WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung

Masterarbeit

Varianten von Hensels Lemma

Eingereicht von:
FLORIAN SEVERIN

Betreut durch:
DR. FRANZISKA JAHNKE

Eingereicht am 24. August 2016*

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

korrigierte Version vom 17. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit mit dem Titel

"Varianten von Hensels Lemma"

selbständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, den 24. August 2016 Florian Severin

Einleitung

Hensels Lemma ist historisch betrachtet zunächst eine Aussage über die p-adischen Zahlen, deren systematisches Studium auf Kurt Hensel zurückgeht (siehe etwa [Hen97]). In [Azu51] betrachtet Azumaya später die Klasse aller Ringe, die eine entsprechende Verallgemeinerung von Hensels Lemma erfüllen. Da sich jeder Bewertung auf einem Körper auf natürliche Weise ein spezieller Ring zuordnen lässt (siehe Abschnitt 2.2) führt dies nicht nur zum Begriff des henselschen Rings, sondern auch zu dem der henselschen Bewertung.

Insbesondere in der Modelltheorie wurden seitdem eine Reihe von (schärferen) Varianten der Aussage von Hensels Lemma betrachtet und zur Definition bestimmter Klassen von Bewertungen verwendet: Neben henselschen Bewertungen haben sich etwa 2-henselsche ([PZ75]), p-henselsche ([Wad83, Koe95]), t-henselsche ([PZ78]), Ω-henselsche ([Brö76, Bec78]) und $n_{\leq}$-henselsche ([FJ15]) Bewertungen als interessant herausgestellt.

Zwischen einigen dieser Begriffe bestehen offensichtliche Implikationen. So erfüllt jede henselsche Bewertung alle oben genannten Varianten von Hensels Lemma und jede $n_{\leq}$-henselsche Bewertung ist auch p-henselsch für $p \in \mathbb{P}$ mit $p \leq n$. Die Untersuchung weiterer Zusammenhänge der unterschiedlichen Varianten von Hensels Lemma ist ein Ziel der vorliegenden Arbeit. Dazu führen wir auch einen weiteren, technischen, Begriff ein, nämlich den einer (separabel) prim-henselschen Bewertung (unterhalb einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$).

Für beliebige Körper erhalten wir als Teilergebnis der Analyse der Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen das folgende Diagramm. Die vorkommenden Bezeichnungen werden in Kapitel 7, bzw. bereits vorher im Laufe der Arbeit, genauer erklärt.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{henselsch} \arrow[dll, Rightarrow, bend right] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \arrow[drr, Rightarrow, bend left] & & \\
\text{separabel prim-henselsch} \arrow[urr, Rightarrow, bend left, "/" marking] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \arrow[rr, dotted, shift right, "?"'] & & \mathbb{N}_{\leq}\text{-henselsch} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[ll, Rightarrow, shift right] \arrow[rr, Rightarrow, shift left] & & t\text{-henselsch} \arrow[ull, Rightarrow, bend right, "/" marking] \arrow[ll, dotted, shift left, "?"] \\
\text{prim-henselsch} \arrow[u, dotted, shift right, "?"'] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & & & & \\
\mathbb{P}\text{-henselsch} \arrow[u, dotted, shift right, "?"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

In [EE77] studieren Endler und Engler die Klasse aller henselschen Bewertungen auf einem Körper mithilfe einer Partitionierung dieser in zwei Teilmengen, was zur Definition der *kanonischen henselschen Bewertung* führt. Der wichtigste Bestandteil dabei ist eine Verallgemeinerung eines Theorems von F. K. Schmidt für spezielle (henselsche) Bewertungen ([Sch33, Satz 1]) auf die Gesamtheit aller henselscher Bewertungen. Eine natürliche Variante dieses Theorems gilt auch für p-henselsche Bewertungen.

Ein wichtiger Teil der vorliegenden Arbeit befasst sich mit $n_{\leq}$-henselschen Bewertungen und der entsprechenden Variante des genannten Theorems von F. K. Schmidt auf diese.

Theorem 5.10. Sei K ein Körper mit $K^{\text{sep}} \neq K$, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \subsetneq K$ zwei nicht-triviale unabhängige $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsringe auf K. Dann gilt $n < m(K) \cdot p(K)$.

Daraus lässt sich, ähnlich wie für henselsche bzw. p-henselsche Bewertungen, auf jedem Körper auch eine kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung definieren, wie wir im Abschnitt 5.2 im Detail sehen werden. Zwei wichtige Eigenschaften dieser kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung sind die folgenden.

Proposition 5.21. Der kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsring auf einem Körper K (mit $K^{\text{sep}} \neq K$) ist, bezüglich $\subseteq$, mit allen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringen auf K vergleichbar.

Proposition 5.22. Sei K ein $n_{\leq}$-henselscher Körper. Dann gilt (vgl. Notation 5.9):

(1) Ist $n \geq (m(K)!)^2$, so ist $\mathcal{O}_{\leq n} \neq K$.

(2) Ist $n < m(K)^2$, so gilt $\mathcal{O}_{\leq n} = K$.

Entsprechend variierte Aussagen gelten auch für die kanonische henselsche Bewertung, was auf die Nützlichkeit der kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung hindeutet.

Anwendungen in der Theorie henselscher Bewertungen findet die kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung etwa in Form der beiden folgenden Aussagen, die wir in Kapitel 6 beweisen.

Proposition 6.1. Sei K ein henselscher Körper mit $K^{\text{sep}} \neq K$ und v_K die kanonische henselsche Bewertung auf K, sowie $\mathcal{O}_K$ der zugehörige Bewertungsring. Dann lässt sich $\mathcal{O}_K$ wie folgt durch die kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringe $\mathcal{O}_{\leq n}$ auf K ausdrücken.

(1) Falls der Restklassenkörper Kv_K separabel abgeschlossen ist, das heißt falls $\mathcal{O}_K \in H_2(K)$ gilt, so ist $\mathcal{O}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\leq n}$.

(2) Falls der Restklassenkörper Kv_K nicht separabel abgeschlossen ist, das heißt falls $\mathcal{O}_K \in H_1(K)$ gilt, so ist $\mathcal{O}_K = \bigcup_{n \geq n_0} \mathcal{O}_{\leq n}$ für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq (d!)^2$, wobei $d = \min\{[L : Kv_K]_{\text{poly}} \mid L/Kv_K \text{ ist Galoiserweiterung mit } L \neq Kv_K\}$ sei.

Auf einem Körper mit definierbarer nicht-trivialer henselscher Bewertung gibt es nicht notwendigerweise auch eine $\emptyset$-definierbare nicht-triviale henselsche Bewertung (siehe Bemerkung 6.12). Mithilfe der kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung erhalten wir aber zumindest die folgende Aussage.

Proposition 6.11. Sei $K \neq K^{\text{sep}}$ ein Körper mit nicht-trivialer henselscher Bewertung v. Ist der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ auf K definierbar in der Sprache $\mathcal{L}_{\text{ring}} = \{0, 1, +, \cdot\}$ der Ringe, so existiert ein $\emptyset$-definierbarer nicht-trivialer Bewertungsring $\mathcal{O}_w$ auf K mit $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}_v$, das heißt w induziert die eindeutige henselsche Topologie.

Aufbau der Arbeit

Zum Einstieg behandeln wir in Kapitel 1 einige mathematische Grundlagen, die im restlichen Teil der Arbeit Verwendung finden.

In Abschnitt 1.1 behandeln wir zunächst um inverse Systeme von Ringen und (topologischen) Gruppen, ehe wir davon ausgehend die sogenannten profiniten Gruppen einführen.

Da Hensels Lemma eine Aussage über die Existenz von Nullstellen gewisser Polynome ist, spielen auch Galoiserweiterungen naturgemäß eine wichtige Rolle. Über die Theorie endlicher Galoiserweiterungen hinaus benötigen wir dabei später auch die entsprechenden Werkzeuge zum Umgang mit unendlichen Galoiserweiterungen, welche Abschnitt 1.2 bereitstellt.

Kapitel 2 führt in die allgemeine Theorie der bewerteten Körper ein.

Neben der Definition des Begriffs stellen wir in Abschnitt 2.1 noch eine Reihe einfacher, aber dennoch wichtiger, allgemeiner Eigenschaften von Bewertungen vor.

Einer jeden Bewertung auf einem Körper K lässt sich auf natürliche Weise ein Unterring von K zuordnen. Dies führt zum Begriff des Bewertungsrings, der in Abschnitt 2.2 thematisiert wird. Wir zeigen, dass Bewertungsringe und (Äquivalenzklassen von) Bewertungen sich gegenseitig entsprechen und diskutieren einige wichtige Eigenschaften von Bewertungsringen.

Im Hinblick auf die eingangs bereits erwähnten Verallgemeinerungen des Theorems von F. K. Schmidt, sowie auf eine topologische Beschreibung der t-henselschen Bewertungen, stellen wir in Abschnitt 2.3 die von einem Bewertungsring induzierte Topologie kurz vor.

Im Kapitel 3 widmen wir uns den henselschen Bewertungen.

Der Abschnitt 3.1 enthält zwei wichtige Beispiele henselsch bewerteter Körper sowie eine Reihe äquivalenter Charakterisierungen henselscher Bewertungen.

Zu jedem bewerteten Körper gibt es eine kleinste henselsche Erweiterung, die sogenannte *Henselisierung*. Diese betrachten wir im Abschnitt 3.2. Wir geben außerdem ein Beispiel an, das später bei der Konstruktion eines $n_{\leq}$-henselschen Körpers, der für jede Primzahl $p > n$ nicht p-henselsch ist, von Bedeutung sein wird.

Schließlich gehen wir im Abschnitt 3.3 auf die Definition der kanonischen henselschen Bewertung ein, wobei die Beweise jedoch erst im Abschnitt 5.2 zur kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung mithilfe der Resultate dort geführt werden.

Kapitel 4 behandelt die in [Wad83] eingeführten p-henselschen Bewertungen und orientiert sich lose an [Koe95].

Zunächst stellen wir in Abschnitt 4.1 die Definition sowie einige äquivalente Charakterisierungen p-henselscher Bewertungen vor.

In Abschnitt 4.2 zeigen wir anschließend, dass jede p-henselsche Bewertung auf einem Körper K dieselbe Topologie induziert – vorausgesetzt, es gilt $K \neq K(p)$ und K enthält eine primitive p-te Einheitswurzel, falls nötig.

