruppe von $(K^{>0}, \cdot)$. Wir finden den Beweis in [T1], und zwar als Behauptung 1 im Beweis von Proposition 3.5. Sei also $2 > G^*(p) =: H$. Wir zeigen, daß $H - 1$ eine konvexe Untergruppe von $(K, +)$ ist. Da $H$ konvex ist, ist es auch $H - 1$. Damit müssen wir nur $2 \cdot (H - 1)^{>0} \subseteq H - 1$ und $-(H - 1) = H - 1$ zeigen. Sei $0 < \varepsilon \in H - 1$. Dann gilt $0 < 2\varepsilon < (1 + \varepsilon)^2 - 1 \in H - 1$ und somit $2\varepsilon \in H - 1$.

Wegen $H < 2$ folgt $2\varepsilon < 1$ und $\varepsilon < 1 - \varepsilon$. Daraus erhalten wir $\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} < \varepsilon$. Jetzt gilt aber $1 < \frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} < 1 + 2\varepsilon \in H$. Damit ist $\frac{1}{1-\varepsilon} \in H$, also auch $1 - \varepsilon \in H$ und $-\varepsilon \in H - 1$.

Ist $\varepsilon > 0$ mit $-\varepsilon \in H - 1$, so gilt $1 < 1 + \varepsilon < \frac{1}{1-\varepsilon} \in H$ und folglich $\varepsilon \in H - 1$. □

**Lemma 1.47** (Tressl)**.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Dann gilt*

$$G^*(p) - 1 = \{a \in K \mid |a| \cdot p < \hat{p}\} = \{a \in K \mid |a| \cdot p \leq \hat{p}\}.$$

*Beweis.* Wir finden die Aussage in [T1] als Behauptung 2 im Beweis von Proposition 3.5. □

# 2. Zusammenhang zwischen additiver und multiplikativer Invarianzgruppe

Nachdem wir in Kapitel 1 als zwei wichtige Invarianten eines Schnittes $p$ eines angeordneten Körpers die additive und die multiplikative Invarianzgruppe $G(p)$ und $G^*(p)$ kennengelernt haben, untersuchen wir in diesem Kapitel den Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen. Wir werden in Abschnitt 2.1 zwei wichtige Mengen definieren, die uns helfen, das Verhältnis zwischen $G(p)$ und $G^*(p)$ zu beschreiben. Im Abschnitt 2.2 vergleichen wir unsere Herangehensweise an das Problem mit einer Arbeit von F.- V. Kuhlmann und sehen, daß wir auch mit unseren Mitteln einige Aussagen dort beweisen können.

## 2.1. Über die Mengen $J(p)$ und $I(p)$ zu einem Schnitt $p$

In Theorem 2.1 formulieren wir gleich zu Beginn eine wichtige Aussage, die wir zwar recht elementar beweisen können, die aber sowohl im folgenden Kapitel über Signaturen von Schnitten angeordneter Körper als auch im restlichen Teil dieses Abschnittes ein zentrales Hilfsmittel darstellt.

**Theorem 2.1** (Schlüssellemma)**.** *Seien $K$ ein angeordneter Körper, $G \subseteq K$ eine konvexe Untergruppe von $(K, +)$ und $a \in K$ mit $|a| > G$. Dann gilt*

$$\boxed{G^*(G^- + a) = G^*(G^+ + a) = \tfrac{1}{a}G + 1.}$$

*Beweis.* Wir gliedern den Beweis in zwei Schritte. Als erstes zeigen wir

$$G^*(G^- + a) = G^*(G^+ + a) = G^*(G^+) \cap (\tfrac{1}{a}G + 1).$$

<u>Behauptung 1</u>: $G^*(G^+ + a) = G^*(G^+) \cap (\frac{1}{a}G + 1)$
„ $\subseteq$ “: Sei $d \in G^*(G^+ + a)$. Dann gilt $d(G^+ + a) = dG^+ + ad = G^+ + a$, also auch $(dG)^+ + ad - a = G^+$. Da $G$ und $dG$ konvexe Untergruppen von $(K, +)$ sind, können wir Lemma 1.19 anwenden und erhalten $dG^+ = G^+$. Also gilt $d \in G^*(G^+)$. Damit ergibt sich $(dG)^+ + ad - a = G^+ + a(d-1) = G^+$, und es folgt $a(d-1) \in G(G^+) = G$. Es gilt demnach $d \in \frac{1}{a}G + 1$.
„ $\supseteq$ “: Sei $d \in G^*(G^+) \cap (\frac{1}{a}G + 1)$. Dann gilt $d(G^+ + a) = dG^+ + ad = G^+ + ad = G^+ + a(\frac{1}{a}g + 1)$ mit einem $g \in G = G(G^+)$. Es folgt $d(G^+ + a) = G^+ + g + a = G^+ + a$, also gilt $d \in G^*(G^+ + a)$.
<u>Behauptung 2</u>: $G^*(G^- + a) = G^*(G^+) \cap (\frac{1}{a}G + 1)$
Mit Proposition 1.43 folgt $G^*(G^- + a) = G^*(-(G^- + a)) = G^*(G^+ - a)$ und damit gilt die Aussage nach Behauptung 1.

Für die eigentliche Behauptung der Proposition müssen wir nur noch zeigen:

$$\tfrac{1}{a}G + 1 \subseteq G^*(G^+).$$

Wegen $|a| > G$ ist $\frac{1}{a}G < 1$ und $\frac{1}{a}G + 1 < 2$. Da aber $G^*(G^+) = V(G)^{*>0}$ nach Proposition 1.44 gilt, ist $2 \in G^*(G^+)$, und damit gilt $(\frac{1}{a}G + 1)^+ < (G^*(G^+))^+$. Umgekehrt folgt aus $\frac{1}{a}G < 1$ sofort $\frac{1}{a}G > -1$ und auch $\frac{1}{a}G > -\frac{1}{2}$. Also ist $\frac{1}{a}G+1 > \frac{1}{2}$. Da $\frac{1}{2} \in G^*(G^+)$ gilt, zeigt dies $(G^*(G^+))^- < (\frac{1}{a}G+1)^-$. Da sowohl $G^*(G^+)$ als auch $\frac{1}{a}G + 1$ konvex sind, folgt insgesamt $\frac{1}{a}G + 1 \subseteq G^*(G^+)$. □

**Korollar 2.2.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $p > \hat{p}$. Sei weiter $a \in K$ mit $a < p < 2a$. Dann gilt für alle $a \leq c \leq 2a$ die Gleichung $G^*(a + \hat{p}) = G^*(c + \hat{p})$.*

*Beweis.* Aus der Voraussetzung $a < p < 2a$ folgt $\hat{p} < a$. Offensichtlich gelten für alle $a \leq c \leq 2a$ die Inklusionen $\frac{1}{2a}G(p) + 1 \subseteq \frac{1}{c}G(p) + 1 \subseteq \frac{1}{a}G(p) + 1$. Wir können nun Theorem 2.1 auf $a$, $c$ und $2a$ anwenden und erhalten $G^*(2a + \hat{p}) \subseteq G^*(c + \hat{p}) \subseteq G^*(a + \hat{p})$. Aufgrund der elementaren Beobachtung $G^*(a + \hat{p}) = G^*(2a + \hat{p}) \Leftrightarrow \frac{1}{a}G(p) + 1 = \frac{1}{2a}G(p) + 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{a}G(p) = G(p) \Leftrightarrow 2 \in V(G(p))^{*>0}$ und der Tatsache, daß $V(G(p))$ ein konvexer Bewertungsring ist, gilt $G^*(a + \hat{p}) = G^*(2a + \hat{p})$. Damit folgt die Behauptung. □

**Lemma 2.3.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $p > \hat{p}$. Dann existiert ein Element $\hat{p} < a < p$ mit $G^*(p) = G^*(a + \hat{p})$.*

*Beweis.* Wegen $\hat{p} < p$ finden wir ein Element $a \in K$ mit $a < p < 2a$. Dann gilt auch $\hat{p} < a$. Für dieses Element zeigen wir die Gleichheit $G^*(p) = G^*(a + \hat{p}) =: H$.

„ $\supseteq$ “: Sei $h \in H$, ohne Einschränkung nehmen wir $h > 1$ an. Wir müssen dann $h \cdot p^L \subseteq p^L$ zeigen. Sei also $c < p$ gegeben. Wegen $a < p$ können wir auch nur den Fall $a \leq c < p$ betrachten. Dann gilt aber nach Korollar 2.2 $G^*(c + \hat{p}) = H$. Aus $c < c + \hat{p}$ folgt $hc < c + \hat{p} \leq p$ und die erste Inklusion ist gezeigt.

„ $\subseteq$ “: Wir haben bereits $H \subseteq G^*(p)$ gezeigt und nehmen jetzt an, es gibt ein $g \in G^*(p)$ mit $g > H = G^*(a + \hat{p})$. Mit Theorem 2.1 folgt dann $g > \frac{1}{a}G(p) + 1$ oder $a(g - 1) > G(p)$. Wir finden also ein Element $a \leq b < p$ mit $b + a(g - 1) > p$. Dann gilt aber wegen $g > 1$ auch $gb = b + b(g - 1) \geq b + a(g - 1) > p$. Das ergibt einen Widerspruch zu $b < p$ und $g \in G^*(p)$. □

Nun definieren wir eine wichtige Invariante eines Schnittes, die allgemein das Verhältnis zwischen additiver und multiplikativer Invarianzgruppe beschreibt.

**Definition 2.4.** Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Wir definieren

$$J(p) := \{c \in K^{>0} \mid G^*(p) = c \cdot G(p) + 1\}.$$

**Lemma 2.5.** *Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Dann ist $J(p)$ konvex und es gilt $J(p) = J(-p)$.*

*Beweis.* Zum Nachweis der Konvexität betrachten wir Elemente $0 < a < b < c$ mit $a$, $c \in J(p)$. Dann gilt $a \cdot G(p) \subseteq b \cdot G(p) \subseteq c \cdot G(p)$. Wegen $aG(p) + 1 = G^*(p) = cG(p) + 1$ ist $aG(p) = cG(p)$, also gilt „ $=$ “ überall. Damit ist $G^*(p) = aG(p) + 1 =$

$bG(p)+1$, also gilt $b \in J(p)$. Daß $J(p) = J(-p)$ gilt, folgt sofort aus der Definition, da nach den Propositionen 1.13 und 1.43 sowohl $G(p)$ als auch $G^*(p)$ nicht vom Vorzeichen des Schnittes abhängen. □

In Lemma 2.5 sehen wir zwei erste elementare Eigenschaften der Menge $J(p)$ zu einem Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$. Als geeignetes Instrument zur Untersuchung, wie $G(p)$ und $G^*(p)$ zusammenhängen, kann $J(p)$ aber nur für eine bestimmte, wenn auch sehr große und interessante Menge von Schnitten angeordneter Körper dienen. Wir benötigen nämlich eine Bedingung an $p$, damit $J(p)$ nicht leer ist. In der folgenden Proposition sehen wir diese Bedingung. Sie erscheint insofern natürlich, da von ihr auch in Kapitel 3 abhängt, inwieweit wir allgemeine Aussagen über die additiven und multiplikativen Signaturen von Schnitten angeordneter Körper machen können.

**Proposition 2.6.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann gilt*

$$|p| > \hat{p} \Leftrightarrow J(p) \neq \emptyset.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Sei $c \in J(p) \neq \emptyset$. Dann gilt $G^*(p) - 1 = c \cdot G(p)$ und $G^*(p) - 1$ ist somit eine konvexe Untergruppe von $(K, +)$. Nach Lemma 1.46 ist dann $|p| \neq \hat{p}$, also gilt $|p| > \hat{p}$. „ $\Rightarrow$ “: Dies ist die deutlich stärkere Aussage. Einen Beweis finden wir in [T1], Proposition 3.5. Tressl benutzt dabei allerdings Realisierungen in einem Oberkörper $L \supseteq K$. Wir bleiben mit unserem gewissermaßen elementareren Beweis im Grundkörper $K$. Wegen Lemma 2.5 können wir ohne Einschränkung von einem Schnitt $p > \hat{p}$ ausgehen. Nach Lemma 2.3 zusammen mit Schlüssellemma 2.1 gibt es dann ein $\hat{p} < a$ mit $G^*(p) = G^*(a + \hat{p}) = \frac{1}{a}G(p) + 1$. Diese Gleichheit bedeutet aber gerade $\frac{1}{a} \in J(p)$. □

Bevor wir uns eingehender mit der Menge $J(p)$ zu einem Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$ beschäftigen, weisen wir noch auf einen gewissen Spezialfall hin. Nicht betrachten müssen wir $J(p)$, falls eine der beiden Invarianzgruppen von $p$ trivial ist. Denn dann haben wir einen besonders einfachen Zusammenhang zwischen additiver und multiplikativer Invarianzgruppe von $p$, den wir im folgenden Lemma darstellen.

**Lemma 2.7.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ ungleich $0^+$ oder $0^-$. Dann gilt*

$$G^*(p) = \{1\} \Leftrightarrow G(p) = \{0\}.$$

*Ist dagegen $p$ gleich $0^+$ oder $0^-$, so gilt $G(p) = \{0\}$ und $G^*(p) = K^{>0}$.*

*Beweis.* Der Zusatz ist trivial. Wir zeigen nur die Äquivalenz, falls $p \neq 0^+, 0^-$. Da nach den Propositionen 1.13 und 1.43 $G(-p) = G(p)$ und $G^*(-p) = G^*(p)$ gilt, können wir uns auf den Fall $p > 0^+$ beschränken.

„ $\Rightarrow$ “: Sei $G^*(p) = \{1\}$. Wir nehmen an, es gibt ein $0 < \varepsilon \in G(p)$. Dann können wir ein Element $y > p > 0$ wählen, da $p = +\infty$ wegen $G^*(p) = \{1\}$ nicht möglich ist. Definieren wir $\eta := 1 + \frac{\varepsilon}{y} > 1$, so können wir $\eta \in G^*(p)$ zeigen und erhalten somit einen Widerspruch zur Voraussetzung. Denn angenommen, es gibt ein $0 < x < p$ mit $\eta x > p$, dann folgt $p < \eta x = (1 + \frac{\varepsilon}{y})x = x + \varepsilon \frac{x}{y} < x + \varepsilon < p$, was nicht sein kann.

„ $\Leftarrow$ “: Sei nun $G(p) = \{0\}$. Es gilt $|p| > \hat{p}$, denn Gleichheit hieße wegen $G(p) = \{0\}$ sofort $p = 0^+$ oder $p = 0^-$. Mit $|p| > \hat{p}$ aber folgt die Behauptung mit Proposition 2.6. □

Dennoch benötigen wir bei einem allgemeinen Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$ die Menge $J(p)$, um den Zusammenhang zwischen $G(p)$ und $G^*(p)$ zu beschreiben. Wie wir allerdings im folgenden feststellen, läßt sich die Menge der Inversen von $J(p)$ besser darstellen. Deshalb machen wir noch folgende

**Definition 2.8.** Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Wir definieren die Menge der Inversen der Elemente von $J(p)$

$$I(p) := \frac{1}{J(p)} = \{c \in K^{>0} \mid G^*(p) = \tfrac{1}{c}G(p) + 1\}.$$

Mit $J(p)$ ist natürlich auch $I(p)$ konvex.

Für die Ober- und Unterkanten der Mengen $J(p)$ und $I(p)$ eines Schnittes $p$ eines angeordneten Körpers $K$ haben wir folgende einfache Umrechnung.

**Lemma 2.9.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{I(p)^+} = J(p)^- \text{ und } \frac{1}{I(p)^-} = J(p)^+.$$

*Beweis.* Da nach Definition $J(p) = \frac{1}{I(p)}$ gilt, folgt die Aussage mit der multiplikativ gelesenen Version von Lemma 1.6. □

Im folgenden Lemma sehen wir die erste Charakterisierung von $J(p)$ und $I(p)$ zu einem Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$. Sie liefert uns, daß sowohl die Unter- als auch die Oberkanten der beiden Mengen (, falls sie nichtleer sind,) die Oberkanten von konvexen Untergruppen von $(K, +)$ sind.

**Lemma 2.10.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann gilt*

$$J(p) = c \cdot V(p)^{*>0} \text{ für alle } c \in J(p) \text{ und}$$
$$I(p) = d \cdot V(p)^{*>0} \text{ für alle } d \in I(p).$$

*Insbesondere gilt auch $J(p) \cdot V(p)^{*>0} = J(p)$ und $I(p) \cdot V(p)^{*>0} = I(p)$.*

*Beweis.* Wir zeigen nur die erste Behauptung. Die zweite folgt dann sofort anhand der Definition von $I(p)$, der Zusatz ist ohnehin nur eine Abschwächung.

Gilt $J(p) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $c \in J(p)$, wir zeigen $J(p) = c \cdot V(p)^{*>0}$. Für alle $d \in K^{>0}$ gilt nach Definition $d \in J(p)$ genau dann, wenn $dG(p) + 1 = G^*(p) = cG(p) + 1$ gilt, also genau dann, wenn $dG(p) = cG(p)$ gilt. Das ist aber gleichbedeutend mit $\frac{d}{c} \in V(G(p))^{*>0} = V(p)^{*>0}$. Somit haben wir die Behauptung gezeigt. □

**Lemma 2.11.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Für alle $a \in K^{>0}$ gilt dann*

$$J(ap) = \frac{1}{a} \cdot J(p) \text{ und } I(ap) = a \cdot I(p).$$

*Beweis.* Für alle $x \in K^{>0}$ gilt mit Hilfe der Propositionen 1.35 und 1.43

$$x \in J(ap) \Leftrightarrow G^*(ap) = xG(ap) + 1 \Leftrightarrow G^*(p) = axG(p) + 1 \Leftrightarrow ax \in J(p).$$

Hiermit folgt sofort auch die zweite Aussage. □

Die Menge $I(p)$ zu einem Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$ mit $|p| > \hat{p}$ bildet eine Umgebung von $|p|$. Dies konkretisieren wir in der folgenden

**Proposition 2.12.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Dann gilt*

$$\hat{p} \leq I(p)^- < |p| < I(p)^+.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung ohne Einschränkung für einen Schnitt $p > 0$. Als erstes weisen wir $\hat{p} \leq I(p)^-$ nach. Sei dazu ein $a \in I(p)$ gegeben. Dann ist $G^*(p) = \frac{1}{a}G(p)+1$. Lemma 1.46 zusammen mit der Voraussetzung sagt uns $2 \notin G^*(p)$. Damit ist auch $1 \notin G^*(p) - 1 = \frac{1}{a}G(p)$. Wegen $a > 0$ muß dann aber $a > G(p)$ gelten.

Für den Rest zeigen wir zunächst die Abschätzungen

$$I(p)^- \leq p \leq I(p)^+.$$

Sei also $0 < a < I(p)$, dann gilt auch $a < p$. Denn setzen wir $q := \frac{1}{a}p$, so gilt $1 < \frac{1}{a}I(p) = I(\frac{p}{a}) = I(q)$ nach Lemma 2.11. Dies bedeutet nach Definition von $I(q)$, daß $G^*(q) \subsetneq G(q) + 1$ und somit $\tilde{q} < \hat{q}$ gilt. Wir können also ein $x \in K^{>0}$ wählen mit $\tilde{q} < x < \hat{q}$. Wegen $x > \tilde{q} = G^*(q)^+ - 1 = (G^*(q) - 1)^+$ folgt mit Lemma 1.47 $xq > \hat{q}$, und wir erhalten $x < \hat{q} < xq$. Also gilt $1 < q = \frac{1}{a}p$ und somit $a < p$. Analog zeigen wir $p \leq I(p)^+$. Denn für ein $a > I(p)$ folgt mit $q := \frac{1}{a}p$ diesmal $1 > I(q)$ oder $\tilde{q} > \hat{q}$. Wir finden also ein $x \in K^{>0}$ mit $\hat{q} < x < \tilde{q}$. Wieder nach Lemma 1.47 gilt dann $xq \leq \hat{q} < x$, und wir erhalten $1 > q = \frac{1}{a}p$, also $a > p$.

Uns fehlen nur noch die strikten Abschätzungen, die jetzt aber schnell folgen. Angenommen, es gilt $p = I(p)^+$. Wegen $2 \in V(p)^{*>0}$ und Lemma 2.10 gilt $I(p) = 2 \cdot I(p)$ und somit folgt $2 \cdot p = 2 \cdot I(p)^+ = I(p)^+ = p$. Dies bedeutet $2 \in G^*(p)$ und ergibt mit Lemma 1.46 einen Widerspruch zur Voraussetzung $p > \hat{p}$. Die Annahme $p = I(p)^-$ führt zum gleichen Widerspruch. □

*Bemerkung 2.13.* Die erste Abschätzung aus Proposition 2.12 ist scharf. Wir betrachten zum Beispiel einen angeordneten Körper $K$ mit einer echten konvexen Untergruppe $G$ von $(K, +)$. Zu einem Element $a > G$ definieren wir den Schnitt $p := a + G^+$. Dann gilt $p = a + \hat{p}$ und $p > \hat{p}$. Nach Proposition 2.12 gilt $\hat{p} \leq I(p)^-$. Wir zeigen auch $\hat{p} \geq I(p)^-$ und erhalten in diesem Fall $\hat{p} = I(p)^-$.

Offensichtlich gilt $\hat{p} < a < p$, deshalb folgt $G^*(p) = G^*(a + \hat{p}) = \frac{1}{a}G(p) + 1$ mit Schlüssellemma 2.1. Damit gilt $a \in I(p)$. Um $\hat{p} \geq I(p)^-$ zu zeigen, können wir uns demnach gleich ein Element $b$ mit $\hat{p} < b < a$ vorgeben. Wegen $0 < b < a < p = a+\hat{p}$ existiert ein $g \in G(p)$ mit $b = a + g$. Damit ist $b - a = g \in G(p) = G(\hat{p})$. Es folgt $b-a+\hat{p} = \hat{p}$ oder $b+\hat{p} = a+\hat{p} = p$. Dann liefert uns aber wieder das Schlüssellemma 2.1 die Gleichung $G^*(p) = G^*(b+\hat{p}) = \frac{1}{b}G(p) + 1$ und somit $b \in I(p)$. Dies zeigt $\hat{p} \geq I(p)^-$.

Das Ergebnis aus Proposition 2.12 zusammen mit Schlüssellemma 2.1 ermöglicht uns folgende Charakterisierung der Menge $I(p)$ eines Schnittes $p$ eines angeordneten Körpers $K$.

**Korollar 2.14.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Dann gilt für alle $a \in K^{>0}$*

$$a \in I(p) \Leftrightarrow G^*(p) = G^*(a+\hat{p}) \Leftrightarrow G^*(p) = G^*(a-\hat{p}).$$

*Beweis.* Wir zeigen die Äquivalenz

$$a \in I(p) \Leftrightarrow G^*(p) = G^*(a+\hat{p}).$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei $a \in K^{>0}$ mit $G^*(p) = G^*(a+\hat{p})$. Dann gilt $a > G(p)$, da aus $a \in G(p) = G(\hat{p})$ mit Lemma 1.46 $|p| = \hat{p}$ folgt, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Wir können also das Schlüssellemma 2.1 anwenden und erhalten die Gleichung $G^*(p) = G^*(a+\hat{p}) = G^*(G(p)^+ + a) = \frac{1}{a}G(p) + 1$. Das heißt aber gerade $a \in I(p)$. „ $\Rightarrow$ “: Sei jetzt ein $a \in I(p)$ vorgegeben. Nach Proposition 2.12 ist dann $a > \hat{p}$, also gilt $a > G(p)$. Theorem 2.1 liefert jetzt wieder die Behauptung, denn es gilt $G^*(p) = \frac{1}{a}G(p) + 1 = G^*(a+\hat{p})$.

Auch bei der zweiten Äquivalenz muß immer $a > G(p)$ gelten, deshalb können wir sie direkt aus dem Schlüssellemma 2.1 ablesen. □

**Korollar 2.15.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Dann gilt für alle $b \in I(p)$*

$$I(p) = I(b \pm \hat{p}).$$

*Beweis.* Nach Korollar 2.14 gilt genau dann $a \in I(p)$, wenn $G^*(p) = G^*(a \pm \hat{p})$ gilt. Da nach Voraussetzung $b \in I(p)$ und somit $G^*(p) = G^*(b \pm \hat{p})$ gilt, gilt $a \in I(p)$ genau dann, wenn $G^*(a \pm \hat{p}) = G^*(b \pm \hat{p})$ gilt. Anwenden von Korollar 2.14 auf den Schnitt $b \pm \hat{p}$ liefert die Behauptung. □

## 2.2. Ein Vergleich mit der Arbeit [K] von F.-V. Kuhlmann

In [K] beschäftigt sich F.-V. Kuhlmann mit recht ähnlichen Fragen wie wir bezüglich des Zusammenhangs zwischen additiver und multiplikativer Invarianzgruppe eines Schnittes eines angeordneten Körpers. Allerdings wählen wir einen anderen Zugang zu diesem Thema. Wir zeigen, daß wir auch mit unseren Methoden ähnliche Resultate erzielen können. Kuhlmann definiert zu einem Schnitt $p$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ die konvexe symmetrische von $p$ erzeugte Teilmenge

$$\mathrm{CS}(p) := \{g \in G \mid |g| \leq |p|\}.$$

Mit $\mathrm{MC}(p)$ bezeichnet er die maximale konvexe Untergruppe von $G$, die in $\mathrm{CS}(p)$ enthalten ist. $p$ heißt group$_0$-cut, wenn $|p| = \hat{p}$ ist, also wenn $p$ Ober- oder Unterkante seiner Invarianzgruppe $G(p)$ ist. Wir zeigen, daß wir auch mit unseren Mitteln Theorem 5.23 aus [K] beweisen können.