Im Kapitel 5 widmen wir uns den $n_{\leq}$-henselschen Bewertungen, die in der Literatur bisher kaum untersucht worden sind.

Wie zuvor, für henselsche bzw. p-henselsche Bewertungen, behandelt Abschnitt 5.1 allgemeine Grundlagen zu $n_{\leq}$-henselschen Bewertungen. Die Charakterisierungen aus den Abschnitten 3.1 und 4.1 lassen sich jedoch nicht ohne Weiteres auf den Fall $n_{\leq}$-henselscher Bewertungen übertragen. Um entsprechende, aber etwas schwächere, Aussagen zu erhalten, führen wir den Begriff des *Polynom-Grads* einer (endlichen) Galoiserweiterung L/K ein – den kleinsten Grad eines irreduziblen Polynoms über K, dessen Zerfällungskörper gerade L ist. Außerdem beweisen wir das Analogon der Verallgemeinerung des Theorems von F. K. Schmidt für $n_{\leq}$-henselsche Bewertungen und übertragen weitere Aussagen vom henselschen bzw. p-henselschen Fall, mit kleineren Einschränkungen, auf den $n_{\leq}$-henselschen.

Die kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung, die sich mithilfe der vorherigen Resultate definieren lässt, und ihre wichtigsten Eigenschaften sind Inhalt des Abschnitts 5.2.

Kapitel 6 zeigt Anwendungen der Theorie $n_{\leq}$-henselscher Bewertungen auf.

Im Abschnitt 6.1 führen wir die (separabel) prim-henselschen Bewertungen ein und setzen diese mit $n_{\leq}$-henselschen und p-henselschen Bewertungen in Beziehung, was letztlich zu dem in der Einleitung bereits angegebenen Diagramm führt.

Schließlich befassen wir uns im Abschnitt 6.2 mit der Modelltheorie henselscher Körper und nehmen dazu auch t-henselsche Bewertungen in den Vergleich der verschiedenen Varianten des Begriffs henselscher Bewertungen mit auf.

In Kapitel 7 fassen wir die Ergebnisse des vorangegangen Kapitels zusammen und diskutieren abschließend kurz einige offene Fragen, die sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben.

Notation und Konventionen

Um die Notation möglichst unkompliziert zu halten, schreiben wir $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ für die Menge der positiven ganzen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ für die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. Zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten verzichten wir auf die Verwendung des Begriffs der "natürlichen Zahlen". Wir schreiben $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ für die Menge der Primzahlen.

Die Mächtigkeit einer Menge M notieren wir mit $\#M$ und schreiben $\#M = \infty$, falls M unendlich ist.[1]

Eine *partielle Ordnung auf M* ist eine zweistellige Relation $\leq$ auf M, die reflexiv (d.h. es gilt $\forall x \in M : x \leq x$), transitiv (d.h. es gilt $\forall x, y, z \in M : x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$) und anti-symmetrisch (d.h. es gilt $\forall x, y \in M : x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$) ist. Statt $x \leq y$ schreiben wir, der Einfachheit halber, manchmal auch $y \geq x$.

Eine *lineare Ordnung auf M* ist eine partielle Ordnung auf M, die zusätzlich total ist (d.h. es gilt $\forall x, y \in M : x \leq y \vee y \leq x$). Ist $\leq$ eine partielle (bzw. lineare) Ordnung auf M, so nennen wir das Tupel $(M, \leq)$ auch eine *partiell (bzw. linear) geordnete Menge*.

Sprechen wir von einem *Ring*, so ist stets ein kommutativer Ring mit multiplikativem Neutralelement gemeint. Die Operationen auf einem Ring R bezeichnen wir mit $+$ und $\cdot$, die Neutralelemente mit 0 und 1. Um Unklarheiten vorzubeugen schreiben wir gelegentlich auch 0_R und 1_R für die Neutralelemente.

Weiter bezeichne $\mathrm{Quot}\,(R) = \left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in R, y \neq 0\right\}$ den *Quotientenkörper von R*. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ heißt der Unterring $R_{\mathfrak{p}} = \left\{xy^{-1} \in \mathrm{Quot}\,(R) \mid x \in R, y \in R \setminus \mathfrak{p}\right\}$ des Quotientenkörpers die *Lokalisierung von R an $\mathfrak{p}$*. Offensichtlich gilt $R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Quot}\,(R)$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} = (0)$ das triviale Ideal ist.

Ist K ein Körper, so bezeichne K^{alg} einen (für jedes K einmalig) fest gewählten algebraischen Abschluss von K und $K^{\mathrm{sep}} := \left\{x \in K^{\mathrm{alg}} \mid x \text{ ist separabel über } K\right\}$ den *separablen Abschluss von K in K^{alg}*.

Die Gruppe der Automorphismen eines Körpers K notieren wir als $\mathrm{Aut}(K)$ und für eine Körpererweiterung L/K sei $\mathrm{Aut}(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L) \mid \sigma{\restriction}K = \mathrm{id}_K\}$ die Gruppe der *K-Automorphismen von L*. Ist L/K sogar eine Galoiserweiterung, das heißt algebraisch, separabel und normal, so heißt $\mathrm{Aut}(L/K)$ die *Galoisgruppe der Erweiterung L/K*, für die wir dann auch $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Aut}(L/K)$ schreiben.

[1] Die Unterscheidung der verschiedenen unendlichen Kardinalitäten ist an keiner Stelle der vorliegenden Arbeit notwendig.

Danksagung

Mein Dank geht zuallererst an Franziska Jahnke, deren wertvolle Betreuung und Unterstützung vor und während der Entstehung der vorliegenden Arbeit von großer Bedeutung war.

Zum Abschluss meines Studiums an der Universität Münster möchte ich außerdem den Dozentinnen und Dozenten, insbesondere am Institut für mathematische Logik, danken, an deren Vorlesungen und Seminaren ich mit Freude teilnehmen konnte und die mein Interesse an der mathematischen Logik und der Modelltheorie geweckt haben.

Weiterhin danke ich Martin Hils für seine hilfreichen Anmerkungen zu einer frühen Version der vorliegenden Arbeit.

Dank gebührt auch Thomas Kubo und Julia Norget, die ohne inhaltliches Verständnis bereit waren, Teile dieser Arbeit sorgfältig nach sprachlichen Fehlern zu durchsuchen.

Schließlich bin ich meinem Bruder und meinen Eltern dankbar, auf die ich mich stets hundertprozentig verlassen kann. Meinem Bruder Lukas danke ich außerdem für Druck und Bindung der vorliegenden Arbeit.

1 Allgemeine Grundlagen

Vorausgesetzt seien grundlegende algebraische Kenntnisse sowie ein gewisses Verständnis elementarer Grundlagen der Topologie. Eine Vertrautheit im Umgang mit Galoistheorie ist hilfreich, jedoch nicht unerlässlich – die notwendigen Resultate stellen wir (ohne Beweise) später in diesem Kapitel vor.

Im Abschnitt 6.2 verwenden wir auch modelltheoretisches Vokabular, das allerdings kaum über den Begriff der Definierbarkeit hinaus geht. Bis auf wenige Absätze ist die vorliegende Arbeit auch ohne Kenntnisse der Modelltheorie verständlich; wir verweisen daher für einen Hintergrund in Modelltheorie an dieser Stelle auf die Einführung in [TZ12].

Wir halten nun einige wichtige allgemeine Grundbegriffe fest, die im Laufe der weiteren Kapitel dieser Arbeit Verwendung finden. Den Anfang macht der Begriff einer angeordneten abelschen Gruppe.

Definition 1.1. (1) Eine *angeordnete abelsche Gruppe* ist eine abelsche Gruppe $(G,+)$ mit einer linearen Ordnung $\leq$ der Elemente von G, sodass die Eigenschaft

$$x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z$$

für alle $x,y,z \in G$ erfüllt ist.

Wir sagen dann auch, die Ordnung $\leq$ ist mit der Gruppenoperation $+$ *verträglich.*

(2) Sind $(G,+,\leq)$ und $(H,+,\preceq)$ zwei angeordnete abelsche Gruppen, so heißt ein Gruppenhomomorphismus (bzw. -isomorphismus) $\varphi : G \to H$ auch ein *Homomorphismus (bzw. Isomorphismus) von angeordneten abelschen Gruppen*, falls

$$g \leq h \Longleftrightarrow \varphi(g) \preceq \varphi(h)$$

für alle $g,h \in G$ gilt.

In den beiden folgenden Abschnitten 1.1 zu profiniten Gruppen und 1.2 zu unendlicher Galoistheorie spielen topologische Gruppen eine wichtige Rolle. Im weiteren Verlauf der Arbeit, konkret im Kapitel 6.2 zu t-henselschen Bewertungen, benötigen wir außerdem den Begriff des topologischen Körpers.

Definition 1.2. (1) Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe $(G,\cdot)$ mit einer hausdorffschen Topologie, bezüglich der die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto g \cdot h \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \iota : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

stetig sind.

(2) Ein *topologischer Körper* ist ein Körper K mit einer Topologie $\mathcal{T}$, bezüglich der sowohl $(K,+)$ als auch $(K^\times,\cdot)$ (mit der Unterraumtopologie) topologische Gruppen sind. Wir nennen $\mathcal{T}$ dann auch eine *Körper-Topologie auf* K.

1.1 Inverse Systeme und profinite Gruppen

Den Begriff des inversen Limes bzw. eines inversen Systems benötigen wir hauptsächlich zur gleich darauf folgenden Definition und Beschreibung profiniter Gruppen. Jedoch verwenden wir an einer Stelle, nämlich in der Konstruktion zu Proposition 6.18 im Kapitel 6.2, auch einen inversen Limes von Bewertungsringen. Wir formulieren die folgenden Definitionen daher parallel für Ringe und topologische Gruppen.

Dabei orientieren wir uns zunächst an der Darstellung in [FJ86, Chapter 1]. Eine umfassendere Behandlung profiniter Gruppen, die weit über die hier benötigten elementaren Resultate hinaus geht, findet sich in [RZ10].

Definition 1.3. Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt *gerichtet*, falls für je zwei Elemente $i, j \in I$ stets ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$ existiert.

Definition 1.4. Ein *inverses System* besteht aus einer partiell geordneten gerichteten Indexmenge $(I, \leq)$ und einer durch I indizierten Familie $\bar{X} = (X_i)_{i \in I}$ von Mengen X_i sowie einer Familie $\bar{\pi} = (\pi_{i,j})_{i>j}$ von Abbildungen $\pi_{i,j} : X_i \to X_j$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\pi_{i,j}"] \arrow[dr, "\pi_{i,k}"'] & X_j \arrow[d, "\pi_{j,k}"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

für alle $i, j, k \in I$ mit $i > j > k$ kommutieren, das heißt sodass $\pi_{i,k} = \pi_{j,k} \circ \pi_{i,j}$ für alle $i, j, k \in I$ mit $i > j > k$ gilt.

Wir notieren das inverse System bestehend aus I, $\bar{X}$ und $\bar{\pi}$ auch kurz mit $(I, X_i, \pi_{i,j})$ und sprechen von einem inversen System über der Indexmenge I.

Sind die Mengen X_i, für alle $i \in I$, Ringe bzw. topologische Gruppen und sind die Abbildungen $\pi_{i,j}$ für alle $i, j \in I$ mit $i > j$ (stetige) Homomorphismen, so sprechen wir von einem *inversen System von Ringen bzw. topologischen Gruppen.*

Definition 1.5. Der *inverse Limes eines inversen Systems* $(I, X_i, \pi_{i,j})$ ist die Menge

$$\varprojlim_{i \in I} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid \pi_{i,j}(x_i) = x_j \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } i > j\} \subseteq \prod_{i \in I} X_i$$

zusammen mit den kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$ für jedes $i \in I$.

Aus dieser Definition des inversen Limes als Teilmenge des kartesischen Produkts wird sofort klar, dass der inverse Limes (eines inversen Systems) von Ringen bzw. topologischen Gruppen selbst wieder ein Ring bzw. eine topologische Gruppe ist. Die jeweiligen Verknüpfungen ergeben sich dabei als Einschränkungen der offensichtlichen Verknüpfungen auf dem kartesischen Produkt auf den inversen Limes. Die kanonischen Projektionen sind dann außerdem (stetige) Homomorphismen von Ringen bzw. Gruppen.

Diese Beobachtung führt zur folgenden Definition.

Definition 1.6. Eine *profinite Gruppe* ist eine topologische Gruppe G, die homöomorph ist zum inversen Limes $\varprojlim_{i \in I} G_i$ eines inversen Systems $(I, G_i, \pi_{i,j})$ endlicher Gruppen (aufgefasst als topologische Gruppen mit der diskreten Topologie).

Können die Gruppen G_i dabei sogar für alle $i \in I$ als auflösbar (bzw. nilpotent bzw. p-Gruppen[2]) gewählt werden, so heißt G *pro-auflösbar (bzw. pro-nilpotent bzw. pro-p).*

Offensichtlich ist jede endliche Gruppe G insbesondere profinit, denn wir können etwa $I = \{0\}$ und $G_0 = G$ wählen und erhalten dann $\varprojlim_{i \in I} G_i = G$.

Eine erste wichtige Eigenschaft profiniter Gruppen ist die folgende Beobachtung.

Lemma 1.7. *Jede profinite Gruppe ist als topologische Gruppe kompakt.*

Beweis. Siehe [FJ86, Lemma 1.2]. □

Insbesondere hat jede offene Untergruppe $U \leq G$ einer profiniten Gruppe G daher endlichen Index in G, denn die Menge der Nebenklassen ist eine Partition von G in offene Teilmengen. Da jede Untergruppe $U \leq G$ sich außerdem als Komplement der Vereinigung aller von U verschiedenen Nebenklassen schreiben lässt, ist jede offene Untergruppe einer profiniten Gruppen auch abgeschlossen.

Viele Aussagen über endliche Gruppen lassen sich auf profinite Gruppen übertragen, wenn man von den vorkommenden Untergruppen zusätzlich fordert, dass sie abgeschlossen sind. Etwa gilt die folgende Aussage.

Lemma 1.8. *Ist G eine profinite Gruppe und $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so ist auch H profinit. Ist G sogar pro-auflösbar (bzw. pro-nilpotent bzw. pro-p), so ist auch H pro-auflösbar (bzw. pro-nilpotent bzw. pro-p).*

Beweis. Siehe [RZ10, Proposition 2.2.1]. □

Ein weiteres wichtiges Beispiel von Aussagen über endliche Gruppen, die sich auf profinite Gruppen übertragen lassen, sind die Sylow-Sätze. Bevor wir diese formulieren können, müssen wir noch den Begriff der Sylow-Gruppen einführen.

Definition 1.9. Sei G eine profinite Gruppe und $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl.

(1) Eine abgeschlossene Untergruppe $H \leq G$ heißt *pro-p-Untergruppe* von G, falls H eine pro-p-Gruppe ist.

(2) Eine *p-Sylow-Gruppe von G* ist eine maximale pro-p-Untergruppe von G, das heißt eine pro-p-Untergruppe $S \leq G$, die für jede pro-p-Untergruppe $H \leq G$ mit $S \leq H$, bereits $H = S$ erfüllt.

[2] Eine *endliche p-Gruppe* ist eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist.

Theorem 1.10 (Sylow-Sätze für profinite Gruppen). *Sei G eine profinite Gruppe und $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Dann gilt:*

(1) Es gibt (mindestens) eine p-Sylow-Gruppe $S \leq G$.

(2) Für jede pro-p-Untergruppe $H \leq G$ existiert eine p-Sylow-Gruppe $S \leq G$, die H enthält.

(3) Für je zwei p-Sylow-Gruppen $S_1, S_2 \leq G$ gibt es ein $g \in G$ mit $S_1 = gS_2g^{-1}$.

Beweis. Siehe [RZ10, Corollary 2.3.6]. □

1.2 Unendliche Galoistheorie

Unendliche profinite Gruppen kommen natürlicherweise als Galoisgruppen unendlicher Körpererweiterungen vor. Tatsächlich ist eine Gruppe genau dann profinit, wenn sie isomorph zur Automorphismengruppe einer Körpererweiterung ist. Für unsere Zwecke ist vor allem wichtig, dass die absolute Galoisgruppe eines Körpers stets profinit ist.

Definition 1.11. Die *absolute Galoisgruppe G_K* von K ist die Galoisgruppe der Erweiterung K^{sep}/K, das heißt

$$G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K^{\mathrm{sep}}) \mid \sigma{\restriction}K = \mathrm{id}_K\}.$$

Ist $(K_i)_{i\in I}$ die Familie aller endlichen Galoiserweiterungen von K, die in K^{sep} enthalten sind, so wird I mit der durch $i \leq j :\Leftrightarrow K_i \subseteq K_j$ definierten Relation $\leq$ zu einer gerichteten partiellen Ordnung und $(I, \mathrm{Gal}(K_i/K), \pi_{i,j})$ mit $\pi_{i,j} : \sigma \mapsto \sigma{\restriction}K_j$ für $i > j$ zu einem inversen System von topologischen Gruppen.

Da die Körpererweiterung $K(\alpha)/K$ für jedes $\alpha \in K^{\mathrm{sep}}$ eine endliche Galoiserweiterung von K ist, ist K^{sep} das Kompositum aller endlichen Galoiserweiterungen K_i/K, für die $K_i \subseteq K^{\mathrm{sep}}$ gilt. Wir erhalten daher die folgende Aussage.

Theorem 1.12. *Die absolute Galoisgruppe G_K von K ist eine profinite Gruppe und es gilt*[3]

$$G_K \cong \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Gal}(K_i/K)$$

für das oben beschriebene inverse System $(I, \mathrm{Gal}(K_i/K), \pi_{i,j})$ aller endlichen Galoisgruppen über K.

Beweis. Siehe [RZ10, Theorem 2.11.1]. □

[3] Hier bezeichne $\cong$ die Isomorphie als topologische Gruppen, das heißt die Existenz eines Gruppenisomorphismus, der zugleich ein Homöomorphismus ist.

Die Galoiskorrespondenz als zentrales Resultat der (endlichen) Galoistheorie ist ein weiteres Beispiel für eine Aussage über endliche Gruppen, die sich auf profinite Gruppen verallgemeinern lässt.

Theorem 1.13 (Galoiskorrespondenz unendlicher Galoiserweiterungen)**.** *Betrachte die Menge* $\mathcal{G}(K) = \{F \subseteq K^{\mathrm{sep}} \mid F/K \text{ ist eine Körpererweiterung}\}$ *aller Zwischenkörper der Erweiterung* K^{sep}/K *und die Menge* $\mathcal{S}(G_K) = \{H \leq G_K \mid H \text{ ist abgeschlossen in } G_K\}$ *aller abgeschlossenen Untergruppen der absoluten Galoisgruppe* G_K.

Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(K) &\to \mathcal{S}(G_K) \\ F &\mapsto \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/F) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K^{\mathrm{sep}}) \mid \sigma{\restriction}F = \mathrm{id}_F\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(G_K) &\to \mathcal{G}(K) \\ H &\mapsto \mathrm{Fix}(H) = \{x \in K^{\mathrm{sep}} \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in H\} \end{aligned}$$

zueinander inverse Bijektionen und es gilt $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow \mathrm{Gal}(F_1/K) \supseteq \mathrm{Gal}(F_2/K)$ *sowie* $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \mathrm{Fix}(H_1) \supseteq \mathrm{Fix}(H_2)$ *für alle* $F_1, F_2 \in \mathcal{G}(K)$ *und alle* $H_1, H_2 \in \mathcal{S}(G_K)$.

Ist $F = \mathrm{Fix}(H)$ *und* $H = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/F)$, *so ist die Körpererweiterung* F/K *genau dann normal (und damit eine Galoiserweiterung*[4]*), wenn* $H \leq G_K$ *ein Normalteiler in* G_K *ist.*

Beweis. Siehe [RZ10, Theorem 2.11.3]. □

Dass jede Galoisgruppe profinit ist, folgt nun aus Theorem 1.13 und Lemma 1.8. Das nächste Theorem komplettiert damit die am Anfang dieses Kapitels erwähnte Charakterisierung profiniter Gruppen als Automorphismengruppen von Galoiserweiterungen.

Theorem 1.14. *Ist* G *eine profinite Gruppe, so existiert ein Körper* K *und eine Galoiserweiterung* L/K, *sodass* $G \cong \mathrm{Gal}(L/K)$ *gilt.*[5]

Beweis. Siehe [RZ10, Theorem 2.11.5]. □

[4] Jede Körpererweiterung F/K mit $F \subseteq K^{\mathrm{sep}}$ ist algebraisch und separabel, da K^{sep}/K es ist.
[5] Auch hier ist die Isomorphie von G und $\mathrm{Gal}(L/K)$ als topologische Gruppen gemeint.