**Theorem 2.16 (**F.-V. Kuhlmann)**.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper.*
*1) Falls $p$ ein group$_0$-cut von $K$ ist, so gilt*

$$G^*(p) = V(p)^{*>0}.$$

*2) Falls $p$ kein group$_0$-cut von $K$ ist, so gilt für alle $g \in \mathrm{CS}(p) \setminus \mathrm{MC}(p)$*

$$G^*(p) = 1 + \tfrac{1}{g}G(p).$$

*Weiter gilt $V(G^*(p) - 1) = V(p)$.*
*3) Für jeden Schnitt $p$ von $K$ gilt*

$$G(p) = (G^*(p) - 1) \cdot \mathrm{CS}(p).$$

*Beweis.* 1) Diese Aussage steht bei uns in Proposition 1.44.
2) Wir beschränken uns aus Symmetriegründen auf einen Schnitt $p > \hat{p}$ und zeigen, daß

$$\big(\mathrm{CS}(p) \setminus \mathrm{MC}(p)\big)^{>0} \subseteq I(p)$$

gilt, dann folgt die erste Behauptung nach Definition von $I(p)$. Wir wählen also zuerst ein Element $a \in I(p)$ mit $a < p$. Dies geht nach Proposition 2.12, da nach Voraussetzung $p > \hat{p}$ ist. Sei nun ein Element $b \in (\mathrm{CS}(p) \setminus \mathrm{MC}(p))^{>0}$ gegeben. Nach Definition von $\mathrm{CS}(p)$ gilt $b < p$. Ist $b \geq a$, folgt sofort $b \in I(p)$, da $I(p)$ eine Umgebung von $p$ ist. Gilt dagegen $b < a$, so ist $b$ zumindest archimedisch äquivalent zu $a$, das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \leq nb$. Andererseits wäre die von $\mathrm{MC}(p)$ und $b$ erzeugte Gruppe $H$ eine echte Obergruppe von $\mathrm{MC}(p)$, aber wegen $H< a <p$ wäre $H$ enthalten in $\mathrm{CS}(p)$, was der Definition von $\mathrm{MC}(p)$ widerspricht. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < nb$. Dann gilt $\frac{1}{n}a < b < p$. Wegen $\frac{1}{n} \in V(p)^{*>0}$ und $a \in I(p)$ gilt nach Lemma 2.10 auch $\frac{1}{n}a \in I(p)$ und damit auch $b \in I(p)$. Das zeigt den ersten Teil der Behauptung.

Der Zusatz folgt aus dem gerade Gezeigten mit Proposition 1.41.
3) Nach 2) gilt für alle $g \in \mathrm{CS}(p) \setminus \mathrm{MC}(p)$ sogar $G(p) = (G^*(p) - 1) \cdot g$. Da $|x| < |g|$ für alle $x \in \mathrm{MC}(p)$ und alle $g \in \mathrm{CS}(p) \setminus \mathrm{MC}(p)$ gilt, folgt die Behauptung. □

# 3. Signaturen von Schnitten angeordneter Körper

Wir interessieren uns jetzt auch im Körperfall für die Signatur eines Schnittes. Wir machen vorab eine leichte Bemerkung, die aber für die Betrachtungen im folgenden sehr wichtig ist.

*Bemerkung 3.1.* Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$. Da $(K,+)$ divisibel ist, ist $\hat{p}$ nicht realisiert in $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = K$. Damit gilt $\operatorname{sign}(p) \neq \infty$.

Ein angeordneter Körper besitzt neben der Addition noch die Multiplikation als zweite Verknüpfung. Auch bezüglich dieser führen wir einen Signaturbegriff ein und machen folgende

**Definition 3.2 (**Multiplikative Signatur**).** Sei $p$ ein Schnitt eines angeordneten Körpers $K$. Wir definieren die **multiplikative Signatur** $\operatorname{sign}^*(p)$ **von** $p$ als die Signatur von $|p|$ bezüglich der angeordneten abelschen Gruppe $(K^{>0},\cdot)$.

Im folgenden untersuchen wir den Zusammenhang zwischen additiver und multiplikativer Signatur. Wir unterscheiden für einen Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$ nach Lemma 1.15 zwei Fälle:

$$\begin{array}{ll}\text{(a)} & |p| > \hat{p} \\ \text{(b)} & |p| = \hat{p}.\end{array}$$

Diese Unterscheidung ist uns bereits aus Kapitel 2 bekannt, wo sich das von uns untersuchte $J(p)$ genau dann als nicht leer herausgestellt hat, wenn $|p| > \hat{p}$ gilt.

Wir werden sehen, daß wir uns im Fall (a) auf die additive Signatur eines Schnittes beschränken können. Ihre Kenntnis liefert uns bereits die multiplikative Signatur des Schnittes. Im Fall (b) dagegen gibt es alle denkbaren Kombinationen aus additiver und multiplikativer Signatur. Wir werden mit Hilfe des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers Beispiele konstruieren.

## 3.1. Der Fall $|p| > \hat{p}$

Allgemein gilt für einen Schnitt $p$ eines angeordneten Körpers $K$ nach Bemerkung 3.1 wegen der Divisibilität von $(K,+)$ schon $\operatorname{sign}(p) \neq \infty$. Mit der Zusatzvoraussetzung $|p| > \hat{p}$ gilt sogar $\operatorname{sign}^*(p) \neq \infty$, was unsere Signaturbetrachtungen in diesem Fall wesentlich erleichtert. Den Grund für diese Tatsache finden wir in [T2].

**Lemma 3.3 (**Tressl**).** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $G := K^{>0}$ die multiplikative Gruppe von positiven Elementen von $K$. Ist $H \subseteq G$ eine konvexe Untergruppe von $G$ mit $2 \notin H$, so ist $H^+$ nicht realisiert in der divisiblen Hülle $G \otimes_Z \mathbb{Q}$ von $G$.*

*Beweis.* Wir nehmen an, daß $H^+$ doch realisiert ist in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Nach Lemma 1.23 (multiplikativ gelesen) gibt es dann eine Realisierung $\alpha \in G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ von $H^+$ mit $\alpha^2 \in K$. Die Konstruktion dieses Elementes steht im Beweis von Richtung „(i) $\Rightarrow$(ii)“ des Lemmas. Da nach Voraussetzung $2 \notin H$ gilt, ist $H-1$ eine konvexe Untergruppe von $(K,+)$. Wir haben den Beweis am Ende von Lemma 1.46 für die multiplikative Invarianzgruppe eines Schnittes eines angeordneten Körpers $K$ gesehen und schon dort bemerkt, daß er allgemein für konvexe Untergruppen von $(K^{>0},\cdot)$ funktioniert. Da $H-1$ nun also additiv eine konvexe Untergruppe von $K$ ist, realisieren sowohl $\alpha-1$ als auch $3\cdot(\alpha-1)$ ihre Oberkante $(H-1)^+$. Wegen $1 \le 1+\alpha \le 1+2 = 3$ gilt $\alpha-1 \le (\alpha-1)(\alpha+1) \le 3\cdot(\alpha-1)$, und auch $(\alpha-1)(\alpha+1)$ muß eine Realisierung von $(H-1)^+$ sein. Das führt aber zum Widerspruch, da $(\alpha-1)(\alpha+1) = \alpha^2-1 \in K$ gilt. □

**Korollar 3.4** (Tressl)**.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Dann gilt* $\operatorname{sign}^*(p) \neq \infty$.

*Beweis.* Mit $|p| > \hat{p}$ gilt nach Lemma 1.46 auch $2 \notin G^*(p)$. Nach Lemma 3.3 ist dann $G^*(p)^+$ nicht realisiert in $(K^{>0},\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. □

Diese Beobachtung zusammen mit Schlüssellemma 2.1 liefert uns folgende wertvolle Aussage.

**Theorem 3.5** (Additive und multiplikative Signaturen)**.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Ist $p > \hat{p}$, so gilt* $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sign}^*(p)$. *Ist $p < -\hat{p}$, so gilt* $\operatorname{sign}(p) = -\operatorname{sign}^*(p)$.

*Beweis.* Wir führen im folgenden die wesentlichen Schritte des Beweises für den Fall $p > \hat{p}$ durch, der Fall $p < -\hat{p}$ folgt dann sehr schnell. Wir machen eine Fallunterscheidung nach $\operatorname{sign}^*(p)$, wobei nach Korollar 3.4 der Fall $\operatorname{sign}^*(p) = \infty$ nicht auftritt. Ist $\operatorname{sign}^*(p) \in \{\pm 1\}$, so sehen wir die gewünschte Gleichheit $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sign}^*(p)$ direkt. Denn ist $\operatorname{sign}^*(p) = +1$, so existiert ein $a \in K^{>0}$ mit $p = a \cdot G^*(p)^+$. Wegen $p > \hat{p}$ können wir nach Proposition 2.6 ein Element $c \in J(p)$ wählen. Mit diesem gilt dann $p = aG^*(p)^+ = a\cdot(cG(p)+1)^+ = (acG(p))^+ + a$ nach Lemma 1.34. Da $acG(p)$ eine konvexe Untergruppe von $(K,+)$ ist, bedeutet dies nach Bemerkung 1.27 $\operatorname{sign}(p) = 1$. Ganz analog folgt aus $\operatorname{sign}^*(p) = -1$ auch $\operatorname{sign}(p) = -1$.

Somit müssen wir nur noch den Fall $\operatorname{sign}^*(p) = 0$ betrachten. Angenommen, es gilt $\operatorname{sign}(p) = +1$, dann exisitiert ein $a \in K$ mit $p = a + \hat{p}$. Wegen $p > \hat{p}$ gilt $a > G(p)$, so daß wir das Schlüssellemma 2.1 anwenden können. Es liefert $G^*(G(p)^+ + a) = \frac{1}{a}G(p) + 1$. Wir erhalten also

$$a \cdot G^*(p)^+ = a \cdot G^*(G(p)^+ + a)^+ = a \cdot (\tfrac{1}{a}G(p) + 1)^+ = (G(p) + a)^+ = p.$$

Das bedeutet aber $\operatorname{sign}^*(p) = +1 \neq 0$, also einen Widerspruch. Auch die Annahme $\operatorname{sign}(p) = -1$ führt zum Widerspruch, indem wir statt der Oberkanten die Unterkanten der Invarianzgruppen betrachten. Da ohnehin $\operatorname{sign}(p) \neq \infty$ gilt, muß $\operatorname{sign}(p) = 0$ gelten, was unseren Beweis für $p > \hat{p}$ vervollständigt.

Für den Fall $p < -\hat{p}$ gehen wir über zu $q := -p$. Dann ist $q > \hat{q}$ und somit nach dem bereits Gezeigten $\operatorname{sign}(q) = \operatorname{sign}^*(q)$. Da mit Proposition 1.28 $\operatorname{sign}(p) = -\operatorname{sign}(-p) = -\operatorname{sign}(q)$ und nach Definition $\operatorname{sign}^*(q) = \operatorname{sign}^*(-p) = \operatorname{sign}^*(p)$ gilt, folgt die Behauptung. □

## 3.2. Der Fall $|p| = \hat{p}$

In diesem Abschnitt betrachten wir Schnitte $p$ eines angeordneten Körpers mit $|p| = \hat{p}$. In diesem Fall kann keine Aussage wie in Theorem 3.5 getroffen werden. Für die Konstruktion von Beispielen verwenden wir den verallgemeinerten Potenzreihenkörper $k((t^\Gamma))$ eines angeordneten Körpers $k$ zu einer angeordneten abelschen Gruppe $\Gamma$. Wir gehen davon aus, daß der Leser mit diesem Objekt vertraut ist. Zur Erinnerung verweisen wir auf den Anhang, wo der verallgemeinerte Potenzreihenkörper noch einmal detailliert eingeführt wird.

**Definition 3.6 (**Träger**).** Sei $X$ eine Menge und $G$ eine (additive) Gruppe. Für eine Abbildung $f : X \to G$ definieren wir den **Träger von** $f$ als

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

**Definition 3.7.** Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir definieren den **verallgemeinerten Potenzreihenkörper**

$$k((t^\Gamma)) := \{a : \Gamma \to k \mid \operatorname{supp}(a) \text{ wohlgeordnet}\}.$$

Für ein $a \in k((t^\Gamma))$ verwenden wir die Schreibweise

$$a = \sum_{\gamma \in \Gamma} a(\gamma) t^\gamma.$$

Für eine ausführliche Begründung dafür, daß $k((t^\Gamma))$ tatsächlich ein Körper ist, verweisen wir auf den Anhang, insbesondere auf Proposition/Definition 6.11.

Im folgenden werden wir auch auf Bewertungen zu sprechen kommen. Wir verwenden die Bezeichnungen wie in [KS], Kap. II, §4, S. 61. Für eine angeordnete abelsche Gruppe $\Gamma$ bezeichnen wir mit $\Gamma \cup \infty$ die disjunkte Vereinigung $\Gamma \cup \{\infty\}$ (mit einem zu $\Gamma$ fremden Element $\infty$). $\Gamma \cup \infty$ wird zu einer total geordneten Halbgruppe, indem wir für alle $\gamma \in \Gamma$ definieren: $\gamma < \infty$, und $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty + \infty = \infty$.

**Definition 3.8.** Sei $k$ ein angeordneter Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir definieren

$$\begin{aligned} v : k((t^\Gamma)) &\to \Gamma \cup \infty \\ a &\mapsto v(a) := \min(\operatorname{supp}(a)) \quad \big(a \in k((t^\Gamma))\big). \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir die Konvention $\min(\emptyset) := \infty$.

*Bemerkung 3.9.* Die Abbildung $v$ aus Definition 3.8 ist surjektiv. Desweiteren ist $v$ eine ordnungsverträgliche Bewertung auf $k((t^\Gamma))$, also gilt für alle $a, b \in k((t^\Gamma))$ die Implikation

$$0 < a < b \Rightarrow v(a) \geq v(b).$$

Den Beweis hierfür finden wir im Anhang in Proposition 6.15.

**Proposition 3.10.** *Sei $k$ ein angeordneter Körper, $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $K := k((t^\Gamma))$ der zugehörige verallgemeinerte Potenzreihenkörper. Sei weiter $\xi \in \mathrm{DC}(\Gamma) = \Gamma \cup \mathrm{Cuts}(\Gamma)$. Dann ist*

$$G := \{a \in K \mid \xi < v(a)\}$$

*eine konvexe Untergruppe von $K$.*

*Beweis.* Wir sehen sofort ein, daß $G$ eine Untergruppe von $K$ ist. Es gilt $0 \in G$, weil $v(0) = \infty > \xi$ gilt. (Das gilt auch für den Schnitt $\xi = \infty_\Gamma$, da $\infty > \Gamma$ gilt.) Für beliebige $a, b \in G$ gilt $v(a - b) \geq \min\{v(a), v(-b)\} = \min\{v(a), v(b)\} > \xi$ und damit $a - b \in G$.
Zum Nachweis der Konvexität betrachten wir beliebige Elemente $a \in K$, $b \in G$ mit $0 < a < b$. Nach Bemerkung 3.9 gilt $v(a) \geq v(b) > \xi$. Dies zeigt $a \in G$. □

Die Ober- und Unterkanten der in Proposition 3.10 betrachteten Gruppen werden uns als Beispiele für Schnitte $p$ von angeordneten Körpern mit $|p| = \hat{p}$ und verschiedenen multiplikativen Signaturen dienen. Dafür müssen wir zunächst den Invarianzbewertungsring dieser Gruppen näher untersuchen.

**Lemma 3.11.** *Sei $k$ ein angeordneter Körper, $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $K := k((t^\Gamma))$ und $\xi$ ein Schnitt von $\Gamma$. Sei weiter $G := \{a \in K \mid \xi < v(a)\}$. Dann gilt*

*(i)* $V(G)^* = \{b \in K \mid v(b) \in G(\xi)\}$ *und*

*(ii)* $v(V(G)^*) = G(\xi)$.

*Beweis.* (i) „ $\subseteq$ “: Sei $b \in V(G)^*$. Dann gilt nach Definition $b \cdot G = G$. Für alle $a \in G$ folgt deshalb $ab \in G$ und $ab^{-1} \in G$. Nach Definiton von $G$ gilt für alle $a \in G$ also $v(a) + v(b) = v(ab) > \xi$ und $v(a) - v(b) = v(a) + v(b^{-1}) = v(ab^{-1}) > \xi$. Da $v$ surjektiv ist, folgt $v(b) \in G(\xi)$.
„ $\supseteq$ “: Sei $b \in K$ mit $v(b) \in G(\xi)$ und sei $a \in G$ beliebig. Dann gilt $v(ab) = v(a) + v(b) > \xi$ und $v(ab^{-1}) = v(a) - v(b) > \xi$ und damit $ab \in G$ und $ab^{-1} \in G$. Da $a$ beliebig war, gilt $b \in V(G)^*$.
(ii) folgt jetzt sofort. „ $\subseteq$ “: Diese Inklusion gilt nach (i). „ $\supseteq$ “: Für ein $\gamma \in G(\xi)$ können wir wegen der Surjektivität von $v$ ein $b \in K$ mit $\gamma = v(b)$ wählen. Wieder nach (i) gilt dann $b \in V(G)^*$, also $\gamma \in v(V(G)^*)$. □

**Lemma 3.12.** *Sei $k$ ein angeordneter Körper, $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $K := k((t^\Gamma))$ und $\xi$ ein Schnitt von $\Gamma$. Sei weiter $G := \{a \in K \mid \xi < v(a)\}$. Dann gilt*

*(i)* $m(G) = V(G) \setminus V(G)^* = \{a \in K \mid v(a) > G(\xi)\}$ *und*

*(ii)* $v(m(G)) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > G(\xi)\}$.

*Beweis.* (i) „ $\subseteq$ “: Sei $0 < a \in m(G) = V(G) \backslash V(G)^*$, also gilt $a < V(G)^*$. Dann gilt $v(a) \geq v(V(G)^*) = G(\xi)$ nach Bemerkung 3.9 und Lemma 3.11 (ii). Nach Lemma 3.11 (i) gilt $v(a) \notin G(\xi)$, also folgt $v(a) > G(\xi)$.
„ $\supseteq$ “: Sei $a \in K$ mit $v(a) > G(\xi)$. Ohne Einschränkung sei $a > 0$. Nehmen wir an, daß $a \notin m(G)$ gilt, dann existiert ein $b \in V(G)^*$ mit $0 < b \leq a$. Nach Bemerkung 3.9 und Lemma 3.11 gilt dann $v(a) \leq v(b) \in G(\xi)$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.
(ii) „ $\subseteq$ “: Diese Inklusion ist klar nach (i). „ $\supseteq$ “: Sei $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma > G(\xi)$. Wir können wegen der Surjektivität von $v$ ein $a \in K^{>0}$ wählen mit $v(a) = \gamma$. Nach Teil (i) gilt $a \in m(G)$, also $\gamma \in v(m(G))$. $\square$

Wir wollen in der Situation eines angeordneten Körpers $k$ und einer angeordneten abelschen Gruppe $\Gamma$ mit Hilfe von $v$ aus Schnitten von $\Gamma$ Schnitte von $k((t^\Gamma))$ erhalten. Deswegen betrachten wir allgemein das Zurückziehen von Schnitten mittels surjektiver ordnungserhaltender Abbildungen.

**Definition 3.13.** Seien $X$ und $Y$ zwei total geordnete Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **ordnungserhaltend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \leq x_2$ auch $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt.

*Beispiel 3.14.* Sei $k$ ein angeordneter Körper, $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $K := k((t^\Gamma))$. Dann ist die „Einschränkung“ von $v$

$$\begin{aligned} v^{\geq 0} : K^{\geq 0} &\twoheadrightarrow \Gamma^{\mathrm{opp}} \cup \infty \\ a &\mapsto v(a) := \min(\operatorname{supp}(a)) \quad (a \in K^{\geq 0}) \end{aligned}$$

nach Bemerkung 3.9 ordnungserhaltend. Dabei bezeichnet $\Gamma^{\mathrm{opp}} \cup \infty$ die Halbgruppe $\Gamma \cup \infty$ mit entgegengesetzter Ordnung, das heißt für alle $g, h \in \Gamma \cup \infty$ gilt $g \leq h$ in $\Gamma^{\mathrm{opp}} \cup \infty$ genau dann, wenn $h \leq g$ in $\Gamma \cup \infty$ gilt. Insbesondere wird das Element $\infty$ in $\Gamma^{\mathrm{opp}} \cup \infty$ zu einem unendlich kleinen Element.

**Bemerkung/Definition 3.15.** Seien $X$ und $Y$ zwei total geordnete Mengen und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive und ordnungserhaltende Abbildung. Für alle Schnitte $\xi$ von $Y$ ist

$$\varphi^{-1}(\xi) := \left(\varphi^{-1}(\xi^L), \varphi^{-1}(\xi^R)\right)$$

ein Schnitt von $X$. Denn es gilt $\varphi^{-1}(\xi^L) \cup \varphi^{-1}(\xi^R) = \varphi^{-1}(\xi^L \cup \xi^R) = \varphi^{-1}(Y) = X$. Ebenso gilt $\varphi^{-1}(\xi^L) < \varphi^{-1}(\xi^R)$. Denn angenommen, es gibt ein $x \in \varphi^{-1}(\xi^L)$ und ein $y \in \varphi^{-1}(\xi^R)$ mit $x \geq y$, dann wäre $\xi^L \ni \varphi(x) \geq \varphi(y) \in \xi^R$, was nicht sein kann.
Wir nennen $\varphi^{-1}(\xi)$ den **mittels $\varphi$ auf $X$ zurückgezogenen Schnitt**.

**Lemma 3.16.** *Seien $X$ und $Y$ zwei total geordnete Mengen und $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive und ordnungserhaltende Abbildung. Sei $\xi$ ein Schnitt von $Y$. Dann ist $\varphi^{-1}(\xi)$ der einzige Schnitt $\eta$ von $X$ mit $\varphi(\eta^L) = \xi^L$ und $\varphi(\eta^R) = \xi^R$.*

*Beweis.* Natürlich erfüllt $\varphi^{-1}(\xi)$ die geforderte Eigenschaft. Denn aufgrund der Surjektivität von $\varphi$ gilt $\varphi(\varphi^{-1}(\xi^L)) = \xi^L$ und $\varphi(\varphi^{-1}(\xi^R)) = \xi^R$.

Wir nehmen an, es existiert ein Schnitt $\eta$ von $X$, verschieden von $\varphi^{-1}(\xi)$, mit der obigen Eigenschaft. Sei ohne Einschränkung $\eta > \varphi^{-1}(\xi)$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $\varphi^{-1}(\xi) < x < \eta$. Wegen $x \in (\varphi^{-1}(\xi))^R$ gilt $\varphi(x) \in \xi^R$. Da aus $x \in \eta^L$ aber $\varphi(x) \in \varphi(\eta^L) = \xi^L$ folgt, ergibt sich ein Widerspruch. □

**Proposition 3.17.** *Sei $k$ ein angeordneter Körper, $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $K := k((t^\Gamma))$ und $\xi$ ein Schnitt von $\Gamma$. Sei weiter $G := \{a \in K \mid \xi < v(a)\}$. Dann gelten folgende zwei Äquivalenzen:*

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \operatorname{sign}^*(G^+) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sign}(\xi) = -1 \\ \text{(b)} & \operatorname{sign}^*(G^+) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sign}(\xi) = 1. \end{array}$$

*Beweis.* Wir betrachten wieder die surjektive und ordnungserhaltende „Einschränkung“ $v^{\geq 0} : K^{\geq 0} \twoheadrightarrow \Gamma^{\text{opp}} \cup \infty$ von $v$ aus Beispiel 3.14. Der Einfachheit unterscheiden wir bei der Notation nicht zwischen $v$ und $v^{\geq 0}$. Zu dem Schnitt $\xi$ von $\Gamma$ erhalten wir den Schnitt $v^{-1}(\xi) = \big(v^{-1}(\xi^R), v^{-1}(\xi^L)\big)$ von $K^{\geq 0}$. $R$ und $L$ vertauschen dabei wegen der Anordnung von $\Gamma^{\text{opp}}$. Nun gilt $G^{\geq 0} = \{a \in K^{\geq 0} \mid \xi < v(a)\} = v^{-1}(\xi^R)$. Also gilt $v(G) = v(G^{\geq 0}) = v(v^{-1}(\xi^R)) = \xi^R$ und damit

$$v(G)^- = (\xi^R)^- = \xi.$$

(a) „ $\Rightarrow$ “: Sei $\operatorname{sign}^*(G^+) = 1$. Nach Definition existiert dann ein $c \in K^{>0}$ mit $G^+ = c \cdot (G^*(G^+))^+ = c \cdot (V(G)^{*>0})^+ = c \cdot V(G)^+ = (cV(G))^+$. Nach Lemma 1.8 impliziert dies $G = cV(G)$, weil beides konvexe Untergruppen von $K$ sind. Also berechnen wir mit Hilfe von Lemma 3.11 (ii)

$$\xi = v(G)^- = [v(cV(G))]^- = [v(cV(G)^*)]^- = [v(c) + v(V(G)^*)]^- = v(c) + G(\xi)^-,$$

und es gilt $\operatorname{sign}(\xi) = -1$.