2 Bewertete Körper

2.1 Grundlagen

Ein zentraler Begriff der vorliegenden Arbeit ist der des bewerteten Körpers, eine Verallgemeinerung von Körpern mit Absolutbetrag bzw. Metrik. So lässt sich eine Bewertung ebenfalls als ein Maß für die "Größe" von Körperelementen vorstellen – wobei die Bewertung eines Elements umso größer ist, je näher das Element der 0 ist.

Definition 2.1. Sei K ein beliebiger Körper. Eine *Bewertung* auf K ist eine surjektive Abbildung $v : K \to vK \cup \{\infty\}$ für eine angeordnete abelsche Gruppe $(vK, +)$, sodass die drei Eigenschaften

$$v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0 \tag{1}$$
$$v(x \cdot y) = v(x) + v(y) \tag{2}$$
$$v(x + y) \geq \min \{v(x), v(y)\} \tag{3}$$

für alle $x, y \in K$ erfüllt sind. Dabei setzen wir $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty$ und $\min \{\gamma, \infty\} = \gamma$ für alle $\gamma \in vK \cup \{\infty\}$.

Wir nennen die Gruppe vK auch *(die zu v gehörige) Wertegruppe*. Ist $vK = \{0\}$, so heißt die Bewertung v *trivial*.

Einen Körper K mit einer Bewertung v nennen wir auch einen *bewerteten Körper* und schreiben dafür kurz (K, v).

Für jede Bewertung v auf einem beliebigen Körper K gilt $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$, also $v(1) = 0$. Weiter ist $v(x^{-1}) + v(x) = v(x^{-1} \cdot x) = v(1) = 0$, also $v(x^{-1}) = -v(x)$ für alle $x \in K^\times$. Insbesondere gilt $v(-1) = -v(-1)$ und damit $v(-1) = 0$: Wäre $v(-1) > 0$, so wäre auch $v(-1) + v(-1) > v(-1) > 0$, analog für $v(-1) < 0$.

Es folgt $v(-x) = v((-1) \cdot x) = v(-1) + v(x) = v(x)$ für alle $x \in K$. Außerdem ist $v(a) = v(|a|) = v(1 + \cdots + 1) \geq v(1) = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$, wobei wir a mit seinem Bild unter dem eindeutigen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to K$ identifizieren.

Da wir von diesen fundamentalen Eigenschaften im folgenden Teil der Arbeit oft stillschweigend Gebrauch machen, fassen wir sie in der folgenden Bemerkung noch einmal zusammen – und ergänzen eine weitere nützliche technische Eigenschaft.

Bemerkung 2.2. Ist (K, v) ein bewerteter Körper, so gelten folgende (Un-)Gleichungen.

$$v(1) = v(-1) = 0 \tag{4}$$
$$v(x^{-1}) = -v(x) \text{ für alle } x \in K^\times \tag{5}$$
$$v(-x) = v(x) \text{ für alle } x \in K \tag{6}$$
$$v(a) \geq 0 \text{ für alle } a \in \mathrm{im}(\mathbb{Z} \to K) \tag{7}$$
$$v(x + y) = \min \{v(x), v(y)\}, \text{ falls } v(x) \neq v(y) \tag{8}$$

Beweis. Die Eigenschaften (4) bis (7) haben wir bereits behandelt. Um die Eigenschaft (8) zu beweisen, seien $x, y \in K$ mit $v(x) \neq v(y)$ gegeben. Ohne Einschränkung gelte $v(x) < v(y)$. Wäre dann $v(x+y) = v(y) > v(x)$, so erhielten wir mit

$$v(x) = v(x+y-y) \geq \min\{v(x+y), v(y)\} > v(x)$$

einen Widerspruch. Es gilt dann also $v(x+y) = v(x) = \min\{v(x), v(y)\}$. $\square$

2.2 Bewertungsringe

In der Formulierung der obigen Definition ist der Begriff der Bewertung für unsere Zwecke noch etwas zu eingrenzend. Verschiedene Bewertungen sollen als im Wesentlichen gleich verstanden werden, falls es einen Isomorphismus (von angeordneten abelschen Gruppen) der Wertegruppen gibt, der die Bewertungen sozusagen ineinander "übersetzt". Präzisiert wird diese Anschauung in der folgenden Definition.

Definition und Bemerkung 2.3. Zwei Bewertungen v und w auf einem Körper K heißen *äquivalent*, falls ein Isomorphismus $\varphi : vK \to wK$ (von angeordneten abelschen Gruppen) zwischen den Wertegruppen vK und wK existiert, sodass $w{\restriction}K^\times = \varphi \circ (v{\restriction}K^\times)$ gilt.

Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Bewertungen auf einem Körper K definiert.

Für das Studium von Bewertungen bis auf Äquivalenz stellt sich der folgende algebraische Begriff des Bewertungsrings als geeignet heraus. Tatsächlich entsprechen Bewertungsringe und Äquivalenzklassen von Bewertungen auf einem Körper sich gegenseitig, wie wir nach Einführung der Begrifflichkeiten zeigen.

Definition 2.4. Ein *Bewertungsring* auf einem Körper K ist ein Unterring $(\mathcal{O}, +, \cdot)$ von $(K, +, \cdot)$ mit $\mathcal{O} \cup (\mathcal{O} \setminus \{0\})^{-1} = K$, das heißt ein Unterring, in dem für alle $x \in K$ die Eigenschaft $x \in \mathcal{O} \vee x^{-1} \in \mathcal{O}$ gilt.

Bemerkung 2.5. Ist $\mathcal{O} \subseteq K$ ein Bewertungsring auf K, so gilt bereits $K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$, denn für $x \in K$ mit $x \notin \mathcal{O}$ gilt wegen $x^{-1} \in \mathcal{O}$ schon $x = \frac{1}{x^{-1}} \in \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$.

Wie zuvor angekündigt, geben wir nun eine (kanonische) Eins-zu-Eins-Zuordnung von Bewertungsringen und Äquivalenzklassen von Bewertungen auf einem Körper an. Wir beginnen mit der einfachen Beobachtung, dass jede Bewertung auf einem Körper ein Beispiel für einen Bewertungsring liefert.

Bemerkung und Definition 2.6. Ist (K, v) ein bewerteter Körper und $0 \in vK$ das Neutralelement der Wertegruppe, so ist die Menge $\mathcal{O}_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ ein Bewertungsring auf K.

Wir nennen $\mathcal{O}_v$ dann auch den *zu v gehörigen Bewertungsring*.

Beweis. Wegen $v(xy) = v(x) + v(y)$ und $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ ist $\mathcal{O}_v$ unter der Multiplikation und der Addition auf K abgeschlossen. Aus $v(0_K) = \infty$ und $v(1_K) = 0$ folgt auch $0_K, 1_K \in \mathcal{O}_v$.

Ist nun $x \in K \setminus \mathcal{O}_v$, so gilt $v(x) < 0$, also $v(x^{-1}) = -v(x) > 0$. Es folgt $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$, das heißt $\mathcal{O}_v$ ist ein Bewertungsring auf K. □

Bemerkung und Definition 2.7. Eine Bewertung v auf einem Körper K ist genau dann trivial (das heißt, es ist $vK = \{0\}$), wenn $\mathcal{O}_v = K$ gilt.

Wir nennen den Bewertungsring $\mathcal{O} = K$ daher auch den *trivialen Bewertungsring auf* K.

Um andererseits aus einem Bewertungsring $\mathcal{O}$ eine Bewertung zu gewinnen, müssen wir ein wenig mehr Aufwand betreiben. Insbesondere ist dazu aus dem Bewertungsring eine angeordnete abelsche Gruppe zu konstruieren.

Proposition 2.8. *Sei K ein Körper und $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K.*

Dann ist $(K^\times/\mathcal{O}^\times, \cdot)$ mit der durch $x\mathcal{O}^\times \leq y\mathcal{O}^\times \Leftrightarrow yx^{-1} \in \mathcal{O}$ definierten Relation $\leq$ eine angeordnete abelsche Gruppe und die Fortsetzung $\pi_\mathcal{O} : K \to K^\times/\mathcal{O}^\times \cup \{\infty\}$ der Restklassenprojektion $K^\times \to K^\times/\mathcal{O}^\times$ mit $\pi_\mathcal{O}(0_K) = \infty$ ist eine Bewertung auf K.

Beweis. Offensichtlich ist $K^\times/\mathcal{O}^\times$ eine abelsche Gruppe. Für $x' \in x\mathcal{O}^\times$ und $y' \in y\mathcal{O}^\times$ gilt $y'x'^{-1} \in \mathcal{O}$ genau dann, wenn $yx^{-1} = yy'^{-1}(y'x'^{-1})x'x^{-1} \in \mathcal{O}$ ist, also ist die Relation $\leq$ wohldefiniert. Reflexivität folgt sofort aus $1_K \in \mathcal{O}$ und Transitivität folgt, da $\mathcal{O}$ multiplikativ abgeschlossen ist: Gilt nämlich $x\mathcal{O}^\times \leq y\mathcal{O}^\times$ und $y\mathcal{O}^\times \leq z\mathcal{O}^\times$, so ist $zx^{-1} = (zy^{-1})(yx^{-1}) \in \mathcal{O}$, also $x\mathcal{O}^\times \leq z\mathcal{O}^\times$. Anti-Symmetrie folgt unmittelbar aus der Definition von $\leq$.

Sind $x, y \in K^\times$ mit $yx^{-1} \notin \mathcal{O}$, so gilt $xy^{-1} = (yx^{-1})^{-1} \in \mathcal{O}$, da $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K ist. Je zwei Elemente von $K^\times/\mathcal{O}^\times$ sind daher vergleichbar bezüglich $\leq$, es handelt sich also um eine lineare Ordnung auf $K^\times/\mathcal{O}^\times$.

Für $x, y \in K^\times$ mit $x\mathcal{O}^\times \geq y\mathcal{O}^\times$ und beliebiges $z \in K^\times$ gilt nun mit der Gleichung $(xz)(yz)^{-1} = xzz^{-1}y^{-1} = xy^{-1} \in \mathcal{O}$ nach Definition auch

$$x\mathcal{O}^\times \cdot z\mathcal{O}^\times = xz\mathcal{O}^\times \geq yz\mathcal{O}^\times = y\mathcal{O}^\times \cdot z\mathcal{O}^\times,$$

das heißt $\leq$ ist mit der Gruppenverknüpfung auf $K^\times/\mathcal{O}^\times$ verträglich.

Zu zeigen bleibt, dass die Abbildung $\pi_\mathcal{O} : K \to K^\times/\mathcal{O}^\times \cup \{\infty\}$ tatsächlich eine Bewertung ist. Die Eigenschaft $\pi_\mathcal{O}(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$ für alle $x \in K$ folgt dabei sofort aus der Definition von $\pi_\mathcal{O}$.

Seien nun $x, y \in K$ beliebig. Im Fall $x \cdot y = 0$ ist die Eigenschaft $\pi_\mathcal{O}(x \cdot y) = \infty = \pi_\mathcal{O}(x) + \pi_\mathcal{O}(y)$ klar. Andernfalls gilt sie wegen

$$\pi_\mathcal{O}(x \cdot y) = xy\mathcal{O}^\times = (x\mathcal{O}^\times \cdot y\mathcal{O}^\times) = \pi_\mathcal{O}(x) + \pi_\mathcal{O}(y)$$

ebenso.

Zuletzt seien $x, y \in K$ mit $x\mathcal{O}^\times \leq y\mathcal{O}^\times$, das heißt $yx^{-1} \in \mathcal{O}$, gegeben. Dann gilt $(x+y)x^{-1} = 1 + yx^{-1} \in \mathcal{O}$, also

$$\pi_{\mathcal{O}}(x+y) = (x+y)\mathcal{O}^\times \geq x\mathcal{O}^\times = \min\left\{x\mathcal{O}^\times, y\mathcal{O}^\times\right\} = \min\left\{\pi_{\mathcal{O}}(x), \pi_{\mathcal{O}}(y)\right\}.$$

Insgesamt ist $\pi_{\mathcal{O}}$ damit, wie behauptet, eine Bewertung auf K. □

Der Bewertungsring $\mathcal{O}_w$ der Bewertung $w = \pi_{\mathcal{O}}$ auf K stimmt dabei mit $\mathcal{O}$ überein, denn es gilt $x\mathcal{O}^\times \geq \mathcal{O}^\times$ genau dann, wenn $x = x \cdot 1^{-1} \in \mathcal{O}$ erfüllt ist. Das bedeutet insbesondere, dass die Abbildung $\mathcal{O} \mapsto \pi_{\mathcal{O}}$ aus Proposition 2.8, die einem Bewertungsring auf K eine Bewertung auf K zuordnet, injektiv und die Zuordnung $v \mapsto \mathcal{O}_v$ in die andere Richtung surjektiv ist.

Sind v und w zwei äquivalente Bewertungen auf K, so gilt mit Definition 2.3 offensichtlich $v(x) \geq 0 \Leftrightarrow w(x) \geq 0$ für alle $x \in K$. Damit stimmen die Bewertungsringe $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ dann bereits überein.

Dass auch die Umkehrung gilt, zeigt die folgende Proposition.

Proposition 2.9. *Sei (K, v) ein bewerteter Körper und $\mathcal{O}_v$ der zugehörige Bewertungsring. Weiter sei $\pi_{\mathcal{O}_v}$ so definiert, wie in Proposition 2.8.*

Dann gibt es genau einen (kanonischen) Isomorphismus $\varphi : K^\times/{\mathcal{O}_v}^\times \to vK$ (von angeordneten abelschen Gruppen) mit $v{\restriction}K^\times = \varphi \circ (\pi_{\mathcal{O}_v}{\restriction}K^\times)$. Insbesondere sind v und $\pi_{\mathcal{O}_v}$ äquivalente Bewertungen.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass die Eigenschaft $v \restriction K^\times = \varphi \circ (\pi_{\mathcal{O}_v} \restriction K^\times)$ die Abbildung φ eindeutig festlegt, da $\pi_{\mathcal{O}_v}{\restriction}K^\times : K^\times \to K^\times/\mathcal{O}^\times$ surjektiv ist.

Wir betrachten nun den Kern des Gruppenhomomorphismus $v{\restriction}K^\times : K^\times \to vK$ und ein beliebiges Element $x \in K^\times$. Wegen $v(x^{-1}) = -v(x)$ gilt $v(x) = 0 \in vK$ genau dann, wenn sowohl $v(x) \geq 0$ als auch $v(x^{-1}) \geq 0$ erfüllt sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x \in \mathcal{O}_v^\times$ gilt. Folglich ist $\ker(v \restriction K^\times) = \{x \in K^\times \mid v(x) = 0\} = \mathcal{O}_v^\times$. Da $v \restriction K^\times$ surjektiv ist, liefert der Homomorphiesatz nun den gewünschten Isomorphismus φ. Dass $v \restriction K^\times = \varphi \circ (\pi_{\mathcal{O}_v} \restriction K^\times)$ erfüllt ist, folgt sofort aus der Definition von $\pi_{\mathcal{O}_v} \restriction K^\times$ als Restklassenprojektion.

Weiter gilt $v(x) \leq v(y)$ für $x, y \in K^\times$ genau dann, wenn $v(yx^{-1}) \geq 0$ bzw. $yx^{-1} \in \mathcal{O}_v$ erfüllt ist. Dies ist nach Definition äquivalent zu $x\mathcal{O}_v^\times \leq y\mathcal{O}_v^\times$. Da die Einschränkungen von v und $\pi_{\mathcal{O}_v}$ auf $K^\times$ beide surjektiv sind, ist φ damit auch ein Isomorphismus von angeordneten abelschen Gruppen. □

Die Essenz der bisherigen Diskussion von Bewertungsringen und ihrem Zusammenhang mit Bewertungen fasst die folgende Proposition zusammen. Den Beweis haben wir im Wesentlichen bereits geführt.

Proposition 2.10. *Die Zuordnungen $v \mapsto \mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O} \mapsto \pi_{\mathcal{O}}$ induzieren zueinander inverse Abbildungen zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Bewertungen auf K und der Menge der Bewertungsringe auf K.*

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Proposition 2.8 und Proposition 2.9. □

Sprechen wir im Folgenden von "Bewertungsringen $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w, \mathcal{O}_u, \ldots$", so sind damit – der in diesem Abschnitt eingeführten Notation und der Aussage aus Proposition 2.10 folgend – stillschweigend stets "zu entsprechenden Bewertungen $v, w, u, \ldots$ gehörige Bewertungsringe" gemeint. Die Wahl eines Repräsentanten aus der jeweiligen Äquivalenzklasse von Bewertungen kann dabei beliebig erfolgen. Ein kanonischer Repräsentant ist die in Proposition 2.8 eingeführte Bewertung.

Wir sammeln nun noch einige wichtige Eigenschaften von Bewertungsringen, auf die wir in den folgenden Kapiteln zurückgreifen werden.

Bemerkung 2.11. Ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K und R ein beliebiger Unterring von K mit $\mathcal{O} \subseteq R$, so ist R ebenfalls ein Bewertungsring: Für $x \in K \setminus R$ gilt insbesondere $x \notin \mathcal{O}$, also $x^{-1} \in \mathcal{O} \subseteq R$.

Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ zwei Bewertungsringe auf demselben Körper K, so ist daher auch $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 = \{\sum_{i=0}^n x_i \cdot y_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathcal{O}_1, y_i \in \mathcal{O}_2\}$ – der kleinste Ring, der sowohl $\mathcal{O}_1$ als auch $\mathcal{O}_2$ enthält – ein Bewertungsring auf K.[6]

Bemerkung und Definition 2.12. Für einen Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ auf einem Körper K ist die Menge $\mathfrak{m}_v := \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ das einzige maximale Ideal in $\mathcal{O}_v$. Den zugehörigen Restklassenkörper $\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ bezeichnen wir mit Kv.

Beweis. Mit $\mathcal{O}_v^\times = \left\{x \in \mathcal{O}_v \mid x^{-1} \in \mathcal{O}_v\right\} = \{x \in K^\times \mid v(x) = 0\}$ erhalten wir sofort die Identität $\mathfrak{m}_v := \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$.

Für $x, y \in \mathfrak{m}_v$ gilt dann $v(x), v(y) > 0$, also auch $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\} > 0$, das heißt $x + y \in \mathfrak{m}_v$. Für $x \in \mathfrak{m}_v$ und $a \in \mathcal{O}_v$ gilt $v(ax) = v(a) + v(x) \geq v(x) > 0$, also auch $ax \in \mathfrak{m}_v$. Wegen $1_K \notin \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = \mathfrak{m}_v$ und $0_K \in \mathfrak{m}_v$ ist $\mathfrak{m}_v$ damit ein echtes Ideal in $\mathcal{O}_v$.

Nun ist jedes echte Ideal von $\mathcal{O}_v$ bereits Teilmenge von $\mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = \mathfrak{m}_v$, denn andernfalls enthielte es eine Einheit und stimmte dann schon mit dem gesamten Ring überein. Insbesondere ist $\mathfrak{m}_v$ damit maximales Ideal von $\mathcal{O}_v$ – und da es jedes echte Ideal enthält, ist es auch das einzige maximale Ideal. □

Bemerkung 2.13. Sind $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ zwei Bewertungsringe auf K mit maximalen Idealen $\mathfrak{m}_v$ bzw. $\mathfrak{m}_w$ und ist $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$, so gilt $\mathfrak{m}_w \subseteq \mathfrak{m}_v$.

Insbesondere ist $\mathfrak{m}_w \subseteq \mathcal{O}_v$ ein Primideal in $\mathcal{O}_v$ (da es ein Primideal in $\mathcal{O}_w$ ist) und die Lokalisierung $(\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w}$ von $\mathcal{O}_v$ an $\mathfrak{m}_w$ stimmt mit $\mathcal{O}_w$ überein.

[6] Tatsächlich gilt für zwei Bewertungsringe $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ auf K sogar $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 = \{x \cdot y \mid x \in \mathcal{O}_1, y \in \mathcal{O}_2\}$, was hier jedoch nicht weiter wichtig ist.

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{O}_v^\times \subseteq \mathcal{O}_w^\times$. Ist nun $x \in \mathfrak{m}_w = \mathcal{O}_w \setminus \mathcal{O}_w^\times$, so folgt also insbesondere $x \notin \mathcal{O}_v^\times$. Wäre dabei $x \notin \mathcal{O}_v$, so müsste $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$ gelten, da $\mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring ist. Dann wäre aber auch $x^{-1} \in \mathcal{O}_w$, also $x \in \mathcal{O}_w^\times$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich gilt $x \in \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = \mathfrak{m}_v$. Da $x \in \mathfrak{m}_w$ beliebig gewählt war, folgt $\mathfrak{m}_w \subseteq \mathfrak{m}_v$.