(a) „ $\Leftarrow$ “: Sei $\operatorname{sign}(\xi) = -1$. Dann schreiben wir $\xi = v(c) + G(\xi)^-$ mit einem $c \in K^{>0}$. Dann folgt aber schon

$$G = cV(G).$$

Denn nehmen wir $G \subsetneq cV(G)$ an, dann gibt es ein $x \in V(G)$ mit $cx > G$. Es folgt $\xi > v(cx) = v(c) + v(x)$, aber wegen $x \in V(G) = V(G)^* \cup m(G)$ gilt $v(x) \in G(\xi)$ oder $v(x) > G(\xi)$. Damit muß $\xi > v(c) + v(x) > v(c) + G(\xi)^- = \xi$ gelten, was nicht sein kann. Ebenso folgt ein Widerspruch, wenn wir $G \supsetneq cV(G)$ annehmen. Denn dann gibt es ein $g \in G$ mit $g > cV(G)$ beziehungsweise mit $gc^{-1} > V(G)$. Da $V(G)$ aber ein Bewertungsring ist, gilt dann $cg^{-1} \in V(G)$ und $cg^{-1} \in m(G)$. Mit Lemma 3.12 (ii) folgt $v(cg^{-1}) = -v(gc^{-1}) > G(\xi)$, also gilt $v(gc^{-1}) < G(\xi)$ oder $v(g) < v(c) + G(\xi)$ und damit $v(g) < v(c) + G(\xi)^- = \xi$. Das steht im Widerspruch zu $g \in G$.

Aus $G = cV(G)$ folgt sofort $G^+ = cV(G)^+ = c \cdot (V(G)^{*>0})^+ = c \cdot (G^*(G^+))^+$.

Das zeigt $\mathrm{sign}^*(G^+) = 1$.

(b) „ $\Rightarrow$ “: Sei $\mathrm{sign}^*(G^+) = -1$. Dann existiert ein $c \in K^{>0}$ mit $G^+ = c{\cdot}(G^*(G^+))^- = c(V(G)^{*>0})^- = c{\cdot}m(G)^+$, wobei die letzte Gleichheit wieder aufgrund der Konvexität von $V(G)$ gilt. Dann folgt $G = c \cdot m(G)$, weil beides konvexe Untergruppen von $K$ sind. Anhand Lemma 3.12 (ii) erhalten wir

$$\xi = v(G)^- = [v(cm(G))]^- = [v(c) + v(m(G))]^- = v(c) + G(\xi)^+.$$

Die letzte Gleichheit folgt aus $v(m(G)) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > G(\xi)\}$. Das zeigt $\mathrm{sign}(\xi) = 1$.

(b) „ $\Leftarrow$ “: Sei $\mathrm{sign}(\xi) = 1$. Wir schreiben $\xi = v(c) + G(\xi)^+$ mit einem $c \in K^{>0}$. Dann folgt aber bereits

$$G = cm(G).$$

Denn nehmen wir $G \supsetneq cm(G)$ an, so gibt es ein $g \in G$ mit $g > cm(G)$. Da $V(G)$ ein konvexer Bewertungsring ist, existiert dann ein $x \in V(G)^{*>0}$ mit $g \geq cx$. Es folgt $v(g) \leq v(cx) = v(c) + v(x) < v(c) + G(\xi)^+ = \xi$. Das steht im Widerspruch zu $g \in G$. Auch $G \subsetneq cm(G)$ gilt nicht. Denn sonst gibt es ein $m \in m(G)$ mit $cm > G$. Dann gilt aber $\xi > v(cm) = v(c) + v(m) > v(c) + G(\xi)^+ = \xi$, was nicht sein kann.

Aus $G = cm(G)$ folgt aber unmittelbar $G^+ = cm(G)^+ = c \cdot (V(G)^{*>0})^- = c \cdot G^*(G^+)^-$. Das zeigt $\mathrm{sign}^*(G^+) = -1$. □

**Korollar 3.18.** *Sei $k$ ein reell abgeschlossener Körper, $\Gamma$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe und $K := k((t^\Gamma))$ der zugehörige verallgemeinerte Potenzreihenkörper. Sei weiter $\xi$ ein Schnitt von $\Gamma$ und $G := \{a \in K \mid \xi < v(a)\}$. Dann gilt*

$$\mathrm{sign}^*(G^+) = -\mathrm{sign}(\xi).$$

*Beweis.* Da $\Gamma$ divisibel ist, ist $\hat{\xi}$ nicht realisiert in $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \Gamma$ und damit sicherlich $\mathrm{sign}(\xi) \neq \infty$. Nach Proposition 6.13 ist $K = k((t^\Gamma))$ wieder reell abgeschlossen und damit die multiplikative Gruppe $K^{>0}$ divisibel. Damit gilt auch $\mathrm{sign}^*(G^+) \neq \infty$. Mit Proposition 3.17 folgt sofort die Behauptung. □

In [T2] gibt Tressl ein Beispiel für einen Schnitt eines angeordneten Körpers an, dessen multiplikative Signatur gleich $\infty$ ist. Nach Korollar 3.4 muß solch ein Schnitt Ober- oder Unterkante seiner (additiven) Invarianzgruppe sein.

*Beispiel 3.19.* Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen, $\omega > \mathbb{R}$ ein unendlich großes Element und $K := \mathbb{Q}(\omega)$. Sei $U$ die konvexe Hülle von $\mathbb{Q}$ in $K$ und sei $p := U^+$. Dann gilt $U^+ < \sqrt{\omega} < p^R$. Da $G^*(p) = G^*(U^+)$ gleich der konvexen Hülle von $\mathbb{Q}^{>0}$ ist, ist $G^*(p)^+ = U^+$ realisiert in der multiplikativen divisiblen Hülle von $K^{>0}$ und damit gilt $\mathrm{sign}^*(p) = \infty$. Tatsächlich gilt auch $p = \hat{p}$.

Im folgenden Theorem fassen wir die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen. Damit wird klar, daß im allgemeinen Fall eines Schnittes $p$ eines angeordneten Körpers $K$ mit $|p| = \hat{p}$ keine starke Aussage wie in Theorem 3.5 getroffen werden kann.

**Theorem 3.20.** *Sei $\delta \in \{\pm 1\}$ und $\varepsilon \in \{+1, 0, -1, \infty\}$. Dann existiert ein angeordneter Körper $K$ und ein Schnitt $p$ von $K$ mit $\delta \cdot p = \hat{p}$ und $\operatorname{sign}^*(p) = \varepsilon$.*

*Beweis.* Da die multiplikative Signatur nach Definition nicht vom Vorzeichen des Schnittes abhängt, können wir ohne Einschränkung von $\delta = +1$ ausgehen. Ist $\varepsilon = \infty$, so wählen wir $K$ und $p$ wie in Beispiel 3.19. Wir erhalten dann $p = \hat{p}$ und $\operatorname{sign}^*(p) = \varepsilon$. Ist $\varepsilon \neq \infty$, so wählen wir einen reell abgeschlossenen Körper $k$ und eine divisible angeordnete abelsche Gruppe $\Gamma$, in der Schnitte von Signatur 0 existieren, ganz konkret also zum Beispiel $\mathbb{Q}$. Wir setzen $K := k((t^\Gamma))$ und wählen einen Schnitt $\xi$ von $\Gamma$ mit $\operatorname{sign}(\xi) = -\varepsilon$. Setzen wir $G := \{a \in K \mid \xi < v(a)\}$, so gilt für den Schnitt $p := G^+$ von $K$ sofort $p = \hat{p}$, aber auch $\operatorname{sign}^*(p) = \varepsilon$ nach Korollar 3.18. $\square$

## 3.3. Beispiele: Von verallgemeinerten Potenzreihen induzierte Schnitte

Nachdem wir in den vorangehenden zwei Abschnitten allgemeine Aussagen über Signaturen von Schnitten angeordneter Körper gemacht haben, berechnen wir diese nun im konkreten Fall. Darüberhinaus werden wir auch die meisten der in Kapitel 1 eingeführten Invarianten tatsächlich im Beispiel sehen.

Sei im folgenden $R$ ein reell abgeschlossener Körper und $\Gamma \supseteq \mathbb{Q}$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe. Bekanntlich ist dann der verallgemeinerte Potenzreihenkörper $N := R((t^\Gamma))$ reell abgeschlossen. Die Aussage findet sich zum Beispiel in [R], 6.10. Sei weiter

$$P := \left\{a \in R((t^{\mathbb{Q}})) \mid a = \sum_{n \geq n_0} a_n t^{\frac{n}{k}} \text{ für ein } n_0 \in \mathbb{Z} \text{ und ein } k \in \mathbb{N}\right\}$$

der Körper der Puiseuxreihen und $M$ ein reell abgeschlossener Zwischenkörper

$$R(t) \subseteq M \subseteq P \subseteq R((t^\Gamma)) = N.$$

Wir verwenden stets die bereits in Definition 3.8 eingeführte Bewertung

$$v : N \to \Gamma \cup \infty,\ v(a) := \min(\operatorname{supp}(a))\ \ (a \in N).$$

Wir betrachten dann Elemente $b \in N \setminus M$. Diese sind als verallgemeinerte Potenzreihen durch ihren Träger und ihre Koeffizienten charakterisiert. In Abhängigkeit von diesen Angaben suchen wir für die Schnitte $p = b \restriction M$, also die von den $b$'s über $M$ induzierten Schnitte, nach Aussagen über folgende Invarianten: $G(p)$, $\operatorname{sign}(p)$, $V(p)$ und $\operatorname{sign}^*(\hat{p})$. Für den Fall, daß $\Gamma$ gleich $\mathbb{Q}$ und $M$ gleich dem reellen Abschluß von $R(t)$ in $N$ ist, finden wir alle Ergebnisse in [T1], Beispiele 3.11, C.

**Definition 3.21.** Sei $b \in N$. Dann ist der Träger $\operatorname{supp}(b)$ **vom Ordnungstyp** $\omega$ der natürlichen Zahlen, wenn er ordnungsisomorph zu $\mathbb{N}$ ist.

**Proposition 3.22.** *Sei $b \in N \setminus M$ mit $b > 0$. Dann sind äquivalent:*

*(i) $b \models G^+$ für eine konvexe Untergruppe $G$ von $M$.*

*(ii) $v(b) \notin \mathbb{Q}$.*

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Wir nehmen an, es gilt $v(b) \in \mathbb{Q}$. Dann läßt sich $b$ schreiben als $b = b(\gamma_0)t^{\gamma_0}+$ (Terme höherer Ordnung) mit einem $\gamma_0 \in \mathbb{Q}$. Es gilt $b < \frac{3}{2}b(\gamma_0)t^{\gamma_0} < 2b$. Also realisieren $b$ und $2b$ nicht denselben Schnitt von $M$, weil $\frac{3}{2}b(\gamma_0)t^{\gamma_0} \in M$ gilt. Demnach realisiert $b$ nicht die Oberkante einer konvexen Untergruppe $G$ von $M$.
„ $\Leftarrow$ “: Sei $v(b) \notin \mathbb{Q}$. Wir schreiben $p := b \restriction M$ und zeigen $p = G^+$ für eine konvexe Untergruppe $G$ von $M$. Wir haben keine Wahl bei der Definition und setzen $G := (p^L \cap M^{\geq 0}) \cup -(p^L \cap M^{\geq 0})$. Offenbar gilt dann $p = G^+$. Um einzusehen, daß $G$

eine konvexe Untergruppe von $M$ ist, rechnen wir nur nach, daß für ein $x \in G$ mit $0 < x < b$ auch $2x < b$ gilt. Dies ist aber klar, da aus $0 < x < b$ nach Bemerkung 3.9 $v(b) \leq v(x)$ folgt. Damit gilt $v(b) < v(x)$. Denn nach Voraussetzung gilt $v(b) \notin \mathbb{Q}$, andererseits gilt aber $v(x) \in \mathbb{Q}$, weil $x \in M$ eine Puiseuxreihe ist. Also gilt wegen $v(2x) = v(x) > v(b)$ auch $2x < b$. □

Wir betrachten zunächst den Fall aus Proposition 3.22. Aus diesem können wir alles ableiten, was nicht ohnehin schon in [T1] behandelt ist. Wir verwenden im weiteren Verlauf folgende

**Bezeichnung 3.23.** Für ein Element $b$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ bezeichnen wir mit $\operatorname{sgn}(b)$ das Vorzeichen oder **Signum** von $b$, setzen also $\operatorname{sgn}(b) = 1$, falls $b > 0$, und $\operatorname{sgn}(b) = -1$, falls $b < 0$ gilt. Wir verwenden später für Schnitte dieselbe Schreibweise.

**Proposition 3.24.** *Sei $b \in N \setminus M$ mit $v(b) \notin \mathbb{Q}$. Für den Schnitt $p := b \restriction M$ gilt dann* $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sgn}(b) \in \{\pm 1\}$ *und $G(p) = \{g \in M \mid v(b) < v(g)\}$.*

*(i) Ist $v(b) > \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = \{0\}$, $V(p) = M$, $G^*(\hat{p}) = M^{>0}$ und* $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = -1$.

*(ii) Ist $v(b) < \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = M$, $V(p) = M$, $G^*(\hat{p}) = M^{>0}$ und* $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = +1$.

*Sei im folgenden $V$ der zur Einschränkung $v|_M : M \to \mathbb{Q}$ von $v$ auf $M$ gehörende Bewertungsring von $M$, das heißt $V = \{a \in M \mid v(a) \geq 0\}$ mit den positiven Einheiten $V^{*>0} = \{a \in M^{>0} \mid v(a) = 0\}$ und dem eindeutigen maximalen Ideal $\mathfrak{m} := V \setminus V^* = \{a \in M \mid v(a) > 0\}$.*

*(iii) Ist $|v(b)| \not> \mathbb{Q}$, so gilt $V(p) = V$ und $G^*(\hat{p}) = V^{*>0}$.*

*(a) Ist $v(b) \restriction \mathbb{Q} = q^-$ für ein $q \in \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = t^q \cdot V$ und* $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = +1$.

*(b) Ist $v(b) \restriction \mathbb{Q} = q^+$ für ein $q \in \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = t^q \cdot \mathfrak{m}$ und* $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = -1$.

*(c) Ist $v(b) \restriction \mathbb{Q}$ frei, so gilt* $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = 0$.

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall $b > 0$. Ist $b < 0$, so ändert sich nur das Vorzeichen von $\operatorname{sign}(b)$, alles andere bleibt aus Symmetriegründen gleich.
Nach Proposition 3.22 gilt $b \models G^+$ für eine konvexe Untergruppe $G$ von $M$. Mit anderen Worten gilt $p = b \restriction M = G^+$ und somit $\operatorname{sign}(p) = +1$. Auch die Gleichung $G(p) = \{g \in M \mid v(b) < v(g)\}$ sehen wir leicht. „ $\subseteq$ “: Sei $g \in G(p)$, ohne Einschränkung nehmen wir $g > 0$ an. Dann gilt $0 < g < \hat{p} = p < b$ und mit Bemerkung 3.9 folgt $v(g) \geq v(b)$. Da nach Voraussetzung $v(b) \notin \mathbb{Q}$ gilt, folgt $v(g) > v(b)$.
„ $\supseteq$ “: Ist $g \in M$ mit $v(g) > v(b)$, so ändert die Addition von $g$ zu einem Element $a \in M$ offensichtlich nichts an dessen Verhältnis zu $b$, das heißt $g \in G(p)$.

(i) Betrachten wir zunächst den einfachen Fall $v(b) > \mathbb{Q}$. Dann gilt $p = 0^+$. Sofort klar sind also die Aussagen $G(p) = \{0\}$, $V(p) = M$ sowie $G^*(\hat{p}) = M^{>0}$. Aus $\hat{p} = 1 \cdot 0^+ = 1 \cdot (M^{>0})^- = 1 \cdot (G^*(\hat{p}))^-$ sehen wir auch $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = -1$.

(ii) Ist $v(b) < \mathbb{Q}$, so gilt $p = +\infty$. Damit folgt leicht $G(p) = V(p) = M$ und

$G^*(p) = M^{>0}$. Aus $\hat{p} = M^+ = 1 \cdot (G^*(\hat{p}))^+$ sehen wir $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = +1$.

(iii) Ist $|v(b)| \not> \mathbb{Q}$, so ist der Schnitt $\xi := v(b) \restriction \mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}$ ungleich $-\infty$ oder $+\infty$ und es gilt $G(\xi) \neq \mathbb{Q}$. Da $G(\xi)$ aber eine konvexe Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist, muß $G(\xi) = \{0\}$ gelten. Wir schreiben die Gleichung $G(p) = \{g \in M \mid v(b) < v(g)\}$ von oben um und erhalten $G(p)^{>0} = \{g \in M^{>0} \mid \xi < v(g)\}$. Damit sehen wir $G^*(\hat{p}) = \{a \in M^{>0} \mid v(a) = 0\} = V^{*>0}$. Schließlich gilt noch $V(p)^{*>0} = V(G(p))^{*>0} = G^*(G(p)^+) = G^*(\hat{p}) = V^{*>0}$ und deshalb $V(p) = V$.

(a) Sei $\xi = q^-$ mit einem $q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $G(p) = \{g \in M \mid \xi < v(g)\} = \{g \in M \mid q \leq v(g)\}$. Daraus folgt sofort $G(p) = t^q \cdot V$. Denn für alle $g \in M$ gilt $v(\frac{g}{t^q}) = v(g) - v(t^q) = v(g) - q \geq 0$ genau dann, wenn $g \in G(p)$ gilt. Weiter erhalten wir $\hat{p} = G(p)^+ = t^q \cdot V^+ = t^q \cdot (V^{*>0})^+ = t^q \cdot G^*(\hat{p})^+$ und wegen $t^q > 0$ also $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = +1$.

(b) Sei $\xi = q^+$ mit einem $q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $G(p) = \{g \in M \mid q < v(g)\}$. Dies bedeutet $G(p) = t^q \cdot \mathfrak{m}$. Somit gilt $\hat{p} = t^q \cdot \mathfrak{m}^+ = t^q \cdot (V^{*>0})^- = t^q \cdot G^*(\hat{p})^-$, und das bedeutet $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = -1$.

(c) Sei $\xi$ ein freier Schnitt von $\mathbb{Q}$. Wir nehmen an, es gilt $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = 1$. Dann gibt es ein $a \in M^{>0}$ mit $\hat{p} = a \cdot G^*(\hat{p})^+ = a \cdot V^+$. Daraus folgt aber $\xi = v(a)^-$ und somit ein Widerspruch zur Voraussetzung. Aus der Annahme $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = -1$ ergibt sich $\hat{p} = a \cdot G^*(\hat{p})^- = a \cdot (V^{*>0})^- = a \cdot \mathfrak{m}^+$ für ein $a \in M^{>0}$. Dann aber gilt $\xi = v(a)^+$ und wieder erhalten wir einen Widerspruch. Da $\hat{p}$ ein Schnitt des reell abgeschlossenen Körpers $M$ ist, ist auch $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = \infty$ ausgeschlossen. Damit muß $\operatorname{sign}^*(\hat{p}) = 0$ gelten. □

**Definition/Bemerkung 3.25.** (a) Seien $b, c \in N$ gegeben. $b$ heißt ein **vorderer Abschnitt von** $c$, wenn $\operatorname{supp}(c - b) > \operatorname{supp}(b)$ gilt. Genau dann ist $b$ ein vorderer Abschnitt von $c$, wenn $b = c$ gilt auf $(\operatorname{supp}(b)^+)^L$.
(b) Sei $b \in N$ mit unendlichem Träger. Wir wählen induktiv $n_1 := v(b)$ und $n_i := \min(\operatorname{supp}(b) \setminus \{n_1, \ldots, n_{i-1}\})$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq 2$. Damit definieren wir den **abzählbaren vorderen Abschnitt** $\operatorname{trunc}(b) : \Gamma \to R$ durch

$$\operatorname{trunc}(b)(\gamma) := \begin{cases} b(\gamma) & \text{, falls } \gamma = n_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N} \text{ gilt} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\operatorname{trunc}(b)$ ein vorderer Abschnitt von $b$ und hat der Träger von $\operatorname{trunc}(b)$ Ordnungstyp $\omega$.

**Proposition 3.26.** *Sei $c \in N$, und sei $b \in N \setminus M$ ein vorderer Abschnitt von $c$, dessen Träger* $\operatorname{supp}(b)$ *vom Ordnungstyp $\omega$ der natürlichen Zahlen ist. Dann hat auch $c$ unendlichen Träger und es gilt $b \restriction M = c \restriction M$. Gilt zusätzlich* $\operatorname{trunc}(c) \notin M$, *so gilt insbesondere* $\operatorname{trunc}(c) \models c \restriction M$.

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung $b < c$. Wir nehmen an, es gibt ein $a \in M$ mit $b < a \leq c$. Dann ist $a$ eine Puiseuxreihe, also von der Form $a = \sum_{n \geq n_0} a_n t^{\frac{n}{k}}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $n_0 \in \mathbb{Z}$. Wegen $b < a \leq c$ und $b = c$ auf $(\operatorname{supp}(b)^+)^L$ gibt es ein $x \in \operatorname{supp}(a)$ mit $x > \operatorname{supp}(b)$. $\operatorname{supp}(a)$ ist entweder endlich oder vom Ordnungstyp

$\omega$, also ergibt sich in beiden Fällen ein Widerspruch, da $\mathrm{supp}(b)$ vom Ordnungstyp $\omega$ ist. Für den Zusatz weisen wir darauf hin, daß mit $\mathrm{trunc}(c) \notin M$ auch $c \notin M$ gilt. $\square$

**Theorem 3.27.** *Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper, $\Gamma \supseteq \mathbb{Q}$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe und $N := R((t^\Gamma))$ der zugehörige verallgemeinerte Potenzreihenkörper. Sei weiter $P$ der Körper der Puiseuxreihen, $M$ ein reell abgeschlossener Zwischenkörper*

$$R(t) \subseteq M \subseteq P \subseteq R((t^\Gamma)) = N$$

*und $v$ die bekannte Bewertung*

$$v : N \to \Gamma \cup \infty,\ v(a) := \min(\mathrm{supp}(a))\ \ (a \in N).$$

*Sei im folgenden $V$ der zur Einschränkung $v|_M : M \to \mathbb{Q}$ von $v$ auf $M$ gehörende Bewertungsring von $M$, das heißt $V = \{a \in M \mid v(a) \geq 0\}$ mit den positiven Einheiten $V^{*>0} = \{a \in M^{>0} \mid v(a) = 0\}$ und dem eindeutigen maximalen Ideal $\mathfrak{m} := V \setminus V^* = \{a \in M \mid v(a) > 0\}$. Sei $b \in N \setminus M$ mit $b > 0$ und sei $p := b \restriction M$ der von $b$ auf $M$ induzierte Schnitt.*

*(i) Ist $\mathrm{supp}(b)$ unendlich und gilt $\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \subseteq \mathbb{Q}$, aber $\mathrm{trunc}(b) \notin M$, so gilt $\mathrm{sign}(p) = 0$. Wir können ohne Einschränkung ein $b$ mit Träger $\mathrm{supp}(b)$ vom Ordnungstyp $\omega$ betrachten. Setzen wir $\xi := \mathrm{supp}(b)^+$ als die Oberkante von $\mathrm{supp}(b)$ in $\mathbb{Q}$, so ist $\xi$ ungleich $-\infty$ und ungleich $q^+$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und es gibt nur folgende drei Fälle:*

*(a) Ist $\xi = +\infty$, so gilt $G(p) = \{0\}$, $V(p) = M$, $G^*(\hat{p}) = M^{>0}$ sowie $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = -1$.*

*(b) Ist $\xi = q^-$ für ein $q \in \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = t^q \cdot V$, $V(p) = V$, $G^*(\hat{p}) = V^{*>0}$ sowie $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = +1$.*

*(c) Ist $\xi$ frei, so gilt $G(p) = \{g \in M \mid \mathrm{supp}(b) < v(g)\}$, $V(p) = V$, $G^*(\hat{p}) = V^{*>0}$ sowie $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = 0$.*

*(ii) Andernfalls gilt $\mathrm{supp}(b) \not\subseteq \mathbb{Q}$ und wir setzen $\gamma_0 := \min(\mathrm{supp}(b) \setminus \mathbb{Q})$. Es gilt $\mathrm{sign}(p) = \mathrm{sgn}(b(\gamma_0)) \in \{\pm 1\}$ und $G(p) = \{g \in M \mid \gamma_0 < v(g)\}$.*

*(a) Ist $\gamma_0 > \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = \{0\}$, $V(p) = M$, $G^*(\hat{p}) = M^{>0}$ und $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = -1$.*

*(b) Ist $\gamma_0 < \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = M$, $V(p) = M$, $G^*(\hat{p}) = M^{>0}$ und $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = +1$.*

*(c) Ist $|\gamma_0| \not> \mathbb{Q}$, so gilt $V(p) = V$ und $G^*(\hat{p}) = V^{*>0}$.*

*(1) Ist $\gamma_0 \restriction \mathbb{Q} = q^-$ für ein $q \in \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = t^q \cdot V$ und $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = +1$.*
*(2) Ist $\gamma_0 \restriction \mathbb{Q} = q^+$ für ein $q \in \mathbb{Q}$, so gilt $G(p) = t^q \cdot \mathfrak{m}$ und $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = -1$.*
*(3) Ist $\gamma_0 \restriction \mathbb{Q}$ frei, so gilt $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = 0$.*

*Beweis.* Wir machen insgesamt dreimal eine Fallunterscheidung. Nur ein Fall führt uns zu Teil (i), die anderen behandeln wir alle in Teil (ii). Entweder ist $\mathrm{supp}(b)$ endlich (und wir sind in Fall (ii)) oder unendlich. Ist $\mathrm{supp}(b)$ unendlich, können wir $\mathrm{trunc}(b)$ bilden und wir unterscheiden, ob $\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \subseteq \mathbb{Q}$ gilt oder nicht. Falls nicht, sind wir in Fall (ii), falls doch, müssen wir ein drittes Mal aufspalten. Denn falls $\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \subseteq \mathbb{Q}$ gilt, ist entweder $\mathrm{trunc}(b) \in M$ oder nicht. Wir landen in Fall (ii) beziehungsweise Fall (i).

(i) Sei also $\mathrm{supp}(b)$ unendlich und gelte $\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \subseteq \mathbb{Q}$, aber $\mathrm{trunc}(b) \notin M$. Nach Proposition 3.26 gilt dann $p = \mathrm{trunc}(b) \restriction M$. Daher können wir ohne Einschränkung von einem $b$ mit Träger $\mathrm{supp}(b)$ vom Ordnungstyp $\omega$ ausgehen. Wir befinden uns dann im Kontext von [T1] und sehen alle Rechnungen dort.

(ii) Als erstes zeigen wir, daß hier $\mathrm{supp}(b) \not\subseteq \mathbb{Q}$ gilt. Ist $\mathrm{supp}(b)$ endlich, so ist $\mathrm{supp}(b) \not\subseteq \mathbb{Q}$, da nach Voraussetzung $b \notin M$ gilt. Auch wenn $\mathrm{supp}(b)$ unendlich ist und schon $\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \not\subseteq \mathbb{Q}$ gilt, ist natürlich auch $\mathrm{supp}(b) \supseteq \mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b))$ nicht enthalten in $\mathbb{Q}$. Im dritten Fall, also wenn $\mathrm{supp}(b)$ unendlich, $\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \subseteq \mathbb{Q}$ und $\mathrm{trunc}(b) \in M$ gilt, so ist $b \neq \mathrm{trunc}(b)$ wegen $b \notin M$, das heißt es gibt ein Element $\gamma \in \mathrm{supp}(b)$ mit $\gamma > \mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b))$. Da $\mathrm{trunc}(b)$ als Element von $M$ eine Puiseuxreihe ist, ist $\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b))$ unbeschränkt in $\mathbb{Q}$ und somit gilt $\gamma > \mathbb{Q}$. Dies zeigt auch hier $\mathrm{supp}(b) \not\subseteq \mathbb{Q}$.

Es gilt also $\mathrm{supp}(b) \not\subseteq \mathbb{Q}$ und wir setzen $\gamma_0 := \min(\mathrm{supp}(b) \backslash \mathbb{Q})$. Wir können nun $b$ als eine Summe $b = a + b'$ schreiben, wobei $a \in M$ und $v(b') = \gamma_0 \notin \mathbb{Q}$ gilt. Wir setzen nämlich $a := \sum_{\mathrm{supp}(b) \cap \mathbb{Q} \ni \gamma < \gamma_0} b(\gamma) t^\gamma$ und $b' := b - a$. Dann sehen wir leicht, daß $a \in M$ und auch $v(b') = \gamma_0 \notin \mathbb{Q}$ gilt. Es folgt $p = b \restriction M = (a + b') \restriction M = a + (b' \restriction M)$. Dann ist $p$ also ein Translat eines der Schnitte, die wir in Proposition 3.24 vollständig behandelt haben, und da alle Aussagen nur von der Invarianzgruppe abhängen, folgt die Behauptung nach dieser Proposition. □

Wir veranschaulichen Theorem 3.27 mittels der nachfolgenden Tabelle. Befinden wir uns in der Situation des Theorems, so können wir leicht ablesen, welche Signaturen von $p$ und $\hat{p}$ in Abhängigkeit von $\mathrm{supp}(b)$ auftreten. Wie im Text des Theorems bezeichnen wir mit $\gamma_0$ das Minimum von $\mathrm{supp}(b) \setminus \mathbb{Q}$, falls dieses existiert. Die Fälle $\mathrm{sign}(p)$ gleich $+1$ und $-1$ können wir zusammenfassen, da sich aus Symmetriegründen jeweils einer sofort aus dem anderen ergibt. Wir weisen noch darauf hin, daß der Fall $\mathrm{sign}(p) = 0$ und $\mathrm{sign}^*(\hat{p}) = -1$ nur für einen dichten Schnitt $p$ möglich ist, also nur wenn $p$ frei ist und $\hat{p} = 0^+$ gilt.

<table>
<tr><th colspan="6">Veranschaulichung der Signaturaussagen aus Theorem 3.27</th></tr>
<tr><th rowspan="3">$\mathrm{sign}(p)$</th><th rowspan="3">$\mathrm{sign}^*(\hat{p})$</th><th rowspan="3">$\mathrm{supp}(b)$ endlich</th><th colspan="3">$\mathrm{supp}(b)$ unendlich</th></tr>
<tr><th rowspan="2">$\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \not\subseteq \mathbb{Q}$</th><th colspan="2">$\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b)) \subseteq \mathbb{Q}$</th></tr>
<tr><th>$\mathrm{trunc}(b) \in M$</th><th>$\mathrm{trunc}(b) \notin M$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\mathrm{sgn}(b(\gamma_0))$</td><td>$+1$</td><td colspan="3">$\gamma_0 < \mathbb{Q}$ oder $\gamma_0 \restriction \mathbb{Q} = q^-$ für ein $q \in \mathbb{Q}$</td><td>–</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="3">$\gamma_0 \restriction \mathbb{Q}$ freier Schnitt von $\mathbb{Q}$</td><td>–</td></tr>
<tr><td>$-1$</td><td colspan="3">$\gamma_0 > \mathbb{Q}$ oder $\gamma_0 \restriction \mathbb{Q} = q^+$ für ein $q \in \mathbb{Q}$</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td>$+1$</td><td colspan="3">–</td><td>$\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b))^+ =$<br>$= q^-$ für ein $q \in \mathbb{Q}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="3">–</td><td>$\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b))^+$<br>freier Schnitt von $\mathbb{Q}$</td></tr>
<tr><td>$-1$</td><td colspan="3">–</td><td>$\mathrm{supp}(\mathrm{trunc}(b))^+ =$<br>$= +\infty_{\mathbb{Q}}$ (nur möglich,<br>wenn $\hat{p} = 0^+$ gilt)</td></tr>
</table>

# 4. Addition von Schnitten

## 4.1. Die Addition von Schnitten mittels Paaren zweier Schnitte

Im folgenden definieren wir für (echte) Schnitte einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ eine Addition. Für zwei echte Schnitte $p$ und $q$ von $G$ bilden wir intuitiv das Paar $(p^L + q^L,\, p^R + q^R)$. Zwar gilt dann $p^L + q^L < p^R + q^R$, doch liefert dies im allgemeinen keinen Schnitt von $G$. Betrachten wir zum Beispiel den Schnitt $p := 1^+$ von $\mathbb{Z}$, so ist $(p^L + p^L, p^R + p^R) = (\{z \leq 2\}, \{z \geq 4\})$ kein Schnitt von $\mathbb{Z}$. Wir erhalten jedoch zu zwei echten Schnitten kanonisch zwei Schnitte und machen folgende

**Definition 4.1.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Seien $p$ und $q$ echte Schnitte von $G$. Dann definieren wir die zwei Schnitte

$$\begin{aligned}(p+q)_{\text{links}} &:= (p^L + q^L)^+ = \{x + y \mid x < p,\, y < q\}^+ \quad \text{und}\\ (p+q)_{\text{rechts}} &:= (p^R + q^R)^- = \{x + y \mid x > p,\, y > q\}^-.\end{aligned}$$

*Bemerkung 4.2.* In Definition 4.1 beschränken wir uns auf echte Schnitte. Zwar könnten wir diese Definition der Addition von Schnitten in naheliegender Weise auch auf unechte Schnitte ausdehnen. Dies würde jedoch einige Fallunterscheidungen und damit deutlich größeren formalen Aufwand mit sich bringen. Da unser Hauptaugenmerk zudem ohnehin der Addition von Schnitten mittels realisierender Obergruppen und Oberkörper in Abschnitt 4.2 gilt, verzichten wir auf diese unwesentliche Verallgemeinerung.

Natürlich gilt in der Situation von Definition 4.1 immer $(p+q)_{\text{links}} \leq (p+q)_{\text{rechts}}$. Im allgemeinen muß aber keine Gleichheit gelten. Wir führen dazu ein einfaches Beispiel an, das auch mit einer divisiblen angeordneten abelschen Gruppe funktioniert. Eine noch allgemeinere Aussage werden wir in Proposition 4.7 machen.

*Beispiel 4.3.* Sei $\{0\} \subsetneq G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $a \in G$ ein beliebiges Element von $G$. Dann gilt

$$(a^- + 0^+)_{\text{links}} = a^- < a < a^+ = (a^- + 0^+)_{\text{rechts}}.$$

*Beweis.* $(a^- + 0^+)_{\text{links}} = \{x + y \mid x < a^-,\, y < 0^+\}^+ = \{x + 0 \mid x < a^-\}^+ = a^-$. Ebenfalls schnell sehen wir die rechte Gleichheit. Es gilt

$$\begin{aligned}(a^- + 0^+)_{\text{rechts}} = \{x + y \mid x > a^-,\, y > 0^+\}^- = \{x + y \mid x \geq a,\, y > 0\}^- =\\ = \{a + y \mid y > 0\}^- = \{x \mid x > a\}^- = a^+.\end{aligned}$$

□

Falls wie in Beispiel 4.3 linker und rechter Schnitt nicht übereinstimmen, machen wir folgende Beobachtung, die zwar direkt aus der Definition folgt, aber trotzdem für manche Beweise nützlich ist.

*Bemerkung 4.4.* Seien $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p < q$ zwei echte Schnitte von $G$. Weiter sei $g \in G$ mit $(p+q)_{\text{links}} < g < (p+q)_{\text{rechts}}$. Dann gilt für alle $x \in G$:

(i) Ist $x < p$, so gilt $g - x > q$.

(ii) Ist $p < x < q$, so gilt $p < g - x < q$.

(iii) Ist $x > q$, so gilt $g - x < p$.

Wie wir gesehen haben, stimmen in der Situation von Definition 4.1 der linke und rechte Schnitt im allgemeinen nicht überein. Wir können uns allerdings auf die Betrachtung eines Schnittes aus diesem Paar beschränken, denn der andere läßt sich dann sofort elementar berechnen.

**Proposition 4.5.** *Seien $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ und $q$ echte Schnitte von $G$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}(p+q)_{\text{rechts}} &= -(-p+(-q))_{\text{links}} \text{ und} \\ (p+q)_{\text{links}} &= -(-p+(-q))_{\text{rechts}}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen für die erste Behauptung die Gleichheit der rechten Hälften.

$$\begin{aligned}&[-(-p+(-q))_{\text{links}}]^R = -[(-p+(-q))_{\text{links}}]^L = \\ &\quad = -\{x+y \mid x < -p,\, y < -q\} = \{-x-y \mid x < -p,\, y < -q\} = \\ &\qquad = \{x+y \mid x > p,\, y > q\} = ((p+q)_{\text{rechts}})^R.\end{aligned}$$

Damit folgt auch die zweite Behauptung, da $(-p+(-q))_{\text{rechts}} = -(p+q)_{\text{links}}$ gilt. □

**Bezeichnung 4.6.** Seien $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ und $q$ echte Schnitte von $G$. Dann schreiben wir

$$(p-q)_{\text{links}} := (p+(-q))_{\text{links}} \text{ und } (p-q)_{\text{rechts}} := (p+(-q))_{\text{rechts}}.$$

**Proposition 4.7.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein echter Schnitt von $G$. Dann gilt*

$$(p-p)_{\text{links}} = -\hat{p} \;<\; \hat{p} = (p-p)_{\text{rechts}}.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die zweite Gleichheit, die erste folgt dann sofort. Direkt sehen wir folgende Darstellung von $(p-p)_{\text{rechts}}$:

$$\begin{aligned}&(p-p)_{\text{rechts}} = (p+(-p))_{\text{rechts}} = \\ &\qquad = \{x+y \mid x > p,\, y > -p\}^- = \{x-y \mid x > p,\, y < p\}^-.\end{aligned}$$

Hiermit zeigen wir $\{x-y \mid x > p,\, y < p\}^- = \hat{p}$. „ $\leq$ “: Sei $z > \hat{p}$. Dann existieren nach Definition ein $y < p$ und ein $x > p$ mit $y + z = x$. Deshalb folgt sofort $z = x - y > \{x-y \mid x > p,\, y < p\}^-$. Auch die Abschätzung „ $\geq$ “ folgt schnell aus der Definition. Sei $z > \{x - y \mid x > p,\, y < p\}^{-}$, dann gibt es Elemente $x > p$ und $y < p$ mit $z \geq x - y$. Es gilt $y + z \geq y + x - y = x > p$ und somit muß $z > G(p)$ oder $z > \hat{p}$ gelten. Die Behauptung $(p - p)_{\text{rechts}} = \hat{p}$ ist bewiesen.

Die erste Behauptung folgt jetzt sofort anhand Proposition 4.5. Denn es gilt $(p - p)_{\text{links}} = (p + (-p))_{\text{links}} = -(-p + p)_{\text{rechts}} = -(p - p)_{\text{rechts}} = -\hat{p}$ □

## 4.2. Die Addition von Schnitten mittels realisierender Obergruppen und Oberkörper

Die Definition der Addition von Schnitten in Abschnitt 4.1 ist intuitiv und elementar durchführbar, bereitet allerdings auch einige Probleme. Zum einen muß man die Definition erweitern, wenn man auch nichtechte Schnitte berücksichtigen will. Dies ist zwar möglich, aber erscheint uns zu umständlich. Zum anderen ist diese Definition für die Bildung mehrfacher Summen ungeeignet, da wir beim öfteren Hintereinanderausführen der Addition immer zwischen einem linken und einem rechten Schnitt unterscheiden müssen und sich somit pro Addition die Zahl der involvierten Schnitte verdoppelt. Schließlich benötigen wir bei Rechnungen ständig Fallunterscheidungen, die uns nach einer alternativen Herangehensweise an das Problem suchen lassen. Einen Ausweg finden wir in den realisierenden Obergruppen beziehungsweise realisierenden Oberkörpern. Wir werden diese im Abschnitt 4.2.1 zunächst definieren und zeigen, daß sie mit unserem Setting aus Kapitel 1 verträglich sind, das heißt mit wichtigen Invarianten eines Schnittes $p$ eines angeordneten Körpers wie den Invarianzgruppen $G(p)$ und $G^*(p)$, dem Invarianzbewertungsring $V(p)$ und den Mengen $J(p)$ und $I(p)$. Danach erklären wir in Abschnitt 4.2.2 mit Hilfe der realisierenden Obergruppen beziehungsweise Oberkörper eine brauchbare Addition von Schnitten und untersuchen den Zusammenhang mit der Addition aus Abschnitt 4.1.

### 4.2.1. Einführung von realisierenden Obergruppen und Oberkörpern

**Definition 4.8** (Realisierende Obergruppe)**.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Eine angeordnete abelsche Obergruppe $\Omega \supseteq G$ heißt **realisierend**, wenn in $\Omega$ alle Schnitte von $G$ realisiert sind.

*Bemerkung 4.9.* Für die Existenz einer realisierenden Obergruppe $\Omega$ zu einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ verweisen wir auf Proposition 4.21.

**Definition/Bemerkung 4.10.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $L \supseteq G$ eine angeordnete abelsche Obergruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann schreiben wir

$$\mathrm{Real}_L(p) := \{\alpha \in L \mid \alpha \models p\}$$

für die Menge aller Realisierungen von $p$ in $L$. $\mathrm{Real}_L(p)$ ist eine konvexe Teilmenge von $L$ und es gilt $\mathrm{Real}_L(-p) = \{\alpha \in L \mid \alpha \models -p\} = \{\alpha \in L \mid -p^R < \alpha < -p^L\} = -\{\alpha \in L \mid p^L < \alpha < p^R\} = -\mathrm{Real}_L(p)$.

**Definition 4.11.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\Omega \supseteq G$ eine realisierende Obergruppe. Dann definieren wir die Abbildung

$$\varepsilon : \mathrm{DC}(G) \to \mathrm{CT}(\Omega) := \{\text{konvexe Teilmengen von } \Omega\}$$
$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \{x\} & , \text{für } x \in G \\ \mathrm{Real}_\Omega(x) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \models x\} & , \text{für } x \in \mathrm{Cuts}(G). \end{cases}$$

Betrachten wir einen Schnitt $p$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ mittels einer realisierenden Obergruppe $\Omega \supseteq G$, fragen wir in diesem Kontext nach einer Entsprechung für die Invariante $G(p)$. Wir machen folgende

**Definition 4.12 ($\Omega$-Invarianzgruppe).** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $\Omega \supseteq G$ eine realisierende Obergruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Wir definieren die **$\Omega$-Invarianzgruppe von** $p$ als

$$G_\Omega(p) := \{\omega \in \Omega \mid \omega + \varepsilon(p) = \varepsilon(p)\}.$$

**Proposition 4.13.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $\Omega \supseteq G$ eine realisierende Obergruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann ist $G_\Omega(p)$ eine konvexe Untergruppe von $\Omega$ und es gilt*

$$G_\Omega(-p) = G_\Omega(p).$$

*Beweis.* Natürlich gilt $0 \in G_\Omega(p)$. Für Elemente $\omega_1, \omega_2 \in G_\Omega(p)$ gilt $\omega_1 + \varepsilon(p) = \varepsilon(p) = \omega_2 + \varepsilon(p)$. Daraus folgt $(\omega_1 - \omega_2) + \varepsilon(p) = \varepsilon(p)$ und somit $\omega_1 - \omega_2 \in G_\Omega(p)$. Zum Nachweis der Konvexität wählen wir Elemente $0 < \alpha < \omega$ mit $\omega \in G_\Omega(p)$. Sei $\gamma \in \varepsilon(p)$, dann gilt $\gamma < \alpha + \gamma < \omega + \gamma \in \varepsilon(p)$ und $\gamma > \gamma - \alpha > \gamma - \omega \in \varepsilon(p)$. Wegen der Konvexität von $\varepsilon(p)$ gilt also $\alpha + \gamma \in \varepsilon(p)$ und $\gamma - \alpha \in \varepsilon(p)$. Da $\gamma \in \varepsilon(p)$ beliebig war, folgt $\alpha + \varepsilon(p) = \varepsilon(p)$, und das zeigt $\alpha \in G_\Omega(p)$.

Da $\varepsilon(-p) = -\varepsilon(p)$ gilt und für alle $\omega \in \Omega$ genau dann $\omega + \varepsilon(p) = \varepsilon(p)$ gilt, wenn $\omega - \varepsilon(p) = -\varepsilon(p)$ gilt, folgt $G_\Omega(p) = G_\Omega(-p)$. □

*Bemerkung 4.14.* Zu jedem Schnitt $p$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ mit realisierender Obergruppe $\Omega \supseteq G$ existiert stets eine kleinste und eine größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$, und zwar ist $\varepsilon(p)^-$ die kleinste und $\varepsilon(p)^+$ die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$.

**Lemma 4.15.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $C \subseteq G$ eine konvexe Teilmenge von $G$ und $g \in G$. Dann sind äquivalent:*

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & g + C = C \\ \text{(b)} & g \in G(C^-) \cap G(C^+) \end{array}$$

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung $g > 0$. „(a)⇒(b)“: Für alle $z < C^-$, also alle $z < C$, gilt $g + z < g + C = C$, demnach gilt $g \in G(C^-)$ nach Lemma 1.11. Für alle $c \in C$ gilt $g + c \in g + C = C$ und damit $g + c < C^+$. Mit Lemma 1.16 folgt $g \in G(C^+)$.
„(b)⇒(a)“: Sei $g \in G(C^-) \cap G(C^+)$ und $c \in C$. Dann gilt $C^- < c$ und $c < C^+$, also auch $C^- < g + c$ und $g + c < C^+$. Mit der Konvexität von $C$ folgt $g + c \in C$. Wegen $-g \in G(C^-) \cap G(C^+)$ gilt auch $-g + c \in C$. □

**Korollar 4.16.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $\Omega \supseteq G$ eine realisierende Obergruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Seien $q := \varepsilon(p)^-$ und $r := \varepsilon(p)^+$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$. Dann gilt*

$$G_\Omega(p) = G(q) \cap G(r).$$

*Genauer gilt*

$$\begin{aligned} G_\Omega(p) &= G(q) && \text{, falls } \operatorname{sign}(p) = +1, \\ G_\Omega(p) &= G(r) && \text{, falls } \operatorname{sign}(p) = -1, \quad \text{und} \\ G_\Omega(p) = G(q) &= G(r) && \text{, falls } \operatorname{sign}(p) \in \{0, \infty\} \text{ gilt.} \end{aligned}$$

*Beweis.* Daß $G_\Omega(p) = G(q) \cap G(r)$ gilt, ist die direkte Folge von Lemma 4.15, angewandt auf die konvexe Menge $C = \varepsilon(p)$. Damit lesen wir den Rest mit Hilfe von Proposition 1.32 (iv)-(vii) ab. □

**Proposition 4.17.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe, $\Omega \supseteq G$ eine realisierende Obergruppe und $p$ ein Schnitt von $G$. Dann gilt*

$$G_\Omega(p) \cap G = G(p).$$

*Darüberhinaus liegt $G_\Omega(p)$ extremal über $G(p)$, das heißt $G_\Omega(p)^+$ ist die kleinste oder größte Erweiterung von $G(p)^+$.*

*Beweis.* Wir betrachten wieder $q := \varepsilon(p)^-$ und $r := \varepsilon(p)^+$, die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$. Dann gilt nach Korollar 4.16 $G_\Omega(p) = G(q) \cap G(r)$. Da $G(q)$ und $G(r)$ beides konvexe Untergruppen von $\Omega$ sind, ist $G_\Omega(p)$ gleich $G(q)$ oder $G(r)$. Damit ist $G_\Omega(p)^+$ gleich $\hat{q}$ oder $\hat{r}$, also nach Proposition 1.32 (ii) die kleinste oder größte Erweiterung von $\hat{p} = G(p)^+$ auf $\Omega$. Da natürlich auch $G_\Omega(p)^-$ Erweiterung von $-\hat{p}$ auf $\Omega$ ist, liegt $G_\Omega(p)$ über $G(p)$. □

Nachdem wir den Begriff der realisierenden Obergruppe eingeführt haben, definieren wir im folgenden entsprechend im Körperfall einen realisierenden Oberkörper. Anschließend werden wir in Proposition 4.21 einen solchen explizit konstruieren.

**Bezeichnung 4.18.** Sei $K$ ein angeordneter Körper. Dann bezeichnen wir den reellen Abschluß von $K$ mit $\overline{K}$ oder mit $\operatorname{rcl}(K)$.

**Definition 4.19 (**Realisierender Oberkörper**).** Sei $K$ ein angeordneter Körper. Ein angeordneter Oberkörper $\Omega \supseteq K$ heißt **realisierend**, wenn in $\Omega$ alle Schnitte von $K$ realisiert sind.

*Bemerkung 4.20.* Ist $K$ ein angeordneter Körper und $\Omega$ ein realisierender Oberkörper, so ist insbesondere $(\Omega, +)$ eine realisierende Obergruppe von $(K, +)$ und $(\Omega^{>0}, \cdot)$ eine realisierende Obergruppe von $(K^{>0}, \cdot)$.

Bis jetzt haben wir realisierende Obergruppen und Oberkörper zwar definiert, aber noch nicht ihre Existenz nachgewiesen. Dies holen wir nach in der folgenden

**Proposition 4.21.** *Sei $K$ eine angeordnete abelsche Gruppe oder ein angeordneter Körper. Dann existiert eine divisible realisierende Obergruppe beziehungsweise ein reell abgeschlossener realisierender Oberkörper $\tilde{K}$ von $K$.*

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall eines angeordneten Körpers $K$. Für eine angeordnete abelsche Gruppe $K$ können wir ganz analog verfahren.