Sei nun $(\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w}$ die Lokalisierung von $\mathcal{O}_v$ an $\mathfrak{m}_w$ und $x \in (\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w}$, das heißt $x = ab^{-1}$ für geeignete $a, b \in \mathcal{O}_v$ mit $b \notin \mathfrak{m}_w$. Dann ist $w(b) \leq 0$, also $w(b^{-1}) \geq 0$, das heißt $b^{-1} \in \mathcal{O}_w$. Wegen $a \in \mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$ folgt $x = ab^{-1} \in \mathcal{O}_w$, es gilt also $(\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w} \subseteq \mathcal{O}_w$. Sei jetzt andererseits $x \in \mathcal{O}_w$ beliebig. Ist $x \in \mathcal{O}_v$, so gilt auch $x \in (\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w}$. Ist $x \notin \mathcal{O}_v$, dann ist insbesondere $x \neq 0$ und mit $w(x) \geq 0$ folgt $w(x^{-1}) \leq 0$, das heißt $x^{-1} \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_w$. Damit ist $x = 1 \cdot (x^{-1})^{-1} \in (\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w}$, also $\mathcal{O}_w \subseteq (\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w}$. Insgesamt gilt also, wie behauptet, $(\mathcal{O}_v)_{\mathfrak{m}_w} = \mathcal{O}_w$. □

Bemerkung 2.14. Sei K ein Körper, sei $\mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring auf K mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v$ und sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ ein Automorphismus von K. Dann ist $\sigma(\mathcal{O}_v)$ ein Bewertungsring auf K mit maximalem Ideal $\sigma(\mathfrak{m}_v)$.

Insbesondere folgt aus $\sigma(\mathcal{O}_v) = \mathcal{O}_v$ auch schon $\sigma(\mathfrak{m}_v) = \mathfrak{m}_v$.

Beweis. Da σ ein Körperhomomorphismus ist, ist mit $\mathcal{O}_v$ auch $\sigma(\mathcal{O}_v)$ ein Unterring von K. Für $x \in K \setminus \sigma(\mathcal{O}_v)$ ist $\sigma^{-1}(x) \notin \mathcal{O}_v$, da $\mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring ist folgt schon $\sigma^{-1}(x^{-1}) = \left(\sigma^{-1}(x)\right)^{-1} \in \mathcal{O}_v$, also $x^{-1} \in \sigma(\mathcal{O}_v)$. Damit ist $\sigma(\mathcal{O}_v)$ ein Bewertungsring auf K.

Offensichtlich gilt $\sigma(\mathcal{O}_v^\times) = \sigma(\mathcal{O}_v)^\times$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathfrak{m}_v) &= \{\sigma(x) \in K \mid x \in \mathfrak{m}_v\} \\
&= \left\{\sigma(x) \in K \mid x \in \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times\right\} \\
&= \left\{\sigma(x) \in K \mid \sigma(x) \in \sigma(\mathcal{O}_v) \setminus \sigma(\mathcal{O}_v^\times)\right\} \\
&= \sigma(\mathcal{O}_v) \setminus \sigma(\mathcal{O}_v)^\times,
\end{aligned}$$

das heißt $\sigma(\mathfrak{m}_v)$ ist das maximale Ideal von $\sigma(\mathcal{O}_v)$.

Der letzte Satz der Behauptung folgt nun sofort aus der Eindeutigkeit des maximalen Ideals in einem Bewertungsring. □

Typische Beispiele bewerteter Körper sind Potenzreihenkörper und deren Teilkörper.

Beispiel 2.15. Sei K ein beliebiger Körper und $K((T))$ sei der Potenzreihenkörper

$$K((T)) := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \mid a_i \in K, \{i \in \mathbb{Z} \mid a_i \neq 0\} \text{ ist nach unten beschränkt} \right\}.$$

Die Abbildung $v : K((T)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \mapsto \min\{i \in \mathbb{Z} \mid a_i \neq 0\}$ (mit der Konvention $\min(\emptyset) = \infty$) definiert eine Bewertung auf $K((T))$. Der zugehörige Bewertungsring ist $\mathcal{O}_v = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mid a_i \in K\right\}$ und der Restklassenkörper ist $K((T))v = K$.

Beweis. Dass v eine Bewertung auf $K((T))$ ist, ist aus der Definition klar. Auch die Gleichungen

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K((T)) \mid v(x) \geq 0\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mid a_i \in K \right\} \text{ und}$$
$$\mathfrak{m}_v = \{x \in K((T)) \mid v(x) > 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^i \mid a_i \in K \right\}$$

ergeben sich sofort aus der Definition von v.

Betrachte nun den surjektiven Ringhomomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_v \twoheadrightarrow K$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mapsto a_0$. Offensichtlich gilt $\ker(\varphi) = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mid a_0 = 0\right\} = \mathfrak{m}_v$ und der Homomorphiesatz für Ringe liefert $\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v \cong \mathrm{im}(\varphi) = K$. □

Ist w eine Bewertung auf L und $K \subseteq L$ ein Teilkörper, so ist die Einschränkung $v = w{\restriction}K$ von w eine Bewertung auf K. Die zugehörige Wertegruppe $vK = \mathrm{im}(w{\restriction}K) = w(K)$ ist eine Untergruppe von wL und für die Bewertungsringe gilt

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K \mid w(x) \geq 0\} = \mathcal{O}_w \cap K.$$

Diese Eigenschaft der Bewertungsringe wird zum definierenden Kriterium, wenn wir andersherum Bewertungen auf Körpererweiterungen fortsetzen wollen.

Definition 2.16. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\mathcal{O}_v \subseteq K$ und $\mathcal{O}_w \subseteq L$ Bewertungsringe auf K bzw. L. Gilt $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_w \cap K$, so heißt die Bewertung w (bzw. der zugehörige Bewertungsring $\mathcal{O}_w$) eine *Fortsetzung von v (bzw. $\mathcal{O}_v$) auf L.*

Wir schreiben dann auch $(L, w)/(K, v)$ und sprechen von einer *Erweiterung von bewerteten Körpern.*

Bei der späteren Betrachtung henselscher, p-henselscher und $n_{\leq}$-henselscher Bewertungen spielen (eindeutige) Fortsetzungen von Bewertungsringen auf Körpererweiterungen eine entscheidende Rolle. Wir führen nun noch eine Reihe weiterer allgemeiner Aussagen über Bewertungsringe und Fortsetzungen auf, die wir vor allem im Kapitel 5 über $n_{\leq}$-henselsche Bewertungen benötigen werden. Zu den Beweisen einiger Resultate verweisen wir dabei auf [EP05].

Theorem 2.17. *Sei L/K eine beliebige Körpererweiterung und $\mathcal{O} \subseteq K$ ein Bewertungsring. Dann existiert eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L.*

Beweis. Siehe [EP05, Theorem 3.1.2]. □

Lemma 2.18. *Sei L/K eine Körpererweiterung, $\mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring auf K und $\mathcal{O}_w$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_v$ auf L. Dann gilt $\mathcal{O}_w^\times \cap K = \mathcal{O}_v^\times$ und damit auch $\mathfrak{m}_w \cap K = \mathfrak{m}_v$.*

Insbesondere erhalten wir kanonische Einbettungen $vK \cong K^\times/\mathcal{O}_v^\times \hookrightarrow L^\times/\mathcal{O}_w^\times \cong wL$ und $Kv = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v \hookrightarrow \mathcal{O}_w/\mathfrak{m}_w = Lw$ der Wertegruppen bzw. Restklassenkörper.

Beweis. Für $x \in \mathcal{O}_w^\times \cap K$ ist $x \in \mathcal{O}_w \cap K = \mathcal{O}_v$ und $x^{-1} \in \mathcal{O}_w \cap K = \mathcal{O}_v$, also gilt $\mathcal{O}_w^\times \cap K \subseteq \mathcal{O}_v^\times$. Für $x \in \mathcal{O}_v^\times$ folgt andererseits, wegen $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$, auch $x, x^{-1} \in \mathcal{O}_w$ und damit $x \in \mathcal{O}_w^\times$. Insgesamt ist dann $\mathcal{O}_w^\times \cap K = \mathcal{O}_v^\times$ gezeigt. Damit ist insbesondere die Abbildung $K^\times/\mathcal{O}_v^\times \to L^\times/\mathcal{O}_w^\times$ mit $x \cdot \mathcal{O}_v^\times \mapsto x \cdot \mathcal{O}_w^\times$ wohldefiniert (wegen $\mathcal{O}_v^\times \subseteq \mathcal{O}_w^\times$) und injektiv (wegen $\mathcal{O}_w^\times \cap K \subseteq \mathcal{O}_v^\times$). Dass sie auch ein Gruppenhomomorphismus ist, ist aus der Definition der Abbildungsvorschrift klar.

Nun gilt für die maximalen Ideale von $\mathcal{O}_v$ bzw. $\mathcal{O}_w$, wegen $\mathcal{O}_w^\times \subseteq \mathcal{O}_w$, die Identität

$$\mathfrak{m}_v = \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = (\mathcal{O}_w \cap K) \setminus (\mathcal{O}_w^\times \cap K) = (\mathcal{O}_w \setminus \mathcal{O}_w^\times) \cap K = \mathfrak{m}_w \cap K,$$

wie behauptet. Völlig analog zur Argumentation bei der Einbettung zwischen den Wertegruppen folgt, dass die Abbildung $Kv \to Lw$ mit $a + \mathfrak{m}_v \mapsto a + \mathfrak{m}_w$ eine Einbettung ist. □

Lemma 2.19. *Sei K ein Körper und $f \in \mathcal{O}[X]$ ein normiertes Polynom über einem Bewertungsring $\mathcal{O}$ auf K. Dann gilt für jede Nullstelle $a \in K$ von f bereits $a \in \mathcal{O}$.*

Beweis. Sei $a \in K$ eine Nullstelle des normierten Polynoms $f \in \mathcal{O}[X]$, welches durch $f(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0$ gegeben sei. Weiter sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$. Wäre nun $a \notin \mathcal{O}$, so folgte schon $a \neq 0$ und $a^{-1} \in \mathfrak{m}$, also auch $a^{-k} \in \mathfrak{m}$ für $1 \leq k \leq d$. Aus $f(a) = 0$ erhielten wir dann durch Multiplikation mit a^{-d} und Umstellung der Gleichung sowie mit $b_i \in \mathcal{O}$ für $0 \leq i \leq d$ die Aussage

$$-1 = b_{d-1}a^{-1} + \cdots + b_0 a^{-d} \in \mathfrak{m},$$

das heißt $\mathfrak{m} = \mathcal{O}$. Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{m}$. □

Die folgenden drei Aussagen benötigen wir später für den Beweis des Theorems 5.5, das einige Resultate zur Charakterisierung henselscher bzw. p-henselscher Bewertungen auf $n_{\leq}$-henselsche Bewertungen überträgt.