Wir konstruieren also einen realisierenden Oberkörper von $K$ und müssen dann nur noch den reellen Abschluß bilden. Sei zunächst $R$ der reelle Abschluß von $K$. Wir definieren eine Menge von Variablen $T := \{t_\xi \mid \xi \in \mathrm{Cuts}(R)\}$. Für alle $T_0 \subseteq T$ sei

$$R(T_0) := \{\tfrac{f}{g} \mid f, g \in R[t_1, \dots, t_k] \text{ mit } k \in \mathbb{N},\, t_i \in T_0 \text{ und } g \neq 0\}.$$

Weiter setzen wir

$$S := \{(T_0, P) \mid T_0 \subseteq T,\, P \text{ Anordnung von } R(T_0) \text{ mit } t_\xi \models \xi \text{ für alle } t_\xi \in T_0\}.$$

Wir erhalten eine partielle Ordnung von $S$, indem wir für alle $(T_0, P), (T_0', P') \in S$ definieren

$$(T_0, P) \leq (T_0', P') :\Leftrightarrow T_0 \subseteq T_0' \text{ und } P' \text{ setzt } P \text{ fort.}$$

Wir können das Lemma von Zorn anwenden und erhalten ein maximales Element $(\tilde{T}, \tilde{P}) \in S$. Dann muß aber $\tilde{T} = T$ gelten. Denn angenommen, es existiert ein $t_\xi \in T \setminus \tilde{T}$, dann wählen wir einen beliebigen Schnitt $\eta$ des angeordneten Körpers $(R(\tilde{T}), \tilde{P})$ über $\xi$, zum Beispiel die kleinste Erweiterung von $\xi$ auf $R(\tilde{T})$. Wir wählen eine Realisierung $t$ von $\eta$ in $(R(\tilde{T}))(t) = R(\tilde{T} \cup \{t\})$ mit einer Anordnung, die $\tilde{P}$ fortsetzt. Wegen $t \models \eta$ und folglich $t \models \eta \restriction R = \xi$ können wir $t$ auch in $t_\xi$ umbenennen und erhalten damit einen Widerspruch zur Maximalität von $(\tilde{T}, \tilde{P})$. Wir definieren also $\tilde{K}$ als den reellen Abschluß von $R(T)$: $\tilde{K} := \overline{R(T)}$. □

Meistens werden wir zu einer angeordneten abelschen Gruppe oder einem angeordneten Körper $K$ von einer realisierenden Obergruppe beziehungsweise einem realisierenden Oberkörper $\Omega \supseteq K$ nur die Eigenschaft von $\Omega$ benötigen, daß in $\Omega$ alle Schnitte von $K$ realisiert sind. Manchmal brauchen wir aber auch Obergruppen beziehungsweise Oberkörper von $K$ mit einer stärkeren Eigenschaft. Sie muß sicherstellen, daß wir Schnitte in einer Oberstruktur realisieren können, dann nochmals Schnitte dieser Oberstruktur in einer zweiten Erweiterung realisieren können und dennoch eine noch größere Oberstruktur nicht verlassen. Wir nutzen diese Eigenschaft im Beweis von Proposition 4.40. Formuliert und bereitgestellt wird sie in der folgenden

**Proposition 4.22.** *Sei $K$ eine angeordnete abelsche Gruppe oder ein angeordneter Körper. Dann existiert eine divisible angeordnete abelsche Obergruppe beziehungsweise ein reell abgeschlossener Oberkörper $\Omega \supseteq K$, so daß die Ordnung von $\Omega$ die Ordnung von $K$ fortsetzt und $\Omega$ die folgende Eigenschaft (ZE) besitzt:*
*Ist $K' \supseteq K$ eine angeordnete abelsche Gruppe mit $\dim_{\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}(\mathrm{dh}(K')/\mathrm{dh}(K)) < \infty$ beziehungsweise ein angeordneter Körper mit Transzendenzgrad $\mathrm{trdeg}(\overline{K'}/\overline{K}) < \infty$ und ist $\tau : K' \xrightarrow{K} \Omega$ eine Ordnungseinbettung, dann existiert für jede weitere angeordnete abelsche Gruppe $K'' \supseteq K'$ mit $\dim_{\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}(\mathrm{dh}(K'')/\mathrm{dh}(K')) < \infty$ beziehungsweise für jeden weiteren angeordneten Körper $K'' \supseteq K'$ mit $\mathrm{trdeg}(\overline{K''}/\overline{K'}) < \infty$ eine Ordnungseinbettung $\tau^* : K'' \to \Omega$, die $\tau$ fortsetzt.*

*Beweis.* Wieder führen wir den Beweis für den Fall eines angeordneten Körpers $K$. Für eine angeordnete abelsche Gruppe $K$ erhalten wir die gewünschte Eigenschaft nach demselben Prinzip.

Zu $K$ haben wir nach Proposition 4.21 einen reell abgeschlossenen Oberkörper $\tilde{K} \supseteq K$, dessen Anordnung die von $K$ fortsetzt und in dem alle Schnitte von $K$ realisiert sind. Wir definieren iterativ

$$\Omega^{(1)} := \widetilde{(\tilde{K})}, \;\; \Omega^{(n)} := \widetilde{(\Omega^{(n-1)})} \; (n \geq 2).$$

Damit definieren wir den reell abgeschlossenen Körper $\Omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega^{(n)}$ und zeigen, daß dieser Körper die gewünschte Eigenschaft besitzt. Seien also Körpererweiterungen $K'/K$ und $K''/K'$ gegeben mit $\operatorname{trdeg}(\overline{K'}/\overline{K}) < \infty$ und $\operatorname{trdeg}(\overline{K''}/\overline{K'}) =: n < \infty$. Sei weiterhin $\tau : K' \xrightarrow{K} \Omega$ eine Ordnungseinbettung. Da mit $\overline{K'}/\overline{K}$ auch $K'/K$ von endlichem Transzendenzgrad ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\tau(K') \subseteq \Omega^{(m)}$. Wir zeigen mit Induktion nach $n$ die Existenz einer Ordnungseinbettung $\tau^* : K'' \to \Omega^{(m+n)} \subseteq \Omega$, die $\tau$ fortsetzt.

$\underline{n = 1}$: Dann existiert ein $\alpha_1 \in \overline{K''}$ mit $\overline{K''} = \overline{K'(\alpha_1)}$. Da $\Omega^{(m)}$ reell abgeschlossen ist, existiert nach [KS], Kap. I, §11, Theorem 1, S. 44, genau ein ordnungstreuer Homomorphismus

$$\tilde{\tau} : \overline{K'} \to \Omega^{(m)},$$

der $\tau$ fortsetzt. Nach [KS], Kap. II, §9, Korollar 2, S. 81, entspricht die Anordnung von $\overline{K'}(\alpha_1)$ genau einem Schnitt $\xi$ von $\overline{K'}$. Mittels $\tilde{\tau}$ erhalten wir aus $\xi$ den Schnitt $\eta := (\tilde{\tau}(\xi^L))^+$ von $\Omega^{(m)}$. In $\Omega^{(m+1)}$ sind nach Definition alle Schnitte von $\Omega^{(m)}$ realisiert, also können wir ein $t_\eta \in \Omega^{(m+1)}$ wählen mit $t_\eta \models \eta$. Wir definieren

$$\begin{aligned} &\tilde{\tau}' : \overline{K'}(\alpha_1) \to \Omega^{(m+1)} \\ &\tilde{\tau}'|_{\overline{K'}} := \tilde{\tau}, \; \tilde{\tau}'(\alpha_1) := t_\eta. \end{aligned}$$

Wieder mit [KS], Kap. I, §11, Theorem 1, S. 44, existiert genau ein ordnungstreuer Homomorphismus $\tau^* : \operatorname{rcl}(\overline{K'}(\alpha_1)) = \overline{K''} \to \Omega^{(m+1)}$, der $\tilde{\tau}'$ fortsetzt. Nach Konstruktion setzt $\tau^*$ dann $\tau$ fort.

$\underline{n \to n+1}$: Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \overline{K''}$ mit $\overline{K''} = \overline{K'(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert bereits eine Ordnungseinbettung

$$\sigma : K'(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \to \Omega^{(m+n)},$$

die $\tau$ fortsetzt. Wieder nach [KS], Kap. I, §11, Theorem 1, S. 44, haben wir genau einen ordnungstreuen Homomorphismus

$$\tilde{\sigma} : \overline{K'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \to \Omega^{(m+n)},$$

der $\sigma$ fortsetzt. Auch hier entspricht der Anordnung von $\overline{K'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(\alpha_{n+1})$ ein Schnitt $\xi$ von $\overline{K'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$ und mittels $\tilde{\sigma}$ erhalten wir den Schnitt $\eta := (\tilde{\sigma}(\xi^L))^+$

von $\Omega^{(m+n)}$. In $\Omega^{(m+n+1)}$ sind alle Schnitte von $\Omega^{(m+n)}$ realisiert. Wir finden demnach ein $t_\eta \in \Omega^{(m+n+1)}$ mit $t_\eta \models \eta$ und definieren

$$\tilde{\tau} : \overline{K'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(\alpha_{n+1}) \to \Omega^{(m+n+1)}$$
$$\tilde{\tau}|_{\overline{K'(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}} := \tilde{\sigma},\ \tilde{\tau}(\alpha_{n+1}) := t_\eta.$$

Wie vorher existiert dann genau ein ordnungstreuer Homomorphismus

$$\tau^* : \mathrm{rcl}\big(\overline{K'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(\alpha_{n+1})\big) = \overline{K''} \to \Omega^{m+n+1},$$

der $\tilde{\tau}$ und damit $\tau$ fortsetzt. □

Ist $K$ ein angeordneter Körper mit realisierendem Oberkörper $\Omega \supseteq K$, so betrachten wir gemäß Definition 4.11 die Einbettung $\varepsilon : \mathrm{DC}(K) \to \mathrm{CT}(\Omega)$.

**Proposition 4.23.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Sei $\varepsilon : \mathrm{DC}(K) \to \mathrm{CT}(\Omega)$ die Einbettung aus Definition 4.11. Dann gilt für alle $a \in K^{>0}$ und alle $b \in K$*

$$\varepsilon(ap + b) = a\varepsilon(p) + b.$$

*Außerdem gilt*

$$\varepsilon(-p) = -\varepsilon(p).$$

*Für alle $c$, $d \in \Omega^{>0}$ gilt*

$$(c + d)\varepsilon(p) = c\varepsilon(p) + d\varepsilon(p).$$

*Beweis.* Für alle $a \in K^{>0}$ und alle $b \in K$ gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon(ap + b) &= \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \models ap + b\} = \\ &= \{\alpha \in \Omega \mid (ap + b)^L < \alpha < (ap + b)^R\} = \{\alpha \in \Omega \mid ap^L + b < \alpha < ap^R + b\} = \\ &= a \cdot \{\alpha \in \Omega \mid p^L < \alpha < p^R\} + b = a\varepsilon(p) + b.\end{aligned}$$

Die zweite Behauptung haben wir bereits in Definition/Bemerkung 4.10 gesehen. Wir zeigen noch die letzte Aussage. Seien dafür $c$, $d \in \Omega^{>0}$. Die Inklusion „ $\subseteq$ “ ist trivial. „ $\supseteq$ “: Seien $a_1 \leq a_2 \in \varepsilon(p)$. Dann gilt mit $a_3 := \frac{ca_1+da_2}{c+d}$ natürlich $ca_1 + da_2 = (c + d)a_3$. Da $a_1 = \frac{c}{c+d}a_1 + \frac{d}{c+d}a_1 \leq \frac{c}{c+d}a_1 + \frac{d}{c+d}a_2 = a_3 \leq a_2$ gilt und $\varepsilon(p)$ konvex ist, gilt auch $a_3 \in \varepsilon(p)$. □

Wir haben für einen Schnitt $p$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ mit realisierender Obergruppe $\Omega \supseteq G$ mit $G_\Omega(p)$ bereits eine Entsprechung für die elementare Invariante $G(p)$ von $p$ gefunden. Im folgenden führen wir im Falle eines Schnittes $p$ eines angeordneten Körpers auch Entsprechungen für die weiteren Invarianten $G^*(p)$, $V(p)$, $J(p)$ und $I(p)$ ein. Wir untersuchen dabei jeweils den Zusammenhang zwischen diesen alten Invarianten und ihren neuen Entsprechungen.

**Definition 4.24** (Multiplikative $\Omega$-Invarianzgruppe)**.** Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Wir definieren die **multiplikative $\Omega$-Invarianzgruppe von** $p$ als

$$G_\Omega^*(p) := \{\omega \in \Omega \mid \omega \cdot \varepsilon(p) = \varepsilon(p)\}.$$

*Bemerkung 4.25.* Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann ist $G_\Omega^*(p)$ eine konvexe Untergruppe von $(\Omega^{>0}, \cdot)$ und wegen $\varepsilon(-p) = -\varepsilon(p)$ gilt $G_\Omega^*(-p) = G_\Omega^*(p)$.

**Proposition 4.26.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Seien $q := \varepsilon(p)^-$ und $r := \varepsilon(p)^+$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$. Dann gilt*

$$G_\Omega^*(p) = G^*(q) \cap G^*(r).$$

*Ist $p > 0$, so gilt genauer*

$$\begin{aligned} G_\Omega^*(p) = G^*(q) \quad &, \textit{falls } \operatorname{sign}^*(p) = +1, \\ G_\Omega^*(p) = G^*(r) \quad &, \textit{falls } \operatorname{sign}^*(p) = -1, \quad \textit{und} \\ G_\Omega^*(p) = G^*(q) = G^*(r) \quad &, \textit{falls } \operatorname{sign}^*(p) \in \{0, \infty\} \textit{ gilt.} \end{aligned}$$

*Beweis.* Für $p > 0$ ist die Aussage gerade die multiplikative Version von Korollar 4.16. Ist $p < 0$, so gilt nach Bemerkung 4.25 und dem positiven Fall $G_\Omega^*(p) = G_\Omega^*(-p) = G^*(-q) \cap G^*(-r) = G^*(q) \cap G^*(r)$. □

**Proposition 4.27.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper mit realisierendem Oberkörper $\Omega \supseteq K$. Sei $p$ ein Schnitt von $K$. Dann gilt*

$$G_\Omega^*(p) \cap K = G^*(p).$$

*Darüberhinaus liegt $G_\Omega^*(p)$ extremal über $G^*(p)$, das heißt $G_\Omega^*(p)^+$ ist die größte oder kleinste Erweiterung von $G^*(p)^+$.*

*Beweis.* Da offensichtlich $G_\Omega^*(p) > 0$ gilt, ist die Behauptung für $p > 0$ die multiplikative Version von Proposition 4.17. Da aber sowohl $G_\Omega^*(-p) = G_\Omega^*(p)$ als auch $G^*(-p) = G^*(p)$ gilt, gilt die Behauptung auch für negative Schnitte $p < 0$. □

**Definition 4.28.** Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Wir definieren den **$\Omega$-Invarianzbewertungsring von** $p$ als

$$V_\Omega(p) := V(G_\Omega(p)) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cdot G_\Omega(p) \subseteq G_\Omega(p)\}.$$

**Lemma 4.29.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Seien $q := \varepsilon(p)^-$ und $r := \varepsilon(p)^+$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} V_\Omega(p) = V(q) \quad &, \textit{falls } \operatorname{sign}(p) = +1, \\ V_\Omega(p) = V(r) \quad &, \textit{falls } \operatorname{sign}(p) = -1, \quad \textit{und} \\ V_\Omega(p) = V(q) = V(r) \quad &, \textit{falls } \operatorname{sign}(p) = 0 \textit{ gilt.} \end{aligned}$$

*Beweis.* Mit Hilfe von Korollar 4.16 und Proposition 1.44 können wir die positiven Einheiten von $V_\Omega(p)$ berechnen als

$$V_\Omega(p)^{*>0} = V(G_\Omega(p))^{*>0} = G^*(G_\Omega(p)^+) = G^*([G(q) \cap G(r)]^+).$$

Ist $\mathrm{sign}(p) = +1$, so gilt $V_\Omega(p)^{*>0} = G^*(G(q)^+) = V(q)^{*>0}$; ist $\mathrm{sign}(p) = -1$, so gilt $V_\Omega(p)^{*>0} = G^*(G(r)^+) = V(r)^{*>0}$, und gilt $\mathrm{sign}(p) = 0$, so gilt $V_\Omega(p)^{*>0} = V(q)^{*>0} = V(r)^{*>0}$. Je nach Signatur von $p$ folgt damit $V_\Omega(p)^+ = (V_\Omega(p)^{*>0})^+ = (V(q)^{*>0})^+ = V(q)^+$ oder $V_\Omega(p)^+ = (V(r)^{*>0})^+ = V(r)^+$. Da $V_\Omega(p)$, $V(q)$ und $V(r)$ konvexe Untergruppen von $\Omega$ sind, folgt mit Lemma 1.8 die Behauptung. □

**Proposition 4.30.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann gilt*

$$V_\Omega(p) \cap K = V(p).$$

*Darüberhinaus liegt $V_\Omega(p)$ extremal über $V(p)$, das heißt $V_\Omega(p)^+$ ist die größte oder kleinste Erweiterung von $V(p)^+$.*

*Beweis.* Seien $q := \varepsilon(p)^-$ und $r := \varepsilon(p)^+$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$. Nach Lemma 4.29 ist $V_\Omega(p)$ gleich $V(q)$ oder $V(r)$. Sei ohne Einschränkung $V_\Omega(p) = V(q)$. Dann gilt $V_\Omega(p)^+ = V(q)^+ = (V(q)^{*>0})^+ = G^*(\hat{q})^+$. Da $q$ die kleinste Erweiterung von $p$ ist, ist nach Proposition 1.32 (ii) $\hat{q}$ die kleinste oder größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $\Omega$. Wenden wir denselben Satz nochmal multiplikativ auf $\hat{p}$ und $\hat{q}$ an, so erhalten wir, daß $G^*(\hat{q})^+ = V_\Omega(p)^+$ die kleinste oder größte Erweiterung von $G^*(\hat{p})^+ = V(p)^+$ ist. Da natürlich auch $V_\Omega(p)^-$ eine Erweiterung von $V(p)^-$ ist, liegt $V_\Omega(p)$ über $V(p)$. □

**Definition 4.31.** Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann definieren wir

$$J_\Omega(p) := \{\omega \in \Omega^{>0} \mid G^*_\Omega(p) = \omega G_\Omega(p) + 1\} \quad \text{und}$$
$$I_\Omega(p) := \frac{1}{J_\Omega(p)}.$$

*Bemerkung 4.32.* Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$. Dann sind $J_\Omega(p)$ und $I_\Omega(p)$ konvex und es gilt $J_\Omega(-p) = J_\Omega(p)$ und $I_\Omega(-p) = I_\Omega(p)$.

**Lemma 4.33.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Seien weiter $q := \varepsilon(p)^-$ und $r := \varepsilon(p)^+$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$. Dann gilt*

$$J_\Omega(p) = J(q) \text{ oder } J_\Omega(p) = J(r) \quad \text{sowie}$$
$$I_\Omega(p) = I(q) \text{ oder } I_\Omega(p) = I(r).$$

*Genauer gilt*

$$\begin{aligned} J_\Omega(p) &= J(q) && \text{, } \textit{falls } \operatorname{sign}(p) = 1, \\ J_\Omega(p) &= J(r) && \text{, } \textit{falls } \operatorname{sign}(p) = -1, \quad \textit{und} \\ J_\Omega(p) = J(q) &= J(r) && \text{, } \textit{falls } \operatorname{sign}(p) = 0 \ \textit{gilt.} \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei zunächst $p > 0$. Nach Theorem 3.5 gilt $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sign}^*(p)$. Nach Korollar 4.16 und Proposition 4.26 erhalten wir folgende Fallunterscheidung.
Ist $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sign}^*(p) = +1$, so gilt $G_\Omega(p) = G(q)$ und $G^*_\Omega(p) = G^*(q)$ und somit

$$J_\Omega(p) = \{\omega \in \Omega^{>0} \mid G^*_\Omega(p) = \omega G_\Omega(p) + 1\} = \{\omega \mid G^*(q) = \omega G(q) + 1\} = J(q).$$

Ist $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sign}^*(p) = -1$, so gilt $G_\Omega(p) = G(r)$ und $G^*_\Omega(p) = G^*(r)$ und somit

$$J_\Omega(p) = \{\omega \in \Omega^{>0} \mid G^*_\Omega(p) = \omega G_\Omega(p) + 1\} = \{\omega \mid G^*(r) = \omega G(r) + 1\} = J(r).$$

Ist $\operatorname{sign}(p) = \operatorname{sign}^*(p) = 0$, so gilt $G_\Omega(p) = G(q) = G(r)$ und $G^*_\Omega(p) = G^*(q) = G^*(r)$ und somit

$$J_\Omega(p) = \{\omega \in \Omega^{>0} \mid G^*_\Omega(p) = \omega G_\Omega(p) + 1\} = J(q) = J(r).$$

Nun betrachten wir einen Schnitt $p < 0$. Da $q$ und $r$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$ sind, sind natürlich $-r$ die kleinste und $-q$ die größte Erweiterung von $-p$ auf $\Omega$. Da $J_\Omega$ und $J$ nicht vom Vorzeichen des jeweiligen Schnittes abhängen, erhalten wir auch hier unsere behauptete Darstellung von $J_\Omega(p)$. Da die Aussage über $I_\Omega(p)$ trivialerweise aus der über $J_\Omega(p)$ folgt, ist damit das Lemma bewiesen. □

**Proposition 4.34.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper, $\Omega \supseteq K$ ein realisierender Oberkörper und $p$ ein Schnitt von $K$ mit $|p| > \hat{p}$. Dann gilt*

$$J_\Omega(p) \cap K = J(p) \ \textit{und}\ I_\Omega(p) \cap K = I(p).$$

*Beweis.* Wir können uns auf einen positiven Schnitt $p > \hat{p}$ beschränken, da $J_\Omega(p)$, $I_\Omega(p)$, $J(p)$ und $I(p)$ alle unabhängig vom Vorzeichen von $p$ sind. Weiter genügt es, nur $I_\Omega(p) \cap K = I(p)$ zu zeigen, da die Aussage für $J_\Omega(p)$ dann sofort nach Definition klar ist.

Seien $q := \varepsilon(p)^-$ und $r := \varepsilon(p)^+$ die kleinste und die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$. Nach Lemma 4.33 gilt $I_\Omega(p) = I(q)$ oder $I_\Omega(p) = I(r)$. Wir nehmen ohne Einschränkung $I_\Omega(p) = I(q)$ an, das heißt nach dem Zusatz von Lemma 4.33, daß $\operatorname{sign}(p) \neq -1$ gilt. Dann folgt nach Lemma 4.29 auch $V_\Omega(p) = V(q)$. Da $q = \varepsilon(p)^-$ die kleinste Erweiterung von $p$ ist und $I_\Omega(p) = I(q)$ nach Proposition 2.12 eine Umgebung von $q$ ist, finden wir ein $c \in I_\Omega(p) \cap K$. Für dieses gilt dann nach Lemma 2.10 $I_\Omega(p) = c \cdot V(q)^{*>0} = c \cdot V_\Omega(p)^{*>0}$. Nun sind wir aber fertig, da nach Proposition 4.30 $V_\Omega(p) \cap K = V(p)$ und damit auch für die Einheiten $V_\Omega(p)^{*>0} \cap K = V(p)^{*>0}$ gilt. Es folgt $I_\Omega(p) \cap K = (c \cdot V_\Omega(p)^{*>0}) \cap K = c \cdot (V_\Omega(p)^{*>0} \cap K) = c \cdot V(p)^{*>0} = I(p)$. □

### 4.2.2. Die Addition von Schnitten mittels realisierender Obergruppen und Oberkörper

In Abschnitt 4.2.1 haben wir realisierende Obergruppen und Oberkörper eingeführt und durch Definition entsprechender Invaianten den Zusammenhang mit unserem Setting aus Kapitel 1 hergestellt. Nun zeigen wir, wie wir mit Hilfe dieser realisierenden Oberstrukturen eine Addition von Schnitten angeordneter abelscher Gruppen oder angeordneter Körper definieren können. Mittels der Abbildung $\varepsilon$ aus Definition 4.11 ordnen wir jedem Schnitt einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ eine konvexe Teilmenge einer realisierenden Obergruppe $\Omega \supseteq G$ zu. In $\Omega$ können wir zwei konvexe Teilmengen im Sinne der folgenden Proposition „addieren“.

**Proposition 4.35.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Sind $C$, $D \subseteq G$ konvexe Teilmengen von $G$, so ist auch die Teilmenge $C + D = \{c + d \mid c \in C,\, d \in D\}$ von $G$ konvex.*

*Beweis.* Sei $g \in G$. Seien weiter $c_1, c_2 \in C$, $d_1, d_2 \in D$ mit $c_1 + d_1 < g < c_2 + d_2$. Wir zeigen, daß $g \in C + D$ gilt.
1. Fall ($c_1 \geq c_2$, $d_1 \geq d_2$): Dann folgt $c_1 + d_1 \geq c_2 + d_2$, dieser Fall ist ausgeschlossen.
2. Fall ($c_1 \geq c_2$, $d_1 < d_2$): Dann gilt $d_1 < g - c_1 < d_2 + c_2 - c_1 \leq d_2$ und es folgt $g - c_1 \in D$ aufgrund der Konvexität von $D$.
3. Fall ($c_1 < c_2$, $d_1 \geq d_2$): Dann gilt $c_1 < g - d_1 < c_2 + d_2 - d_1 \leq c_2$ und es folgt $g - d_1 \in C$.
4. Fall ($c_1 < c_2$, $d_1 < d_2$): Dann gilt

$$c_1 + d_1 < c_2 + d_1 < c_2 + d_2 \text{ und } c_1 + d_1 < c_1 + d_2 < c_2 + d_2.$$

Ohne Einschränkung sei $c_1 + d_2 \leq c_2 + d_1$. Wir erhalten drei Unterfälle:
A) $c_1 + d_1 < g < c_1 + d_2$. Dann gilt $d_1 < g - c_1 < d_2$ und somit $g - c_1 \in D$.
B) $c_2 + d_1 < g < c_2 + d_2$. Dann gilt $d_1 < g - c_2 < d_2$ und folglich $g - c_2 \in D$.
C) $c_1 + d_2 \leq g \leq c_2 + d_1$. Dann gilt $c_1 \leq g - d_2 \leq c_2 + d_1 - d_2 < c_2$ und $g - d_2 \in C$. □

Damit können wir Schnitte von angeordneten abelschen Gruppen addieren, indem wir sie als konvexe Teilmengen einer realisierenden Obergruppe auffassen und dann die Summe dieser Mengen bilden. Exakt gesprochen machen wir folgende

**Definition 4.36.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe mit realisierender Obergruppe $\Omega \supseteq G$. Wir definieren die Abbildung $+_\Omega$

$$\begin{gathered} +_\Omega : \mathrm{Cuts}(G) \times \mathrm{Cuts}(G) \to \mathrm{CT}(\Omega) \\ p +_\Omega q := \varepsilon(p) + \varepsilon(q) \quad (p,\, q \in \mathrm{Cuts}(G)). \end{gathered}$$

Im Falle eines angeordneten Körpers $K$ mit realisierendem Oberkörper $\Omega \supseteq K$ können wir analog eine Multiplikation von Schnitten definieren. Wir bemerken dazu, daß für zwei Schnitte $p$ und $q$ von $K$ die Mengen $\varepsilon(p)$ und $\varepsilon(q)$ jeweils entweder links oder rechts von der 0 liegen. Damit ist nach Proposition 4.35 auch die Menge $\varepsilon(p) \cdot \varepsilon(q)$ wieder konvex. Wir machen also folgende

**Definition 4.37.** Sei $K$ ein angeordneter Körper mit realisierendem Oberkörper $\Omega \supseteq K$. Dann definieren wir die Abbildung $\cdot_\Omega$

$$\begin{aligned} \cdot_\Omega : \mathrm{Cuts}(K) \times \mathrm{Cuts}(K) &\to \mathrm{CT}(\Omega) \\ p \cdot_\Omega q &:= \varepsilon(p) \cdot \varepsilon(q) \quad (p,\, q \in \mathrm{Cuts}(K)). \end{aligned}$$

Wir erhalten in der Situation eines angeordneten Körpers $K$ mit einem realisierenden Oberkörper $\Omega \supseteq K$ für $+_\Omega$ und $\cdot_\Omega$ zwar kein allgemeines Distributivitätsgesetz, aber zumindest Schnitte gleichen Vorzeichens bereiten uns hier keine Probleme.

**Proposition 4.38.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Sind $C,\, D,\, E \subseteq G$ konvexe Teilmengen von $G$ mit $D,\, E \geq 0$ oder $D,\, E \leq 0$, so gilt*

$$C \cdot (D + E) = C \cdot D + C \cdot E.$$

*Beweis.* Wir gehen für den Beweis zunächst von $D,\, E \geq 0$ aus, der zweite Fall folgt dann sofort. Die Inklusion „ $\subseteq$ “ gilt trivialerweise auch ohne die Zusatzvoraussetzung an $D$ und $E$. „ $\supseteq$ “: Seien $c_1,\, c_2 \in C,\, d \in D$ und $e \in E$. Ist $d = e = 0$, so gilt $c_1 d + c_2 e = c_1(d + e) \in C(D + E)$. Wir können also von $d + e > 0$ ausgehen und definieren $c' := c_1 \frac{d}{d+e} + c_2 \frac{e}{d+e}$. Ist $c_1 \leq c_2$, so gilt

$$c_1 = c_1 \tfrac{d}{d+e} + c_1 \tfrac{e}{d+e} \leq c_1 \tfrac{d}{d+e} + c_2 \tfrac{e}{d+e} = c' \leq c_2 \tfrac{d}{d+e} + c_2 \tfrac{e}{d+e} = c_2$$

und somit $c' \in C$ wegen der Konvexität von $C$. Ist $c_1 > c_2$, so gilt $c_1 \geq c' \geq c_2$ und wieder $c' \in C$. Nach Konstruktion gilt demnach $c_1 d + c_2 e = c'(d + e) \in C(D + E)$.

Gilt nun $D,\, E \leq 0$, folgt die Aussage leicht aus dem bereits Gezeigten. Denn dann gilt $-D,\, -E \geq 0$ und es folgt $C(D+E) = (-C)(-(D+E)) = (-C)((-D)+(-E)) = (-C)(-D) + (-C)(-E) = CD + CE$. □

*Bemerkung 4.39.* In der Situation von Proposition 4.38 läßt sich die gezeigte Distributivität $C \cdot (D + E) = C \cdot D + C \cdot E$ nicht auf konvexe Mengen $C$, $D$ und $E$ mit $D < 0$ und $E > 0$ ausweiten. Wir führen folgende beispielhafte Rechnung mit den Intervallen $C := [1, 2]$, $D := [-2, -1]$ und $E := [2, 3]$ eines beliebigen angeordneten Körpers $K$ an:

$$\begin{gathered} [1,2] \cdot \big([-2,-1] + [2,3]\big) = [1,2] \cdot [0,2] = [0,4] \quad \text{und} \\ [1,2] \cdot [-2,-1] + [1,2] \cdot [2,3] = [-4,-1] + [2,6] = [-2,5]. \end{gathered}$$

Wollen wir von einer realisierenden Obergruppe zurück in die zugehörige angeordnete abelsche Gruppe, stoßen wir wieder auf die Schnitte aus Definition 4.1:

**Proposition 4.40.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe mit einer realisierenden Obergruppe $\Omega \supseteq G$, die die Eigenschaft (ZE) aus Proposition 4.22 besitzt. Für zwei echte Schnitte $p$ und $q$ von $G$ gilt*

$$\big[(p + q)_{\text{links}},\, (p + q)_{\text{rechts}}\big]_{\mathrm{DC}(G)} = \{\gamma \restriction G \mid \gamma \in p +_\Omega q\}.$$

*Beweis.* Natürlich gilt $\{\gamma \restriction G \mid \gamma \in p +_\Omega q\} = \{(\alpha+\beta) \restriction G \mid \alpha \in \varepsilon(p),\, \beta \in \varepsilon(q)\}$. Damit zeigen wir beide Inklusionen.

„ $\supseteq$ “: Sei $\alpha \in \varepsilon(p)$, $\beta \in \varepsilon(q)$. Wir zeigen nur $(p+q)_{\text{links}} \leq (\alpha+\beta) \restriction G$, die Abschätzung $(\alpha+\beta) \restriction G \leq (p+q)_{\text{rechts}}$ folgt analog.

Ist $\alpha+\beta = g \in G$, so gilt $g = \alpha+\beta > x+y$ für alle $x < p$ und für alle $y < q$, also folgt $g > (p+q)_{\text{links}}$.

Ist $\alpha+\beta \notin G$, so folgt für jedes $g \in G$ mit $g > (\alpha+\beta) \restriction G$, daß $g > \alpha+\beta > x+y$ für alle $x < p$ und alle $y < q$ gilt. Das zeigt $(\alpha+\beta) \restriction G \geq (p+q)_{\text{links}}$.

„ $\subseteq$ “ : <u>1. Fall</u>: Sei $g \in G$ mit $(p+q)_{\text{links}} < g < (p+q)_{\text{rechts}}$.
Dann können wir gemäß Bemerkung 4.4 ein $x < p$ und ein $y > q$ wählen mit $g = x+y$. Da $\Omega$ eine realisierende Obergruppe von $G$ ist, können wir ein $\alpha \in \Omega$ wählen mit $\alpha \models p$. Wegen $g = \alpha + (g-\alpha)$ zeigen wir nur $g - \alpha \models q$.
Für alle $h \in G$ mit $h < q$ gilt wegen $g = (g-h)+h > (p+q)_{\text{links}}$ die Abschätzung $g-h > p$, also auch $g-h > \alpha$ oder $g-\alpha > h$. Für alle $h \in G$ mit $h > q$ gilt wegen $g = (g-h)+h < (p+q)_{\text{rechts}}$ die Ungleichung $g-h < p$, also gilt dann $g-h < \alpha$ oder $g-\alpha < h$.
<u>2. Fall</u>: Sei $\xi \in \mathrm{Cuts}(G)$ mit $(p+q)_{\text{links}} < \xi < (p+q)_{\text{rechts}}$.
Wir wählen Elemente $\alpha, \gamma \in \Omega$ mit $\alpha \models p$ und $\gamma \models \xi$. Wegen $\gamma = \alpha + (\gamma - \alpha)$ müssen wir nur $\gamma - \alpha \models q$ zeigen.
Wegen $(p+q)_{\text{links}} < \xi < (p+q)_{\text{rechts}}$ existieren Elemente $x, y \in G$ mit

$$(p+q)_{\text{links}} < x < \xi < y < (p+q)_{\text{rechts}}.$$

Für alle $h \in G$ mit $h < q$ gilt dann $x-h > p$, also auch $x-h > \alpha$. Da andererseits $x < \gamma$ gilt, folgt $\gamma - h > \alpha$ oder $\gamma - \alpha > h$. Für alle $h \in G$ mit $h > q$ gilt $y-h < p$, also auch $y-h < \alpha$. Da hier $y > \gamma$ gilt, folgt $\gamma - h < \alpha$ oder $\gamma - \alpha < h$.
<u>3. Fall</u>: Sei $\xi = (p+q)_{\text{links}}$.
Wir wählen eine angeordnete abelsche Obergruppe $G' \supseteq G$, in der $p$ und $q$ realisiert sind und für die $\dim_{\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}(\mathrm{dh}(G')/\mathrm{dh}(G)) < \infty$ gilt. Wir betrachten die zwei Schnitte $\eta_1 := \mathrm{Real}_{G'}(p)^-$ und $\eta_2 := \mathrm{Real}_{G'}(q)^-$ von $G'$. Wählen wir eine weitere angeordnete abelsche Gruppe $G'' \supseteq G'$, in der $\eta_1$ und $\eta_2$ realisiert sind und für die $\dim_{\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}(\mathrm{dh}(G'')/\mathrm{dh}(G')) < \infty$ gilt, dann existiert aufgrund der Eigenschaft (ZE) von $\Omega$ eine Ordnungseinbettung von $G''$ in $\Omega$, die die von $G'$ in $\Omega$ fortsetzt. Wir fassen deshalb $G''$ als Teilmenge von $\Omega$ auf. Seien dann $\alpha', \beta' \in G'' \subseteq \Omega$ mit $\alpha' \models \eta_1$ und $\beta' \models \eta_2$. Natürlich gilt dann $\alpha' \in \varepsilon(p)$ und $\beta' \in \varepsilon(q)$. Wir werden zeigen, daß $(\alpha'+\beta') \restriction G = (p+q)_{\text{links}}$ gilt.

„ $\geq$ “: Seien $x, y \in G$ mit $x < p$ und $y < q$, also sei $x+y < (p+q)_{\text{links}}$. Da $x < \alpha$ für alle $\alpha \in \mathrm{Real}_{G'}(p)$ gilt, folgt $x < \eta_1$ und damit $x < \alpha'$. Ebenso gilt $y < \eta_2$ und somit $y < \beta'$. Also folgt $x+y < \alpha'+\beta'$.
„ $\leq$ “: Wir nehmen an, daß ein $g \in G$ existiert mit $(p+q)_{\text{links}} < g < (\alpha'+\beta') \restriction G$. Für alle $x, y \in G$ mit $x > p$ und $y > q$ gilt $x > \eta_1$ und $y > \eta_2$, also auch $x > \alpha'$ und $y > \beta'$. Damit folgt $x+y > \alpha'+\beta'$ und es gilt $(\alpha'+\beta') \restriction G \leq (p+q)_{\text{rechts}}$. Wir erhalten also ein $g \in G$ mit $(p+q)_{\text{links}} < g < (p+q)_{\text{rechts}}$. Dann gibt es aber nach

Fall 1 ein $\alpha \in \mathrm{Real}_{G'}(p)$ und ein $\beta \in \mathrm{Real}_{G'}(q)$ mit $g = \alpha + \beta < \alpha' + \beta'$. Dies liefert einen Widerspruch zu $\alpha' \models \eta_1$ und $\beta' \models \eta_2$.
4. Fall: Sei $\xi = (p+q)_{\text{rechts}}$
Nach Proposition 4.5 gilt $\xi = (p+q)_{\text{rechts}} = -(-p+(-q))_{\text{links}}$. Nach Fall 3 existieren also Elemente $\alpha' \in \varepsilon(-p)$ und $\beta' \in \varepsilon(-q)$ mit $\xi = -((\alpha'+\beta') \restriction G)$. Wegen $\varepsilon(-p) = -\varepsilon(p)$ und $\varepsilon(-q) = -\varepsilon(q)$ gilt also $\xi = (-\alpha' + (-\beta')) \restriction G$ mit $-\alpha' \in \varepsilon(p)$ und $-\beta' \in \varepsilon(q)$. □

Eine wichtige Anwendung findet Proposition 4.40 bei Fragen, wann für zwei echte Schnitte $p$ und $q$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ die Schnitte $(p+q)_{\text{links}}$ und $(p+q)_{\text{rechts}}$ übereinstimmen. Dies ist nämlich genau dann der Fall, wenn der Schnitt $(\alpha+\beta) \restriction G$ nicht von der Wahl der Elemente $\alpha \in \varepsilon(p)$ und $\beta \in \varepsilon(q)$ abhängt.

Wir suchen noch nach einem Kriterium ohne die Verwendung von RealisierungenF, wann für zwei echte Schnitte $p$ und $q$ einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ die Schnitte $(p+q)_{\text{links}}$ und $(p+q)_{\text{rechts}}$ zusammenfallen. In Theorem 4.44 finden wir eine Antwort für divisible angeordnete abelsche Gruppen. Für den Beweis einer Teilaussage benötigen wir Lemma 4.42, das wir mit Hilfe einer realisierenden Obergruppe zeigen. Ansonsten kommen wir für den Beweis des Theorems ohne diese Konstruktion aus und könnten es auch schon in Abschnitt 4.1 anführen.

Zuerst erläutern wir noch, wie wir zu einem Schnitt $\xi$ einer divisiblen angeordneten abelschen Gruppe $G$ für alle $q \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ das $q$-fache Vielfache des Schnittes definieren können.

**Bemerkung/Definition 4.41.** Sei $G$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe und sei $\xi$ ein Schnitt von $G$. Dann ist das Paar $(q\cdot\xi^L,\, q\cdot\xi^R)$ für alle $q \in \mathbb{Q}^{>0}$ wieder ein Schnitt von $G$ und wir definieren für alle $q \in \mathbb{Q}^*$ den Schnitt $q\cdot\xi$ als

$$q\cdot\xi := \begin{cases} (q\cdot\xi^L, q\cdot\xi^R) & \text{, für } q>0 \\ -\big((-q)\cdot\xi^L, (-q)\cdot\xi^R\big) & \text{, für } q<0. \end{cases}$$

**Lemma 4.42.** *Sei $G$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe und $p$ ein Schnitt von $G$ mit* $\mathrm{sign}(p) = 0$. *Dann gilt für alle $a \in \mathbb{Q}$ mit $a > 1$*

$$(ap-p)_{\text{links}} = (ap-p)_{\text{rechts}} = (a-1)\cdot p.$$

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, daß $p$ wegen $\mathrm{sign}(p) = 0$ echt ist, und wählen mit Hilfe von Proposition 4.21 eine divisible realisierende Obergruppe $\Omega \supseteq G$. Nach Proposition 4.40 ist die Aussage des Lemmas äquivalent dazu, daß für alle Elemente $\alpha \in ap +_\Omega (-p)$ gilt:

$$\alpha \models (a-1)p.$$

Um dies zu zeigen, geben wir uns also ein Element $\alpha \in ap +_\Omega (-p) = \varepsilon(ap) + \varepsilon(-p)$ vor. Mit Proposition 4.23 können wir diese Menge umschreiben in $\varepsilon(ap)+\varepsilon(-p) = a\varepsilon(p) - \varepsilon(p) = (a-1)\varepsilon(p) + \varepsilon(p) - \varepsilon(p)$, wobei unsere Bedingung $a > 1$ eingeht. Also können wir $\alpha$ schreiben als Summe $\alpha = (a-1)\beta + \gamma$ mit Elementen $\beta \in \varepsilon(p)$

und $\gamma \in \varepsilon(p) - \varepsilon(p)$. Demnach gilt $\alpha \models (a-1)p$ genau dann, wenn $\beta + \frac{1}{a-1}\gamma \models p$ gilt. Wegen $\beta \in \varepsilon(p)$ genügt es also $\frac{1}{a-1}\gamma \in G_\Omega(p)$ zu zeigen, beziehungsweise nur $\gamma \in G_\Omega(p)$, weil $\frac{1}{a-1} \in \mathbb{Q}$ gilt und $G_\Omega(p)$ eine konvexe Untergruppe von $\Omega$ ist. Hierfür haben die erforderliche Vorarbeit geleistet. Da nach Voraussetzung $\mathrm{sign}(p) = 0$ gilt, liefert uns Korollar 4.16 $G_\Omega(p) = G(q) = G(r)$, wobei $q$ die kleinste und $r$ die größte Erweiterung von $p$ auf $\Omega$ ist. $G_\Omega(p)^+ = \hat{q} = \hat{r}$ ist somit nach Proposition 1.32 (iv) die größte Erweiterung von $\hat{p}$ auf $\Omega$. Anhand der Propositionen 4.7 und 4.40 wissen wir andererseits, daß $-\hat{p} \leq \gamma \restriction K \leq \hat{p}$ gilt. Damit folgt $G_\Omega(p)^- = -\hat{q} < \gamma < \hat{q} = G_\Omega(p)^+$. Somit haben wir $\gamma \in G_\Omega(p)$ und damit das Lemma bewiesen. □

**Definition 4.43.** Sei $G$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe. Zwei Schnitte $\xi$ und $\eta$ von $G$ heißen **äquivalent**, wenn es ein $g \in G$ und ein $q \in \mathbb{Q}^*$ gibt mit $\xi = g + q\eta$. Wir schreiben hierfür $\xi \sim \eta$.

**Theorem 4.44.** *Sei $G$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe, und seien $\xi$ und $\eta$ echte Schnitte von $G$. Dann gilt:*

*(1) Folgende Aussagen sind äquivalent:*

*(a)* $\xi \not\sim \eta$

*(b) Für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^*$ gilt* $(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}}$.

*(2) Ist $\xi \sim \eta$, so sind für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^*$ folgende Aussagen äquivalent:*

*(a)* $(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}}$

*(b) Es gilt eine der folgenden Bedingungen:*

*(i)* $\mathrm{sgn}(q_1) \cdot \mathrm{sgn}(q_2) = \mathrm{sgn}(q)$

*(ii)* $\mathrm{sgn}(q_1) \cdot \mathrm{sgn}(q_2) = -\mathrm{sgn}(q)$, $\mathrm{sign}(\xi) = 0$ *und* $\frac{qq_1}{q_2} \neq -1$.

*Beweis.* Wir beweisen zunächst Teil (1).

(b) $\Rightarrow$ (a): Wir nehmen an, es gibt ein $g \in G$ und ein $q \in \mathbb{Q}^*$ mit $\xi = g + q\eta$. Für alle echten Schnitte $p_1$ und $p_2$ von $G$ und jedes $h \in G$ gilt

$$\begin{aligned}(p_1 + h - p_2)_{\text{links}} &= \\ &= \{x + y \mid x < p_1 + h,\, y < -p_2\}^+ = \{x + h + y \mid x < p_1,\, y < -p_2\}^+ = \\ &= \{x + y \mid x < p_1,\, y < -p_2\}^+ + h = (p_1 - p_2)_{\text{links}} + h,\end{aligned}$$

und nach analoger Rechnung $(p_1 + h - p_2)_{\text{rechts}} = (p_1 - p_2)_{\text{rechts}} + h$. Damit erhalten wir $(\xi - \xi)_{\text{links}} = (\xi - (g + q\eta))_{\text{links}} = (\xi - g - q\eta)_{\text{links}} = (\xi - q\eta)_{\text{links}} - g = (\xi - q\eta)_{\text{rechts}} - g = (\xi - g - qn)_{\text{rechts}} = (\xi - \xi)_{\text{rechts}}$. Dies aber ist ein Widerspruch zu Proposition 4.7.

(a) $\Rightarrow$ (b): Wir nehmen an, es gibt $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^*$ mit $(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} \neq (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}}$. Da dann mit Hilfe von Proposition 4.5 auch $-(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = (-q_1\xi - q_2\eta)_{\text{rechts}} \neq (-q_1\xi - q_2\eta)_{\text{links}} = -(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}}$ gilt, können wir ohne Einschränkung $q_1 > 0$ annehmen. Somit gilt also $(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = q_1(\xi + \frac{q_2}{q_1}\eta)_{\text{links}} < (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}} =$

$q_1(\xi + \frac{q_2}{q_1}\eta)_{\text{rechts}}$, also gibt es ein $g \in G$ mit $(\xi + \frac{q_2}{q_1}\eta)_{\text{links}} < g < (\xi + \frac{q_2}{q_1}\eta)_{\text{rechts}}$. Dann können wir aber zeigen:

$$\xi = g - \tfrac{q_2}{q_1}\eta.$$

„ $\leq$ “: Sei $x < \xi$. Dann gilt nach Bemerkung 4.4 $g - x > \frac{q_2}{q_1}\eta$, also folgt $x < g - \frac{q_2}{q_1}\eta$.
„ $\geq$ “: Sei $x > \xi$, dann gilt $g - x < \frac{q_2}{q_1}\eta$, also $x > g - \frac{q_2}{q_1}\eta$. Hiermit erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Jetzt kommen wir zum Beweis von (2). Sei also $\xi = g + q\eta$ mit einem $g \in G$ und einem $q \in \mathbb{Q}^*$. Wir werden den Beweis für ein $q > 0$ führen, der Fall $q < 0$ läßt sich dann leicht ableiten. Denn haben wir die Aussage für positives $q$, so erhalten wir sie für ein negatives $q$, indem wir zu $-q$, $-\eta$ und $-q_2$ übergehen und den positiven Fall benutzen. Somit erklärt sich das Auftreten von $\operatorname{sgn}(q)$ in den Bedingungen, in denen $q_2$, aber nicht $q$ vorkommt.

(a) $\Rightarrow$ (b): Seien $q_1$, $q_2 \in \mathbb{Q}^*$ mit $(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}}$. Wir nehmen an, Bedingung (i) gilt nicht, und zeigen, daß dann (ii) gelten muß. Seien also $q_1$ und $q_2$ von unterschiedlichem Vorzeichen, ohne Einschränkung können wir von $q_1 > 0$ und $q_2 < 0$ ausgehen. Aus $(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}}$ folgen nach Einsetzen der Darstellung von $\xi$ die Gleichungen $(q_1 g + q_1 q\eta + q_2\eta)_{\text{links}} = (q_1 g + q_1 q\eta + q_2\eta)_{\text{rechts}}$ und $(q_1 q\eta + q_2\eta)_{\text{links}} = (q_1 q\eta + q_2\eta)_{\text{rechts}}$. Mit $\vartheta := |q_2|\eta$ und der Abkürzung $a := \frac{qq_1}{|q_2|}$ erhalten wir

$$(\dagger) \qquad (a\vartheta - \vartheta)_{\text{links}} = (a\vartheta - \vartheta)_{\text{rechts}}.$$

Sofort sehen wir, daß $a = \frac{qq_1}{|q_2|} = \frac{qq_1}{-q_2} = 1$ wegen Proposition 4.7 nicht möglich ist. Wir müssen also nur noch $\operatorname{sign}(\xi) = 0$ zeigen und gehen vom Gegenteil aus. Da die zugrundeliegende Gruppe $G$ nach Voraussetzung divisibel ist, gilt dann $\operatorname{sign}(\xi) = +1$ oder $\operatorname{sign}(\xi) = -1$. Wir betrachten nur den Fall $\operatorname{sign}(\xi) = 1$, denn aus $\operatorname{sign}(\xi) = -1$ ergibt sich wegen Proposition 4.5 nichts Neues. Mit $\operatorname{sign}(\xi) = 1$ folgt aber nach einfacher Rechnung auch $\operatorname{sign}(\vartheta) = \operatorname{sign}(\eta) = 1$. Dann gibt es also ein $h \in G$ mit $\vartheta = h + \hat{\vartheta}$. Da $V(\vartheta)$ ein konvexer Bewertungsring ist, gilt $\mathbb{Q} \subseteq V(\vartheta)$ und deshalb nach Proposition 1.44 auch $a \in \mathbb{Q}^{>0} \subseteq V(\vartheta)^{*>0} = G^*(\hat{\vartheta})$. Wir erhalten $a\vartheta = ah + a\hat{\vartheta} = ah + \hat{\vartheta}$, und mit Gleichung $(\dagger)$ folgt $(ah + \hat{\vartheta} - ah - \hat{\vartheta})_{\text{links}} = (ah + \hat{\vartheta} - ah - \hat{\vartheta})_{\text{rechts}}$, gleichbedeutend mit $(\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta})_{\text{links}} = (\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta})_{\text{rechts}}$. Dies ergibt wiederum einen Widerspruch zu Proposition 4.7.