Lemma 2.20. *Sei K ein Körper und seien $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m \subseteq K$ paarweise verschiedene Bewertungsringe auf K. Setze $R := \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i$ und $\mathfrak{p}_i = R \cap \mathfrak{m}_i$.*

Dann gilt

(1) $\mathcal{O}_i = R_{\mathfrak{p}_i}$.

Falls $\mathcal{O}_i \subsetneq \mathcal{O}_j$ für alle $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$ erfüllt ist, so gilt weiter

(2) $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_j$ für alle $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$,

(3) die Ideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m \subseteq R$ sind gerade alle maximalen Ideale von R und

(4) für jedes Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m \mathcal{O}_i$ gibt es ein $\alpha \in R$, das simultan $a_i - \alpha \in \mathfrak{m}_i$ für alle $1 \leq i \leq m$ erfüllt.

Beweis. Siehe [EP05, Lemma 3.2.6 und Theorem 3.2.7]. □

Lemma 2.21. *Sei K ein Körper und $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K. Weiter sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq L$ seien Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf L. Ist $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$, so gilt bereits $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.*

Beweis. Siehe [EP05, Lemma 3.2.8]. □

Einen wichtigen Bezug zwischen Fortsetzungen von Bewertungen und der Automorphismengruppe der entsprechenden Körpererweiterung stellt das Konjugationstheorem her.

Theorem 2.22 (Konjugationstheorem)**.** *Sei K ein Körper und $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K. Weiter sei L/K eine endliche normale Körpererweiterung und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq L$ seien Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf L. Dann sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ konjugiert über K, das heißt es gibt einen K-Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ von L mit $\sigma(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$.*

Beweis. Siehe [EP05, Theorem 3.2.14]. □

Korollar 2.23. *Sei (K, v) ein bewerteter Körper und L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann gibt es nur endlich viele Fortsetzungen von v auf L.*

Beweis. Wir wählen zunächst geeignete Elemente $x_1, \ldots, x_n \in L$ mit $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ und setzen $f = \prod_{i=1}^n \mathrm{mipo}_K(x_i)$. Es sei nun N ein Zerfällungskörper von f über K. Dann ist N/K eine endliche normale Körpererweiterung und nach Theorem 2.22 gibt es damit höchstens $\# \mathrm{Aut}(N/K) \leq \deg(f)!$ viele Fortsetzungen von v auf N. Da jede Fortsetzung von v auf L auch eine Fortsetzung auf N besitzt, folgt die Behauptung. □

Ist $(L, w)/(K, v)$ eine Erweiterung bewerteter Körper, so können wir nach Lemma 2.18 die Wertegruppe $vK \cong K^\times/\mathcal{O}_v^\times$ als Untergruppe von $wL \cong L^\times/\mathcal{O}_w^\times$ und den Restklassenkörper Kv als Teilkörper von Lw auffassen. Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 2.24. Sei $(L, w)/(K, v)$ eine Erweiterung bewerteter Körper. Dann heißt

$$e(w/v) := e(\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v) := [wL : vK] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

der *Verzweigungsindex der Erweiterung* und

$$f(w/v) := f(\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v) := [Lw : Kv] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

der *Trägheitsgrad der Erweiterung*.

Gilt $e(w/v) = f(w/v) = 1$, so heißt die Erweiterung $(L, w)/(K, v)$ *unmittelbar*.

Theorem 2.25 (Fundamentale Ungleichung)**.** *Sei (K, v) ein bewerteter Körper, L/K eine endliche Körpererweiterung und $w_1, \dots, w_m$ seien sämtliche Fortsetzungen von v auf L. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} e(w_i/v) \cdot f(w_i/v) \leq [L : K].$$

Falls die Wertegruppe vK isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist und L/K eine endliche separable Körpererweiterung ist, so gilt sogar Gleichheit.

Beweis. Siehe [EP05, Theorem 3.3.4 und Theorem 3.3.5]. □

Lemma 2.26. *Sei K ein Körper und $f \in \mathcal{O}[X]$ ein beliebiges Polynom über einem Bewertungsring $\mathcal{O}$ auf K mit $f = g_1 \dots g_m$ für geeignete in $K[X]$ irreduzible Polynome $g_1, \dots, g_m \in K[X]$. Dann gibt es in $K[X]$ irreduzible Polynome $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{O}[X]$ mit $f = h_1 \dots h_m$.*

Beweis. Siehe [EP05, Remark 4.1.2 (3)]. □

Korollar 2.27. *Sei K ein Körper und $f \in \mathcal{O}[X]$ ein beliebiges Polynom über einem Bewertungsring $\mathcal{O}$ auf K. Falls f in $\mathcal{O}[X]$ irreduzibel ist, so ist es bereits in $K[X]$ irreduzibel.*

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition. Ist f reduzibel in $K[X]$, so gibt es in $K[X]$ irreduzible Polynome $g_1, \dots, g_m \in K[X]$ mit $f = g_1 \dots g_m$ und $m \geq 2$. Nach Lemma 2.26 gibt es dann Polynome $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{O}[X]$ mit $f = h_1 \dots h_m$ und wegen $m \geq 2$ ist f folglich reduzibel in $\mathcal{O}[X]$. □

Sind $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ zwei Bewertungsringe auf demselben Körper mit $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$, so sagen wir *$v$ (bzw. $\mathcal{O}_v$) ist feiner als w (bzw. $\mathcal{O}_w$)* und entsprechend auch *w (bzw. $\mathcal{O}_w$) ist gröber als v (bzw. $\mathcal{O}_v$)*.

Haben wir nun zwei vergleichbare Bewertungsringe auf demselben Körper, so induziert der feinere der beiden Bewertungsringe auf folgende Weise eine Bewertung auf dem Restklassenkörper des gröberen Bewertungsrings.

Lemma 2.28. *Sei K ein Körper und seien $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w$ zwei Bewertungsringe auf K mit $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$. Dann wird durch $\mathcal{O}_{\bar{v}} := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_w$ ein Bewertungsring auf dem Restklassenkörper Kw definiert.*

Dabei gilt $\mathcal{O}_{\bar{v}}^{\times} = \mathcal{O}_v^{\times}/\mathfrak{m}_w$ sowie $\mathfrak{m}_{\bar{v}} = \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_w$. Insbesondere sind Kv und $(Kw)\bar{v}$ kanonisch isomorph.

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{m}_w \subseteq \mathfrak{m}_v$ ein Ideal in $\mathcal{O}_v$: Offensichtlich ist $(\mathfrak{m}_w, +)$ eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathcal{O}_v, +)$ und für $a \in \mathcal{O}_v$, $x \in \mathfrak{m}_w$ gilt insbesondere $a \in \mathcal{O}_w$, also auch $a \cdot x \in \mathfrak{m}_w$. Daher ist $\mathcal{O}_{\bar{v}} = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_w \subseteq \mathcal{O}_w/\mathfrak{m}_w$ ein Unterring von Kw.

Sei nun $\bar{x} \in Kw \setminus \mathcal{O}_{\bar{v}}$. Es ist dann $\bar{x} = x + \mathfrak{m}_w$ für ein geeignetes $x \in \mathcal{O}_w \setminus \mathcal{O}_v \subseteq K \setminus \mathcal{O}_v$. Da $\mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring auf K ist, folgt $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$ und damit $\bar{x}^{-1} = x^{-1} + \mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_{\bar{v}}$. Also ist $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ ein Bewertungsring auf Kw.

Für beliebiges $a+\mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w$ mit $a \in \mathcal{O}_v^\times$ ist $(a+\mathfrak{m}_w)^{-1} = a^{-1}+\mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w \subseteq \mathcal{O}_{\bar{v}}$, also $a + \mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_{\bar{v}}^\times$, das heißt insgesamt $\mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w \subseteq \mathcal{O}_{\bar{v}}^\times$.

Sei jetzt $\alpha \in \mathcal{O}_{\bar{v}}^\times$ beliebig. Es ist dann $\alpha = a + \mathfrak{m}_w$ und $\alpha^{-1} = b + \mathfrak{m}_w$ für geeignete $a, b \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_w$ mit $1 - ab \in \mathfrak{m}_w \subseteq \mathfrak{m}_v$. Folglich gilt $ab \notin \mathfrak{m}_v$, denn sonst wäre $1 \in \mathfrak{m}_v$, und damit ist wegen $b \in \mathcal{O}_v$ insbesondere $a \notin \mathfrak{m}_v$. Also gilt $a \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_v = \mathcal{O}_v^\times$ und daher ist $\alpha = a+\mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w$. Da $\alpha \in \mathcal{O}_{\bar{v}}^\times$ beliebig gewählt war, folgt damit auch $\mathcal{O}_{\bar{v}}^\times \subseteq \mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w$. Insgesamt ist $\mathcal{O}_{\bar{v}}^\times = \mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w$ gezeigt.

Weiter ist $(\mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w) \cup (\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_w) = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_w = \mathcal{O}_{\bar{v}}$ und für $a \in \mathcal{O}_v^\times$ und $b \in \mathfrak{m}_v$ ist $a - b \notin \mathfrak{m}_v$, also $(\mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w) \cap (\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_w) = \emptyset$. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ erfüllt daher Identität

$$\mathfrak{m}_{\bar{v}} = \mathcal{O}_{\bar{v}} \setminus \mathcal{O}_{\bar{v}}^\times = \mathcal{O}_{\bar{v}} \setminus (\mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w) = \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_w,$$

und nach dem zweiten Isomorphiesatz für Moduln über dem Ring $\mathcal{O}_v$ folgt

$$Kv = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v \cong (\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_w)/(\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_w) = \mathcal{O}_{\bar{v}}/\mathfrak{m}_{\bar{v}} = (Kw)\bar{v},$$

wobei der Isomorphismus kanonisch durch $a + \mathfrak{m}_v \mapsto (a + \mathfrak{m}_w) + \mathfrak{m}_{\bar{v}}$ gegeben ist. $\square$

Dieser Prozess lässt sich auch umkehren, wie die folgenden beiden Bemerkungen zeigen.