(b)(i) $\Rightarrow$ (a): Seien zunächst $q_1$, $q_2 \in \mathbb{Q}^{>0}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} &= (q_1 g + q_1 q\eta + q_2\eta)_{\text{links}} = q_1 g + \{x + y \mid x \in q_1 q\eta^L,\, y \in q_2\eta^L\}^+ = \\ &= q_1 g + (q_1 q\eta^L + q_2\eta^L)^+ = q_1 g + (q_1 q + q_2)(\eta^L)^+ = q_1 g + (q_1 q + q_2)\eta.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir auch $(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}} = q_1 g + (q_1 q + q_2)\eta$.
Sind $q_1$, $q_2 \in \mathbb{Q}^{<0}$, so können wir diesen Fall auf den Fall positiver Faktoren zurückziehen. Denn dann sind $-q_1$, $-q_2 \in \mathbb{Q}^{>0}$ und nach dem gerade Gezeigten gilt $(-q_1\xi + (-q_2)\eta)_{\text{links}} = (-q_1\xi + (-q_2)\eta)_{\text{rechts}}$. Jetzt liefert uns Proposition 4.5

$$(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = -(-q_1\xi + (-q_2)\eta)_{\text{rechts}} = -(-q_1\xi + (-q_2)\eta)_{\text{links}} = (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}}.$$

(b)(ii) $\Rightarrow$ (a): Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^*$ mit unterschiedlichem Vorzeichen, ohne Einschränkung rechnen wir mit $q_1 > 0$ und $q_2 < 0$. Mit den Bezeichnungen $\vartheta := |q_2|\eta$ und $a := \frac{qq_1}{|q_2|}$ aus der Richtung (a) $\Rightarrow$ (b) haben wir dort folgende Äquivalenz gesehen:

$$(q_1\xi + q_2\eta)_{\text{links}} = (q_1\xi + q_2\eta)_{\text{rechts}} \Leftrightarrow (a\vartheta - \vartheta)_{\text{links}} = (a\vartheta - \vartheta)_{\text{rechts}}.$$

Wir zeigen also die zweite Gleichheit und sind fertig. Da nach Voraussetzung $a = \frac{qq_1}{-q_2} \neq 1$ gilt, dürfen wir wegen Proposition 4.5 und der möglichen Substitution $\vartheta' := -\frac{1}{a}\vartheta$ auch von einem $a > 1$ ausgehen. Leicht können wir verifizieren, daß aus der Voraussetzung $\operatorname{sign}(\xi) = 0$ auch $\operatorname{sign}(\vartheta) = 0$ folgt. Damit sind wir aber in der Situation von Lemma 4.42 und erhalten die gewünschte Gleichung. $\square$

# 5. Bewegung von Schnitten angeordneter Körper

Die in Definition 1.5 eingeführte Operation einer angeordneten abelschen Gruppe $G$ auf die Menge Cuts$(G)$ können wir als die Anwendung von sehr einfachen semialgebraischen Abbildungen auf die Schnitte von $G$ verstehen. Damit stellt sich die Frage, wie man allgemein semialgebraische Abbildungen auf Schnitte angeordneter Körper anwenden kann. Ist der Körper reell abgeschlossen, so bietet der wohlbekannte Monotoniesatz 5.1 die Möglichkeit einer naheliegenden Definition. Im allgemeinen Fall eines angeordneten Körpers ist das Problem zunächst nicht so leicht zu lösen, da uns hier eine Entsprechung für den Monotoniesatz fehlt. Zumindest für rationale Funktionen finden wir in diesem Kapitel eine Lösung (Theorem 5.18), indem wir unter gewissen Gradbedingungen auch hier wieder Monotie der Abbildungen erhalten.

Vieles in diesem Kapitel zitieren wir aus [T2]. Die Hauptaussage dort bezüglich des vorliegenden Problems betrifft jedoch Polynome, während wir mit Theorem 5.18 den Rahmen auf rationale Funktionen ausdehnen können.

Zunächst erinnern wir noch einmal an den angesprochenen Monotoniesatz.

**Proposition 5.1** (Monotoniesatz)**.** *Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper und $f : R \to R$ eine semialgebraische Abbildung. Dann existieren $c_0, \dots, c_n \in R \cup \{\pm\infty\}$,*

$$c_0 := -\infty < c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1} < c_n := +\infty,$$

*so daß für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ entweder*

*(A) $f|_{(c_i, c_{i+1})}$ konstant ist oder*

*(B) $f|_{(c_i, c_{i+1})}$ streng monoton steigend und stetig ist oder*

*(C) $f|_{(c_i, c_{i+1})}$ streng monoton fallend und stetig ist.*

*Beweis.* Wir finden die Aussage zum Beispiel in modelltheoretischer Form in [vdD], Kapitel 3, §1, Theorem 1.2, S. 43. □

Mit Hilfe des Monotoniesatzes 5.1 können wir semialgebraische Abbildungen auch auf Schnitte reell abgeschlossener Körper anwenden.

**Definition 5.2.** Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper und $p$ ein Schnitt von $R$. Sei weiter $s : R \to R$ eine semialgebraische Abbildung. Nach dem Monotoniesatz 5.1 existieren $a$, $b \in R \cup \{\pm\infty\}$, so daß $a < p < b$ gilt und $s|_{(a,b)} : (a, b) \to s((a, b))$ konstant oder streng monoton ist. Wir definieren $s(p)$ folgendermaßen:

(i) Ist $s = c$ konstant auf $(a, b)$, so setzen wir $s(p) := c$.

(ii) Ist $s$ streng monoton steigend auf $(a, b)$, so setzen wir $s(p) := f((a, \infty) \cap p^L)^+$, falls $(a, \infty) \cap p^L \neq \emptyset$, und $s(p) := s((-\infty, b) \cap p^R)^-$, falls $(a, \infty) \cap p^L = \emptyset$ gilt.

(iii) Ist $s$ streng monoton fallend auf $(a, b)$, so setzen wir $s(p) := s((a, \infty) \cap p^L)^-$, falls $(a, \infty) \cap p^L \neq \emptyset$, und $s(p) := s((-\infty, b) \cap p^R)^+$, falls $(a, \infty) \cap p^L = \emptyset$ gilt.

Wir können diese Definition auch mittels Realisierungen verstehen. Dafür erinnern wir an die Erweiterung einer semialgebraischen Abbildung.

**Bezeichnung 5.3.** Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper und $s : R \to R$ eine semialgebraische Abbildung. Für einen reell abgeschlossenen Oberkörper $L \supseteq R$ bezeichnen wir mit $s_L$ die Erweiterung von $s$ auf $L$. Für die Definition verweisen wir auf [BCR], Abschnitt 5.3.

**Proposition 5.4.** *Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper und $p$ ein Schnitt von $R$. Sei weiter $s : R \to R$ eine semialgebraische Abbildung und $L \supseteq R$ ein reell abgeschlossener Oberkörper von $R$. Für alle $\alpha \in \mathrm{Real}_L(p)$ gilt dann $s_L(\alpha) = s(p)$, falls $s(p) \in R$, und $s_L(\alpha) \models s(p)$, falls $s(p) \in \mathrm{Cuts}(R)$ gilt. Mit anderen Worten gilt $s(p) = s_L(\alpha) \restriction R$ mit einer beliebigen Realisierung $\alpha \in L$ von $p$.*

*Beweis.* Nach dem Monotoniesatz 5.1 können wir Elemente $a$, $b \in R \cup \{\pm\infty\}$ wählen, so daß $a < p < b$ gilt und $s$ auf $(a, b)_R$ konstant oder streng monoton ist. Nach Tarski verhält sich dann $s_L$ auf $(a, b)_L$ genauso. Ist $s = c$ konstant auf $(a, b)_R$, also gilt $s(p) = c$, so gilt auch $s_L(\alpha) = c$ für alle Realisierungen $\alpha \in L$ von $p$. Wir betrachten noch den Fall, daß $s$ streng monoton steigend auf $(a, b)_R$ ist und $(a, \infty) \cap p^L \neq \emptyset$ gilt, die anderen Fälle sind alle ähnlich. Dann gilt $s(p) = s((a, \infty) \cap p^L)^+$ nach Definition und $s_L(\alpha) > s(p)$, weil auch $s_L$ streng monoton steigend auf $(a, b)_L$ ist. Wegen der strengen Monotonie gibt es kein Element $r \in R$ mit $s(p) < r < s_L(\alpha)$, also gilt $s_L(\alpha) \models s(p)$. □

**Lemma 5.5.** *Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper und $L \supseteq R$ ein reell abgeschlossener Oberkörper von $R$. Sei weiter $p$ ein Schnitt von $R$ und $s : R \to R$ eine semialgebraische Abbildung. Ist $s(p) \in \mathrm{Cuts}(R)$, so gilt*

$$s_L\big(\mathrm{Real}_L(p)\big) = \mathrm{Real}_L\big(s(p)\big).$$

*Beweis.* Die Inklusion „ $\subseteq$ “ haben wir bereits in Proposition 5.4 nachgewiesen. Wir müssen nur noch „ $\supseteq$ “ zeigen. Dazu wählen wir mit Hilfe des Monotoniesatzes 5.1 Elemente $a < p < b$ in $R \cup \{\pm\infty\}$, so daß $s$ streng monoton auf $(a, b)_R$ ist. Daß $s$ auf einer Umgebung von $p$ konstant ist, ist durch die Voraussetzung $s(p) \in \mathrm{Cuts}(R)$ ausgeschlossen. Wir nehmen $s$ ohne Einschränkung als streng monoton steigend auf $(a, b)_R$ an. Nun gilt $\lim_{t \searrow a} s(t) < s(p) < \lim_{t \nearrow b} s(t)$. Da $s$ auf $(a, b)_R$ streng monoton ist, ist es hier umkehrbar mit der Umkehrung $s^{-1}$. Sei nun $\alpha \in \mathrm{Real}_L(s(p))$. Dann können wir uns überzeugen, daß $s_L^{-1}(\alpha)$ eine Realisierung von $p$ ist. Somit finden wir ein Urbild von $\alpha$ und die Behauptung gilt. □

In Definition 5.2 haben wir gesehen, wie wir im Falle reell abgeschlossener Körper semialgebraische Abbildungen auch auf Schnitte anwenden können. Im folgenden untersuchen wir, wie wir im allgemeineren Fall angeordneter Körper vorzugehen haben.

**Definition 5.6.** Sei $K$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß $R$ sowie $\xi$ ein Schnitt von $K$.
a) Wir definieren den **Grad von** $\xi$ als

$$\deg(\xi) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid n = [K(\alpha) : K] \text{ für ein } \alpha \in R \text{ mit } \alpha \models \xi\}.$$

Ist $\xi$ nicht realisiert in $R$, so gilt $\deg(\xi) = \inf(\emptyset) := \infty$.
b) Eine Realisierung $\alpha$ von $\xi$ in einem angeordneten Oberkörper $L \supseteq K$ heißt $\xi$-**generisch**, falls $[K(\alpha) : K] = \deg(\xi)$ gilt.

*Bemerkung 5.7.* Für jeden Schnitt $\xi$ eines angeordneten Körpers $K$ gilt $\deg(\xi) \geq 2$, da keine Realisierung von $\xi$ in $K$ liegen kann.

**Lemma 5.8.** *Seien $K \subseteq L$ angeordnete Körper und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Seien weiter $\alpha$, $\beta \in L$ Realisierungen von $\xi$ und $f$, $g \in K[t]$ Polynome mit $f/g \notin K$. Falls* $\deg(f)$, $\deg(g) < \deg(\xi)$ *gilt, dann gilt $f(\alpha)/g(\alpha) \restriction K = f(\beta)/g(\beta) \restriction K$.*

*Beweis.* Zunächst stellen wir fest, daß $f(\alpha)/g(\alpha)$ und $f(\beta)/g(\beta)$ tatsächlich Schnitte über $K$ induzieren. Denn wegen $f/g \notin K$ und der Gradbedingung an $f$ und $g$ gilt $f(\alpha)/g(\alpha)$, $f(\beta)/g(\beta) \notin K$. Gäbe es nämlich zum Beispiel ein Element $c \in K$ mit $c = f(\alpha)/g(\alpha)$, so wäre $\alpha$ Nullstelle des Polynoms $f - c \cdot g \in K[t]$ und somit $\deg(\xi) \leq \deg\{f - cg\} \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$, was wir ausgeschlossen haben.

Wir zeigen nun die Gleichheit der Schnitte, wobei wir der Einfachheit halber $L$ ohne Einschränkung als reell abgeschlossen betrachten. Nehmen wir an, es gibt ein $a \in K$ mit $f(\alpha)/g(\alpha) < a < f(\beta)/g(\beta)$. Aus der Gradbedingung $\deg(g) < \deg(\xi)$ folgt, daß $g$ auf $[\alpha, \beta]_L \subseteq \mathrm{Real}_L(\xi)$ keine Nullstellen besitzt und somit $f(t)/g(t)$ auf diesem Intervall definiert ist. Der Zwischenwertsatz für reell abgeschlossene Körper, den wir zum Beispiel in [KS], Kapitel I, §7, Satz 2, Seite 20, finden, liefert uns ein $\gamma \in (\alpha, \beta)_L$ mit $f(\gamma)/g(\gamma) = a$. Da $\gamma$ den Schnitt $\xi$ realisiert und Nullstelle des Polynoms $h := f - a \cdot g \in K[t]$ ist, erhalten wir den Widerspruch $\deg(\xi) \leq \deg(h) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\} < \deg(\xi)$. □

**Definition 5.9.** Sei $K$ ein angeordneter Körper und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Sei $h \in K(t) \setminus K$, und seien $f$, $g \in K[t]$ Polynome mit $\deg(f)$, $\deg(g) < \deg(\xi)$, so daß $h = f/g$ gilt. Dann können wir nach Lemma 5.8 den Schnitt $h(\xi)$ von $K$ definieren als

$$h(\xi) := f(\alpha)/g(\alpha) \restriction K,$$

wobei $\alpha$ eine Realisierung von $\xi$ in einem angeordneten Oberkörper $L \supseteq K$ ist.

**Definition 5.10.** Sei $K$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß $R$ und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Sei weiter $s : R \to R$ eine semialgebraische Abbildung. $s$ heißt **streng monoton steigend in** $\xi$, wenn für alle Realisierungen $\alpha < \beta$ von $\xi$ in einem angeordneten Oberkörper $L \supseteq R$ gilt, daß $s(\alpha) < s(\beta)$ ist.

$s$ heißt **streng monoton fallend in** $\xi$, wenn für alle Realisierungen $\alpha < \beta$ von $\xi$ in einem angeordneten Oberkörper $L \supseteq R$ gilt, daß $s(\alpha) > s(\beta)$ ist.

$s$ heißt **konstant in** $\xi$, wenn $s$ für alle Realisierungen von $\xi$ in einem angeordneten Oberkörper $L \supseteq R$ konstant ist.

**Lemma 5.11.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß $R$ und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Sei weiter $s : R \to R$ eine semialgebraische Abbildung. Falls $\xi$ nicht in $R$ realisiert ist, so ist $s$ konstant oder streng monoton in $\xi$.*

*Beweis.* Da $\xi$ nach Voraussetzung nicht in $R$ realisiert ist, gibt es genau eine Erweiterung $\eta := (p^L)^+$ von $\xi$ auf $R$. Damit realisiert ein Element $\alpha$ in einem angeordneten Oberkörper $L \supseteq R$ den Schnitt $\xi$ genau dann, wenn es $\eta$ realisiert. Wir können also ohne Einschränkung $K = R$ annehmen. Nach Monotoniesatz 5.1 existieren nun $a, b \in K \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < \xi < b$, so daß $s$ konstant oder streng monoton auf $(a, b)_K$ ist. Betrachten wir dann einen angeordneten Oberkörper $L \supseteq K$, so ist auch $s_L$ konstant oder streng monoton auf $(a, b)_L$. Dies zeigt die Behauptung. □

Im allgemeinen ist aber im Falle eines angeordneten Körpers $K$ nicht einmal ein Polynom $f \in K[t]$ in jedem Schnitt $\xi$ von $K$ konstant oder streng monoton. Wir betrachten dazu folgendes

*Beispiel 5.12.* Wir setzen $K := \mathbb{R}(t)$ mit infinitesimalem $t$ und betrachten den Schnitt $\xi := \sqrt{t} \restriction K$ von $K$. Da $\xi$ von $\sqrt{t}$ realisiert wird und $\sqrt{t}$ Nullstelle des über $K$ irreduziblen Polynoms $x^2 - t \in K[x]$ ist, gilt $\deg(\xi) = 2$. Wir betrachten nun das Polynom $f(x) := x^6 - 3tx^4 - 2tx^3 + 3t^2x^2 - 6t^2x + t^2 - t^3$. Es zerfällt in folgende Linearfaktoren:

$$\begin{aligned} f(x) = \big(x - (\sqrt{t} + \sqrt[3]{t})\big) \cdot \big(x - (-\sqrt{t} + \sqrt[3]{t})\big) \cdot \big(x - (\sqrt{t} + \zeta\sqrt[3]{t})\big) \cdot \\ \cdot \big(x - (-\sqrt{t} + \zeta\sqrt[3]{t})\big) \cdot \big(x - (\sqrt{t} + \zeta^2\sqrt[3]{t})\big) \cdot \big(x - (-\sqrt{t} + \zeta^2\sqrt[3]{t})\big). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\zeta$ die komplexe dritte Einheitswurzel $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Wie wir leicht nachprüfen, ist $f$ über $K$ irreduzibel. An seiner Linearfaktorzerlegung lesen wir die beiden Nullstellen $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt{t}$ von $f$ ab, die beide $\xi$ realisieren. Da offensichtlich $f$ auf $[\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}, \sqrt[3]{t} + \sqrt{t}] \subseteq \mathrm{Real}_{K(\sqrt{t}, \sqrt[3]{t})}(\xi)$ nicht konstant, aber stetig ist, kann es nicht streng monoton auf diesem Intervall sein.

**Definition 5.13.** Sei $K$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß $R$. Eine Abbildung $s : R \to R$ heißt **stückweise $K$-rational**, wenn es eine disjunkte Zerlegung von $R = I_1 \cup \ldots \cup I_r$ in Intervalle mit Endpunkten in $K \cup \{\pm\infty\}$ gibt, so daß für jedes $1 \leq j \leq r$ ein $Q \in K(t)$ ohne Pole auf $I_j$ existiert mit $s|_{I_j} = Q|_{I_j}$. Insbesondere gilt dann $s(K) \subseteq K$.

**Lemma 5.14.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß $R$ und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Sei weiter $s : R \to R$ eine stückweise $K$-rationale Abbildung.*

*(i) Falls $\xi$ prinzipal ist, so ist $\xi$ in $R$ ausgelassen. Ist $\eta$ die eindeutige Erweiterung von $\xi$ auf $R$, so gilt entweder $s(\eta) \in K$ oder $s(\eta) \restriction K$ ist ein prinzipaler Schnitt von $K$.*

*(ii) Falls $\xi$ frei und $s$ streng monoton in $\xi$ ist, so existieren ein stückweise $K$-rationaler, streng monotoner Homöomorphismus $t : R \to R$ mit $t(K) = K$ und Elemente $a < \xi < b$ in $K$, so daß $s|_{[a,b]} = t|_{[a,b]}$ eine $K$-rationale Abbildung auf $[a, b]$, also gleich einem $Q \in K(t)$ auf $[a, b]$ ist.*

*Beweis.* (i) Wir betrachten zunächst den Fall $\xi = +\infty$. Natürlich ist $\xi$ dann in $R$ ausgelassen. Denn angenommen, es gibt ein $\alpha \in R$ mit $\alpha \models +\infty_K$, dann ist $\alpha$ unendlich groß bezüglich $K$. Dies kann aber nicht sein, da $\alpha$ in diesem Fall nicht algebraisch über $K$ ist. Sei also $a := \lim_{t\to+\infty} s(t) \in R \cup \{\pm\infty\}$. Ist $a = \pm\infty$, so gilt $s(\eta) = \pm\infty$ und dieser Schnitt ist prinzipal. Aus $a \in R$ folgt wegen der $K$-Rationalität von $s$ sofort auch $a \in K$, und in diesem Fall gilt $s(\eta) = a^-$ oder $s(\eta) = a^+$ oder $s(\eta) = a$.

Im Fall $\xi = a^+$ mit einem $a \in K$ ist $\xi$ wieder ausgelassen in $R$. Wir überzeugen uns mit einer realtiv umfangreichen, aber leichten Fallunterscheidung davon, daß entweder $s(\eta) \in K$ gilt oder $s(\eta) \restriction K$ prinzipal ist. Der Fall $\xi = a^-$ für ein $a \in K$ geht analog.

(ii) Wir nehmen $s$ ohne Einschränkung als streng monoton steigend in $\xi$ an. Da $s$ nach Voraussetzung stückweise $K$-rational ist, gibt es Elemente $a, b \in K$ mit $a < \xi < b$ und ein $Q \in K(t)$ mit $s|_{(a,b)} = Q|_{(a,b)}$. Seien $p_1$ und $p_2$ die kleinste und die größte Erweiterung von $\xi$ auf $R$. Da $s$ streng monoton steigend in $\xi$ ist, muß $Q$ auf $\mathrm{Real}_L(p_1)$ und $\mathrm{Real}_L(p_2)$ mit einem angeordneten Oberkörper $L \supseteq R$ streng monoton steigen. Mit Hilfe des Monotoniesatzes 5.1 können wir Umgebungen $(c_1, d_1)$ von $p_1$ und $(c_2, d_2)$ von $p_2$ finden, auf denen $Q$ streng monoton steigt. Da $\xi$ frei ist, können wir das Intervall $(a, b)$ so weit verkleinern, daß $Q$ auf $(a, d_1) \cup (c_2, b)$ streng monoton steigt. Jetzt muß aber $Q$ streng monoton steigend auf dem gesamten Intervall $(a, b)_R$ sein, da $s$ streng monoton steigend in $\xi$ ist. Falls nötig, können wir durch nochmaliges Verkleinern des Intervalls $(a, b)$ erreichen, daß $Q$ keine Pole auf $[a, b]_R$ besitzt. Dann können wir $Q$ auf $(-\infty, a)_R$ durch $t_1 := id + (Q(a) - a)$ und auf $(b, +\infty)_R$ durch $t_2 := id + (Q(b) - b)$ fortsetzen und erhalten unsere gesuchte Abbildung $t : R \to R$. □

**Definition 5.15.** Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Ein Schnitt $\xi$ von $G$ heißt **dicht**, wenn $\xi$ frei ist und $G(\xi) = \{0\}$ gilt.

*Bemerkung 5.16.* Sei $R$ ein reell abgeschlossener Körper. Aus [T1], Korollar 3.6, wissen wir, daß für jeden freien Schnitt $p$ von $R$ genau dann $G(p) = \{0\}$ gilt, wenn $R$ für jede Realisierung $\alpha$ von $p$ dicht in $\mathrm{rcl}(R(\alpha))$ liegt. Dies motiviert den Begriff „dicht“ aus Definition 5.15.

**Korollar 5.17.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß $R$ und $\xi$ ein Schnitt von $K$, der in $R$ nicht realisiert ist. Sei $\eta$ die eindeutige Erweiterung von $\xi$ auf $R$ und $s : R \to R$ eine stückweise $K$-rationale und in $\xi$ nicht konstante Abbildung. Dann ist $s(\eta)$ die eindeutige Erweiterung von $s(\eta) \restriction K$ und es gilt:*

*(i) $\xi$ ist genau dann prinzipal, wenn $s(\eta) \restriction K$ prinzipal ist.*

*(ii) $\xi$ ist genau dann dicht, wenn $s(\eta) \restriction K$ dicht ist.*

*Beweis.* Falls $\xi$ prinzipal ist, gelten alle Behauptungen nach Lemma 5.14 (i). Hierzu bemerken wir noch, daß $s(\eta) \in K$ nicht vorkommen kann, da $s$ nicht konstant ist.

Wir gehen also für den Rest des Beweises von einem freien Schnitt $\xi$ aus. Da $\xi$ in $R$ ausgelassen ist und $s$ nicht konstant in $\xi$ ist, ist $s$ nach Lemma 5.11 streng monoton in $\xi$. Sei $s$ ohne Einschränkung streng monoton steigend. Wegen Lemma 5.14 (ii) nehmen wir $s$ an als einen streng monoton steigenden Homöomorphismus $s : R \to R$ mit $s(K) = K$. Dann folgt aber sofort $s(\eta) = \big(s(\eta^L), s(\eta^R)\big)$ und $s(\eta) \restriction K = \big(s(\xi^L), s(\xi^R)\big)$. Damit ist $s(\eta)$ die eindeutige Erweiterung von $s(\eta) \restriction K$ und der Schnitt $s(\eta) \restriction K$ ist frei. Die letzte Aussage vervollständigt unseren Beweis von (i).

Wir müssen noch Teil (ii) zeigen. Der freie Schnitt $\xi$ ist genau dann dicht, wenn es $\eta$ ist, weil $\hat{\eta}$ nach Proposition 1.32 (ii) eine Erweiterung von $\hat{\xi}$ ist. Wie wir in Bemerkung 5.16 erwähnt haben, gilt für jeden freien Schnitt $p$ von $R$ genau dann $G(p) = \{0\}$, wenn $R$ für jede Realisierung $\alpha$ von $p$ dicht in $\operatorname{rcl}(R(\alpha))$ liegt. Wegen der strengen Monotonie von $s$ ist aber einerseits $\eta$ genau dann frei, wenn $s(\eta)$ frei ist, und andererseits gilt $\operatorname{rcl}(R(\alpha)) = \operatorname{rcl}(R(s(\alpha)))$ für alle Realisierungen $\alpha$ von $\eta$. Da $\alpha \models \eta$ äquivalent ist zu $s(\alpha) \models s(\eta)$, ist $\eta$ genau dann dicht, wenn $s(\eta)$ dicht ist. Wieder aufgrund von Proposition 1.32 (ii) ist $s(\eta)$ genau dann dicht, wenn es $s(\eta) \restriction K$ ist. Alles zusammen zeigt die Behauptung. □

**Theorem 5.18.** *Seien $K \subseteq L$ angeordnete Körper und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Seien weiter $f, g \in K[t]$, $g \neq 0$, mit $f/g \notin K$ und $\deg(f) + \deg(g) \leq \deg(\xi)$. Dann gilt:*

*(i) Falls $g$ keine Nullstelle auf den Realisierungen von $\xi$ in $L$ hat, so ist $f/g$ streng monoton auf $\operatorname{Real}_L(\xi)$. Andernfalls hat $g$ höchstens eine Nullstelle $\alpha \in \operatorname{Real}_L(\xi)$, und $f/g$ ist jeweils streng monoton auf den zwei Intervallen $\{\gamma \in \operatorname{Real}_L(\xi) \mid \gamma < \alpha\}$ und $\{\gamma \in \operatorname{Real}_L(\xi) \mid \gamma > \alpha\}$.*

*(ii) Gilt zusätzlich $\deg(f), \deg(g) < \deg(\xi)$, und ist $L$ reell abgeschlossen, so bildet $f/g$ die Realisierungen von $\xi$ surjektiv auf die Realisierungen von $(f/g)(\xi)$ in $L$ ab. In diesem Fall erhalten wir also die Bijektion*

$$f/g : \operatorname{Real}_L(\xi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Real}_L((f/g)(\xi)).$$

*Beweis.* (i) Falls $g$ keine Nullstelle auf $\operatorname{Real}_L(\xi)$ hat, so ist $f/g$ auf ganz $\operatorname{Real}_L(\xi)$ definiert. Wegen $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ und $\deg(f'g - fg') \leq \deg(f) + \deg(g) - 1 < \deg(\xi)$ hat $(f/g)'$ keine Nullstelle auf $\operatorname{Real}_L(\xi)$ und somit ist $f/g$ streng monoton auf diesem Intervall. Nehmen wir nun an, $g$ besitzt eine Nullstelle $\alpha \in \operatorname{Real}_L(\xi)$. Nach der Gradvoraussetzung gilt dann $\deg(g) = \deg(\xi)$ und $\deg(f) = 0$, $f$ ist also konstant. Da aber $\deg(g') < \deg(\xi)$ gilt, hat $g'$ keine Nullstelle auf $\operatorname{Real}_L(\xi)$ und $g$ ist streng monoton auf diesem Intervall. Deshalb hat $g$ nur die einzige Nullstelle $\alpha$ auf $\operatorname{Real}_L(\xi)$ und $1/g$ ist jeweils streng monoton auf den beiden Intervallen $\{\gamma \in \operatorname{Real}_L(\xi) \mid \gamma < \alpha\}$ und $\{\gamma \in \operatorname{Real}_L(\xi) \mid \gamma > \alpha\}$. Da $f$ konstant ungleich 0 ist, folgt auch in diesem Fall die Behauptung.

(ii) Aufgrund der zusätzlichen Gradvoraussetzung an $f$ und $g$ können wir den Ausdruck $(f/g)(\xi)$ im Sinne von Definition 5.9 verstehen. Es gilt $(f/g)(\operatorname{Real}_L(\xi)) \subseteq$

$\mathrm{Real}_L((f/g)(\xi))$. Wegen $\deg(g) < \deg(\xi)$ hat $g$ keine Nullstellen auf den Realisierungen von $\xi$ in $L$. Nach Teil (i) ist deshalb $f/g$ streng monoton auf $\mathrm{Real}_L(\xi)$ und somit injektiv. Zu zeigen bleibt nur die Surjektivität.

Wir nehmen zunächst an, daß $L$ der reelle Abschluß von $K$ ist. Falls dann $\xi$ in $L$ ausgelassen ist, folgt (ii) bereits nach Korollar 5.17. Wir gehen also im weiteren davon aus, daß $\xi$ in $L$ realisiert ist, also daß $\xi$ frei ist. Da $f/g$ in $\xi$ nach Teil (i) in $\xi$ streng monoton ist, finden wir mit Hilfe von Lemma 5.14 (ii) Elemente $a < \xi < b$ in $K$ und einen stückweise $K$-rationalen, streng monotonen Homöomorphismus $t : L \to L$ mit $t(K) = K$, so daß $(f/g)|_{[a,b]} = t|_{[a,b]}$ gilt. Damit ist jede Realisierung von $(f/g)(\xi)$ in $L$ das Bild einer Realisierung von $\xi$ in $L$ unter $f/g$.

Sei nun $L$ ein beliebiger reell abgeschlossener Körper über $K$ und sei $R$ der reelle Abschluß von $K$ in $L$. Seien weiter $\eta_1$, $\eta_2$ die kleinste und die größte Erweiterung von $\xi$ auf $R$, sowie $\eta_1'$ und $\eta_2'$ die kleinste und die größte Erweiterung von $\xi$ auf $L$. Nach dem schon Gezeigten sind $(f/g)(\eta_1)$ und $(f/g)(\eta_2)$ die kleinste und die größte Erweiterung von $(f/g)(\xi)$ auf $R$ - oder andersherum. Da $f/g$ streng monoton in $\xi$ ist, sind nach Lemma 5.5 auch $(f/g)(\eta_1')$ und $(f/g)(\eta_2')$ die kleinste und die größte Erweiterung von $(f/g)(\xi)$ auf $L$ - oder andersherum. Das zeigt (ii). □

*Bemerkung 5.19.* Sei $K$ ein angeordneter Körper und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Insbesondere erfüllen für alle $a, b, c, d \in K$ mit $(c, d) \neq (0, 0) \in K \times K$ die rationalen Funktionen $\frac{at+b}{ct+d} \in K(t)$ die Bedingungen von Theorem 5.18, da nach Bemerkung 5.7 im allgemeinen $\deg(\xi) \geq 2$ gilt.

**Korollar 5.20.** *Sei $K$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß $R$ und $\xi$ ein Schnitt von $K$. Seien $\alpha \in R$ eine $\xi$-generische Realisierung von $\xi$ und $f$, $g \in K[t] \backslash K$ Polynome mit $g \neq 0$ und* $\deg(f) + \deg(g) \leq \deg(\xi)$ *sowie* $\deg(f), \deg(g) < \deg(\xi)$. *Dann werden von $f/g$ die kleinste und die größte Erweiterung von $\xi$ auf $R$ auf die kleinste und die größte Erweiterung von $(f/g)(\xi) = (f/g)(\alpha) \upharpoonright K$ abgebildet.*

*Beweis.* Die Aussage folgt mit Theorem 5.18 (ii). □

# 6. Anhang: Der verallgemeinerte Potenzreihenkörper

In diesem Abschnitt wird für den Leser, der mit dem verallgemeinerten Potenzreihenkörper nicht vertraut ist, dieser Begriff detailliert eingeführt und erklärt. Am Ende des Abschnitts erwähnen wir noch die standardmäßig verwendete ordnungsverträgliche Bewertung dieses Körpers.

**Definition 6.1.** Sei $X$ eine total geordnete Menge. Dann heißt $X$ **wohlgeordnet**, wenn jede Teilmenge $M \subseteq X$ ein kleinstes Element besitzt.

**Definition 6.2 (**Träger**).** Sei $X$ eine Menge und $G$ eine (additiv geschriebene) Gruppe. Für eine Abbildung $f : X \to G$ definieren wir den **Träger von** $f$ als

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

**Definition 6.3.** Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir definieren die Menge von Abbildungen

$$k((t^\Gamma)) := \{a : \Gamma \to k \mid \operatorname{supp}(a) \text{ wohlgeordnet}\}.$$

Für ein $a \in k((t^\Gamma))$ verwenden wir die Schreibweise

$$a = \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)t^\gamma.$$

Um für einen Körper $k$ und eine angeordnete abelsche Gruppe $\Gamma$ eine Körperstruktur auf $k((t^\Gamma))$ definieren zu können, benötigen wir folgendes

**Lemma 6.4.** *Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Für alle $a, b \in k((t^\Gamma))$ sind die Mengen*

$$\{\gamma \in \Gamma \mid a(\gamma) + b(\gamma) \neq 0\} \text{ und } \{\gamma \in \Gamma \mid \textstyle\sum_{\delta,\,\varepsilon\in\Gamma,\,\delta+\varepsilon=\gamma} a(\delta)\cdot b(\varepsilon) \neq 0\}$$

*wohlgeordnet.*

*Beweis.* Der Beweis ist leicht. □

Mit Hilfe dieses Lemmas erhalten wir für einen Körper $k$ und eine angeordnete abelsche Gruppe $\Gamma$ eine wohldefinierte Addition und Multiplikation auf $k((t^\Gamma))$.

**Definition 6.5.** Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir definieren eine Addition auf $k((t^\Gamma))$, indem wir für zwei Elemente $a, b \in k((t^\Gamma))$ setzen:

$$a + b := \sum_{\gamma\in\Gamma} \big(a(\gamma) + b(\gamma)\big)\, t^\gamma \in k((t^\Gamma)).$$

Das Produkt zweier Elemente $a, b \in k((t^\Gamma))$ definieren wir als

$$a \cdot b := \sum_{\gamma\in\Gamma} \Big\{ \sum_{\delta,\,\varepsilon\in\Gamma,\,\delta+\varepsilon=\gamma} a(\delta)\cdot b(\varepsilon) \Big\}\, t^\gamma \in k((t^\Gamma)).$$

**Proposition 6.6.** *Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Dann ist $(k((t^\Gamma)), +, \cdot)$ mit der in Definition 6.5 definierten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Einselement*

$$1 : \Gamma \to k,\ 1(\gamma) = \begin{cases} 1 & ,\text{für } \gamma = 0 \\ 0 & ,\text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Der Beweis geht straightforward. □

Im folgenden werden wir zeigen, daß wir auf diese Weise tatsächlich einen Körper erhalten. Dafür beweisen wir mehrere Lemmata.

**Lemma 6.7.** *Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Sei weiter $a \in k((t^\Gamma)) \setminus \{0\}$. Dann existieren Elemente $\gamma_0 \in \Gamma$, $c \in k^* = k \setminus \{0\}$ und $\varepsilon \in k((t^\Gamma))$ mit* $\operatorname{supp}(\varepsilon) > 0$ *und*

$$a = c \cdot t^{\gamma_0} \cdot (1 + \varepsilon).$$

*Beweis.* Wir setzen $\gamma_0 := \min(\operatorname{supp}(a))$ und $c := a(\gamma_0) \neq 0$. Weiter definieren wir

$$\varepsilon(\gamma) := \begin{cases} 0 & , \text{für } \gamma \leq 0 \\ \frac{a(\gamma+\gamma_0)}{a(\gamma_0)} & , \text{für } \gamma > 0. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\operatorname{supp}(\varepsilon) > 0$. Außerdem berechnen wir:

$$t^{\gamma_0} \cdot \varepsilon =$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big\{ \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Gamma \\ \delta_1 + \delta_2 = \gamma}} t^{\gamma_0}(\delta_1)\varepsilon(\delta_2) \Big\} t^\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big\{ \sum_{\substack{\delta > 0 \\ \gamma_0 + \delta = \gamma}} \varepsilon(\delta) \Big\} t^\gamma = \tfrac{1}{a(\gamma_0)} \cdot \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma > \gamma_0}} a((\gamma - \gamma_0) + \gamma_0) t^\gamma =$$

$$= \tfrac{a}{a(\gamma_0)} - t^{\gamma_0}.$$

Daraus folgt jetzt sofort $c \cdot t^{\gamma_0} \cdot (1 + \varepsilon) = a(\gamma_0) t^{\gamma_0} + a - a(\gamma_0) t^{\gamma_0} = a$. □

**Lemma 6.8** (Neumann)**.** *Sei $G$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $S \subseteq G^{>0}$ eine wohlgeordnete Teilmenge von $G^{>0}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $nS$ die $n$-fache Summe $S + \ldots + S$. Dann gilt:*

*(i) Die Menge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nS$ ist wohlgeordnet.*

*(ii) Für jedes $g \in G$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid g \in nS\}$ endlich.*

*Beweis.* Wir verweisen auf [N], Theoreme 3.4 und 3.5. □

**Lemma/Definition 6.9.** Sei $k$ ein Körper, $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\varepsilon \in k((t^\Gamma))$ mit $\operatorname{supp}(\varepsilon) > 0$. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sind dann bis auf endlich viele alle Summanden der formalen Summe $\sum_{k=0}^\infty (\varepsilon^k(\gamma))$ gleich 0 und wir können definieren:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k := \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big( \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k(\gamma) \Big) t^\gamma \in k((t^\Gamma)).$$

*Beweis.* Wir zeigen per Induktion für alle $\gamma \in \Gamma$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Darstellung

$$\varepsilon^k(\gamma) = \sum_{\substack{\delta_1,\dots,\delta_k \in \Gamma \\ \delta_1+\dots+\delta_k=\gamma}} \varepsilon(\delta_1)\cdot\ldots\cdot\varepsilon(\delta_k).$$

Sei also $\gamma \in \Gamma$ beliebig. Für $k = 1$ ist die Behauptung trivial. Wir betrachten den Induktionsschritt $k \to k+1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{k+1}(\gamma) = (\varepsilon^k \cdot \varepsilon)(\gamma) = \\
&\quad = \textstyle\sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} \varepsilon^k(\gamma_1)\varepsilon(\gamma_2) = \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} \left( \sum_{\delta_1+\ldots+\delta_k=\gamma_1} \varepsilon(\delta_1)\ldots\varepsilon(\delta_k)\varepsilon(\gamma_2) \right) = \\
&\qquad = \textstyle\sum_{\delta_1+\ldots+\delta_k+\gamma_2=\gamma} \varepsilon(\delta_1)\ldots\varepsilon(\delta_k)\varepsilon(\gamma_2) = \sum_{\delta_1+\ldots+\delta_{k+1}=\gamma} \varepsilon(\delta_1)\ldots\varepsilon(\delta_{k+1}).
\end{aligned}$$

Anhand dieser Darstellung erkennen wir, daß $\operatorname{supp}(\varepsilon^k) \subseteq k \cdot \operatorname{supp}(\varepsilon)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da aber nach Voraussetzung $\operatorname{supp}(\varepsilon) \subseteq \Gamma^{>0}$ gilt, ist nach Lemma 6.8 (ii) für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \gamma \in n \cdot \operatorname{supp}(\varepsilon)\}$ endlich. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist somit $\varepsilon^k(\gamma)$ nur für endlich viele $k \in \mathbb{N}$ ungleich 0. Damit können wir definieren:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k : \Gamma \to k, (\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k)(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon^k(\gamma)).$$

Dann ist $\operatorname{supp}(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot \operatorname{supp}(\varepsilon)$ nach Lemma 6.8 (i) wohlgeordnet. Das zeigt $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \in k((t^\Gamma))$. □

Als letztes Hilfsmittel beweisen wir noch folgendes

**Lemma 6.10.** *Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Ist dann $\varepsilon \in k((t^\Gamma))$ mit $\operatorname{supp}(\varepsilon) > 0$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k$ das multiplikativ Inverse zu $1+\varepsilon$ in $k((t^\Gamma))$.*

*Beweis.* Nach Lemma/Definition 6.9 gilt $\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \in k((t^\Gamma))$. Wir zeigen explizit die Gleichung

$$(1+\varepsilon) \cdot \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k = 1.$$

Wir schreiben $\xi := \min(\operatorname{supp}(\varepsilon))$. Für ein beliebiges $\gamma \in \Gamma$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&[(1+\varepsilon)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k](\gamma) = \\
&= \sum_{\delta_1+\delta_2=\gamma} \Big( (1+\varepsilon)(\delta_1) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k)(\delta_2) \Big) = \sum_{\substack{\delta_1+\delta_2=\gamma \\ \delta_1<\xi,\, \delta_1\neq 0}} \Big( (0+0) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k)(\delta_2) \Big) + \\
&\quad + \sum_{\substack{\delta_1+\delta_2=\gamma \\ \delta_1=0}} \Big( (1+0) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k)(\delta_2) \Big) + \sum_{\substack{\delta_1+\delta_2=\gamma \\ \delta_1\geq\xi}} \Big( (0+\varepsilon(\delta_1)) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k)(\delta_2) \Big) = \\
&= (\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k)(\gamma) - \sum_{\substack{\delta_1+\delta_2=\gamma \\ \delta_1\in\operatorname{supp}(\varepsilon)}} \Big( -\varepsilon(\delta_1) \cdot [(\sum_{k=1}^{\infty} (-\varepsilon)^k)(\delta_2) + 1(\delta_2)] \Big) =
\end{aligned}$$

$$= 1(\gamma) - \varepsilon(\gamma) + (\sum_{k=2}^{\infty}(-\varepsilon)^k)(\gamma) + \varepsilon(\gamma) - \sum_{\delta_1\in\Gamma}\Big( - \varepsilon(\delta_1)\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^k)(\gamma-\delta_1)\Big) =$$

$$= 1(\gamma) + (\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^{k+1})(\gamma) - (\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^{k+1})(\gamma) = 1(\gamma).$$

□

**Proposition/Definition 6.11 (**Verallgemeinerter Potenzreihenkörper**).** Sei $k$ ein Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Dann ist $k((t^\Gamma))$ ein Körper. Wir nennen ihn den **verallgemeinerten Potenzreihenkörper**.

*Beweis.* Nach Proposition 6.6 ist $k((t^\Gamma))$ bereits ein Ring. Wir müssen demnach nur noch die Existenz von multiplikativ Inversen nachweisen. Sei also ein Element $a \in k((t^\Gamma)) \setminus \{0\}$ gegeben. Nach Lemma 6.7 existieren Elemente $\gamma_0 \in \Gamma$, $c \in k \setminus \{0\}$ und $\varepsilon \in k((t^\Gamma))$ mit $\operatorname{supp}(\varepsilon) > 0$ und

$$a = c \cdot t^{\gamma_0} \cdot (1 + \varepsilon).$$

Da $1 + \varepsilon$ nach Lemma 6.10 invertierbar ist, zeigen wir nur noch die Invertierbarkeit von $t^{\gamma_0}$. Für ein beliebiges $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$[t^{\gamma_0} \cdot t^{-\gamma_0}](\gamma) = \sum_{\delta_1+\delta_2=\gamma} t^{\gamma_0}(\delta_1)t^{-\gamma_0}(\delta_2) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} t^{\gamma_0}(\gamma_0)t^{-\gamma_0}(-\gamma_0) = 1 & \text{, für } \gamma = 0 \\ t^{\gamma_0}(\gamma_0)t^{-\gamma_0}(\gamma-\gamma_0) + t^{\gamma_0}(\gamma+\gamma_0)t^{-\gamma_0}(-\gamma_0) = 0 & \text{, sonst} \end{array} \right\} = 1(\gamma).$$

□

**Definition 6.12.** Sei $k$ ein angeordneter Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Dann ordnen wir den Körper $k((t^\Gamma))$ an, indem wir für alle $a \in k((t^\Gamma)) \setminus \{0\}$ definieren:

$$a > 0 :\Leftrightarrow a(\min(\operatorname{supp}(a))) > 0.$$

**Proposition 6.13.** *Ist $k$ ein reell abgeschlossener Körper und $\Gamma$ eine divisible angeordnete abelsche Gruppe, so ist $k((t^\Gamma))$ reell abgeschlossen.*

*Beweis.* Eine sogar etwas stärkere Aussage finden wir in [R], 6.10. □

Wir definieren abschließend noch eine Bewertung des verallgemeinerten Potenzreihenkörpers. Wir verwenden die Bezeichnungen aus [KS], Kap. II, §4, S. 61. Für eine angeordnete abelsche Gruppe $\Gamma$ bezeichnen wir mit $\Gamma \cup \infty$ die disjunkte Vereinigung $\Gamma \cup \{\infty\}$ (mit einem zu $\Gamma$ fremden Element $\infty$). $\Gamma \cup \infty$ wird zu einer total geordneten Halbgruppe, indem wir für alle $\gamma \in \Gamma$ definieren: $\gamma < \infty$, und $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty + \infty = \infty$.

**Definition 6.14.** Sei $k$ ein angeordneter Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir definieren

$$v : k((t^\Gamma)) \to \Gamma \cup \infty$$
$$a \mapsto v(a) := \min(\mathrm{supp}(a)) \quad \big(a \in k((t^\Gamma))\big).$$

Dabei verwenden wir die Konvention $\min(\emptyset) := \infty$.

**Proposition 6.15.** *Sei $k$ ein angeordneter Körper und $\Gamma$ eine angeordnete abelsche Gruppe. Dann ist $v$ eine ordnungsverträgliche Bewertung von $k((t^\Gamma))$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, daß $v$ eine Bewertung von $k((t^\Gamma))$ ist, und weisen dafür für beliebige Elemente $a$, $b \in k((t^\Gamma))$ folgende drei Eigenschaften nach.
(1) $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$. Das ist trivial.
(2) $v(ab) = v(a) + v(b)$.
„ $\geq$ “: Natürlich gilt $(ab)(v(ab)) = \sum_{\delta+\varepsilon=v(ab)} a(\delta)b(\varepsilon) \neq 0$. Deshalb existieren ein $\delta \in \mathrm{supp}(a)$ und ein $\varepsilon \in \mathrm{supp}(b)$ mit $v(ab) = \delta + \varepsilon$. Nach Definition von $v$ gilt $v(a) \leq \delta$ und $v(b) \leq \varepsilon$. Es folgt $v(ab) = \delta + \varepsilon \geq v(a) + v(b)$.
„ $\leq$ “: Die Abschätzung $v(ab) \leq v(a) + v(b)$ gilt wegen

$$(ab)(v(a) + v(b)) = \sum_{\gamma_1+\gamma_2=v(a)+v(b)} a(\gamma_1)b(\gamma_2) = a(v(a))b(v(b)) \neq 0.$$

(3) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$. Wir nehmen an, es gilt $v(a + b) < v(a)$, $v(b)$. Dann folgt $(a + b)(v(a + b)) = a(v(a + b)) + b(v(a + b)) = 0 + 0 = 0$. Das aber ist ein Widerspruch zur Definition von $v$.

Damit bleibt uns nur noch zu zeigen, daß $v$ auch ordnungsverträglich ist, das heißt, daß für alle $a$, $b \in k((t^\Gamma))$ mit $0 < a < b$ auch $v(a) \geq v(b)$ gilt. Seien also Elemente $a$, $b \in k((t^\Gamma))$ gegeben. Wir nehmen an, es gilt $v(a) < v(b)$. Nach Definition von $v$ gilt dann $v(b - a) = v(a)$. Mit $b - a > 0$ folgt also $0 < (b - a)(v(b - a)) = (b - a)(v(a)) = b(v(a)) - a(v(a)) = 0 - a(v(a)) = -a(v(a))$. Das bedeutet aber $a(v(a)) < 0$, im Widerspruch zu $a > 0$. $\square$

# Literatur

[B] S. Bosch: Algebra. 4., überarbeitete Auflage, Springer, Berlin Heidelberg New York Barcelona Hongkong London Mailand Paris Tokio, 2001.

[Ba] R. Baer: Dichte, Archimedizität und Starrheit geordneter Körper. Math. Ann. **188**, 165-205 (1970).

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy: Real Algebraic Geometry. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3. Folge) **36**, Springer, Berlin Heidelberg New York Barcelona Budapest Hong Kong London Mailand Paris Singapur Tokio, 1998.

[C] J.H. Conway: On numbers and games. London Math. Soc. Monographs **6**, Academic Press, London New York San Francisco, 1976.

[K] F.-V. Kuhlmann: Invariance group and invariance valuation ring of a cut. Preprint.

[KS] M. Knebusch, C. Scheiderer: Einführung in die reelle Algebra. Vieweg, Braunschweig und Wiesbaden, 1989.

[M] H.M. MacNeille: Partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. **42**, no. 3, 416-460 (1937).

[N] B.H. Neumann: On ordered division rings. Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 202-252 (1949).

[P] G.G. Pestov: On the theory of cuts in ordered fields. Siberian Math. Journal **42**, no. 6, 1123-1131 (2001).

[R] P. Ribenboim: Fields: algebraically closed and others. Manus. Math. **75**, 115-150 (1992).

[T1] M. Tressl: Model Completeness of o-minimal Structures expanded by Dedekind Cuts. Erscheint im Journal of Symbolic Logic.

[T2] M. Tressl: Cuts in ordered fields. In Vorbereitung.

[vdD] L. van den Dries: Tame Topology and O-minimal Structures. London Math. Soc. Lecture Note Series **248**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

# Symbolverzeichnis

# Stichwortverzeichnis

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit mit dem Titel

**„Elementare Invarianten von Dedekindschnitten angeordneter Körper“**

selbständig verfaßt und nur die angegebene Literatur verwendet habe.

Regensburg, den 22.12.2004