Bemerkung und Definition 2.29. Sei (K, v) ein bewerteter Körper und w eine Bewertung auf dem Restklassenkörper $Kv = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{O}_{w \circ v} := \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_v \in \mathcal{O}_w\} \subseteq \mathcal{O}_v$$

ein Bewertungsring auf K mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_{w \circ v} = \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_v \in \mathfrak{m}_w\}$ und Restklassenkörper $\mathcal{O}_{w \circ v}/\mathfrak{m}_{w \circ v} \cong (Kv)w$.

Die zu $\mathcal{O}_{w \circ v}$ gehörige Bewertung $w \circ v : K \to K^\times/\mathcal{O}_{w \circ v}^\times \cup \{\infty\}$ auf K heißt dann *Komposition von w und v.*

Beweis. Für $x, y \in \mathcal{O}_{w \circ v}$ gilt

$$\begin{aligned}(x + y) + \mathfrak{m}_v &= (x + \mathfrak{m}_v) + (y + \mathfrak{m}_v) \in \mathcal{O}_w \text{ und}\\ (x \cdot y) + \mathfrak{m}_v &= (x + \mathfrak{m}_v) \cdot (y + \mathfrak{m}_v) \in \mathcal{O}_w.\end{aligned}$$

Weiter ist $0 + \mathfrak{m}_v \in \mathcal{O}_w$ und $1 + \mathfrak{m}_v \in \mathcal{O}_w$, also ist $\mathcal{O}_{w \circ v}$ insgesamt ein Unterring von K.

Für $x \in K \setminus \mathcal{O}_{w\circ v}$ ist nun $x + \mathfrak{m}_v \notin \mathcal{O}_w$, also $x^{-1} + \mathfrak{m}_v = (x + \mathfrak{m}_v)^{-1} \in \mathcal{O}_{w\circ v}$, das heißt $\mathcal{O}_{w\circ v}$ ist ein Bewertungsring.

Es gilt $\mathcal{O}_{w\circ v}^\times = \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_v \in \mathcal{O}_w^\times\}$ und damit

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_{w\circ v} = \mathcal{O}_{w\circ v} \setminus \mathcal{O}_{w\circ v}^\times &= \left\{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_v \in \mathcal{O}_w \setminus \mathcal{O}_w^\times\right\}\\ &= \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_v \in \mathfrak{m}_w\}\,.\end{aligned}$$

Betrachte nun die Epimorphismen

$$\begin{aligned}\alpha : \mathcal{O}_{w\circ v} &\to \mathcal{O}_w \\ x &\mapsto x + \mathfrak{m}_v\end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned}\pi : \mathcal{O}_w &\to \mathcal{O}_w/\mathfrak{m}_w = (Kv)w \\ \bar{x} &\mapsto \bar{x} + \mathfrak{m}_w\end{aligned}$$

und den Kern der Hintereinanderausführung $\pi \circ \alpha$ dieser Abbildungen. Es gilt

$$\ker(\pi \circ \alpha) = \{x \in K \mid (x + \mathfrak{m}_v) + \mathfrak{m}_w = \mathfrak{m}_w\} = \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_v \in \mathfrak{m}_w\} = \mathfrak{m}_{w\circ v}$$

und damit $\mathcal{O}_{w\circ v}/\mathfrak{m}_{w\circ v} \cong (Kv)w$. □

Bemerkung 2.30. Sind K, $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ sowie $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ wie in Lemma 2.28, so gilt nach Definition 2.29 die Identität

$$\mathcal{O}_{\bar{v}\circ w} = \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_{\bar{v}}\} = \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_w\} = \mathcal{O}_v,$$

das heißt v und $\bar{v} \circ w$ sind äquivalent.

Andererseits ist für beliebige Bewertungen v auf K und w auf Kv auch die Gleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\overline{w\circ v}} = \mathcal{O}_{w\circ v}/\mathfrak{m}_v &= \{x \in K \mid x + \mathfrak{m}_v \in \mathcal{O}_w\}/\mathfrak{m}_v\\ &= \{x + \mathfrak{m}_v \mid x \in K, x + \mathfrak{m}_v \in \mathcal{O}_w\}\\ &= \mathcal{O}_w\end{aligned}$$

erfüllt.

Zum Abschluss der allgemeinen Einführung in das Thema der bewerteten Körper betrachten wir noch die Fortsetzung der Restklassenprojektion zu einer Abbildung zwischen den Polynomringen $\mathcal{O}_v[X]$ und $Kv[X]$.

Notation 2.31. Für einen bewerteten Körper (K, v) sei

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{Kv} : \mathcal{O}_v[X] &\to Kv[X]\\ \sum a_i X^i &\mapsto \sum (a_i + \mathfrak{m}_v) X^i\end{aligned}$$

die natürliche Fortsetzung der Restklassenprojektion $\mathcal{O}_v \to \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ zu einem Ringhomomorphismus zwischen den Polynomringen $\mathcal{O}_v[X]$ und $Kv[X]$.

Bemerkung 2.32. Sei K ein Körper mit einer Bewertung v und sei $f \in \mathcal{O}_v[X]$ ein Polynom über dem Bewertungsring. Für $g = \mathrm{res}_{Kv}(f) \in Kv[X]$ gilt dann

$$\begin{aligned} g'(X) &= \sum i(a_i + \mathfrak{m}_v)X^{i-1} = \sum (ia_i + \mathfrak{m}_v)X^{i-1} = \mathrm{res}_{Kv}\left(\sum ia_i X^{i-1}\right) \\ &= \left(\mathrm{res}_{Kv}(f')\right)(X) \end{aligned}$$

und für jedes $a \in \mathcal{O}_v$ ist

$$\begin{aligned} g(a + \mathfrak{m}_v) &= \sum (a_i + \mathfrak{m}_v)(a + \mathfrak{m}_v)^i = \sum (a_i + \mathfrak{m}_v)(a^i + \mathfrak{m}_v) = \sum a_i a^i + \mathfrak{m}_v \\ &= f(a) + \mathfrak{m}_v. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.33. Falls $f \in \mathcal{O}_v[X]$ ein normiertes Polynom ist, für das $\mathrm{res}_{Kv}(f) \in Kv[X]$ irreduzibel in $Kv[X]$ ist, so ist f bereits irreduzibel in $\mathcal{O}_v[X]$. Nach Lemma 2.19 ist f dann auch in $K[X]$ irreduzibel.

Beweis. Ist $f = g \cdot h$ für zwei Polynome $g, h \in \mathcal{O}_v[X]$, so ist $\mathrm{res}_{Kv}(f) = \mathrm{res}_{Kv}(g) \cdot \mathrm{res}_{Kv}(h)$. Da f normiert ist können wir ohne Einschränkung annehmen, dass dabei auch g und h normiert sind. Dann ist aber $\deg(g) = \deg(\mathrm{res}_{Kv}(g))$ und $\deg(h) = \deg(\mathrm{res}_{Kv}(h))$, das heißt eines der Polynome g, h ist konstant. $\square$

2.3 Bewertungen und Topologie

Die eingangs erwähnte Vorstellung von bewerteten Körpern als einer Verallgemeinerung von Körpern mit Absolutbetrag bzw. Metrik spiegelt sich auch in der von einem Bewertungsring induzierten Topologie wieder.

Begreifen wir die Bewertung v auf einem Körper K als Maß für die Größe von Elementen von K, so liegt es nahe, die Menge $\{x \in K \,|\, v(x - x_0) > \gamma\}$ für $x_0 \in K$ und $\gamma \in vK$ als *offenen Ball um x_0 mit Radius γ* zu bezeichnen.

Tatsächlich erzeugt die Menge aller dieser Bälle eine (mit den Körperoperationen verträgliche) Topologie auf K, die einige weitere schöne und nützliche Eigenschaften hat.

Dies zeigt, unter Beachtung der Identität

$$\begin{aligned} a \cdot \mathfrak{m}_v + x_0 &= \{az + x_0 \in K \,|\, z \in \mathfrak{m}_v\} \\ &= \left\{x \in K \,|\, x - x_0 \in a^{-1}\mathfrak{m}_v\right\} \\ &= \left\{x \in K \,|\, v(x - x_0) > v(a^{-1})\right\}, \end{aligned}$$

das Lemma 2.36. Die von diesen Bällen erzeugte Topologie ist – überraschenderweise – dieselbe wie die von “abgeschlossenen Bällen” $\{x \in K \,|\, v(x - x_0) \geq \gamma\}$ erzeugte.

Bemerkung und Definition 2.34. Sei K ein Körper und $\mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring auf K. Dann ist die Menge $\mathcal{B} = \{a \cdot \mathcal{O}_v + x \,|\, a \in K^\times, x \in K\}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_v$ auf K, genannt die *von v (bzw. $\mathcal{O}_v$) induzierte Topologie.*

Beweis. Offensichtlich gilt $K = \bigcup_{x \in K} \mathcal{O}_v + x$ mit $\mathcal{O}_v + x \in \mathcal{B}$ für alle $x \in K$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass der Schnitt zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ wieder in $\mathcal{B}$ liegt. Seien dazu $a, b \in K^\times$ und $x, y \in K$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $v(a) \geq v(b)$. Weiter nehmen wir an, dass $(a\mathcal{O}_v + x) \cap (b\mathcal{O}_v + y) \neq \emptyset$ gilt. Für $z \in (a\mathcal{O}_v + x) \cap (b\mathcal{O}_v + y)$ gilt dann $z - x \in a\mathcal{O}_v$ und da $a\mathcal{O}_v$ additiv abgeschlossen ist, folgt $a\mathcal{O}_v + (z-x) \subseteq a\mathcal{O}_v$. Wegen $-1 \in \mathcal{O}_v$ ist auch $x - z = -1(z-x) \in a\mathcal{O}_v$ und es gilt daher sogar $a\mathcal{O}_v + (z-x) = a\mathcal{O}_v$, also $a\mathcal{O}_v + z = a\mathcal{O}_v + x$. Völlig analog folgt $b\mathcal{O}_v + y = b\mathcal{O}_v + z$.

Für jedes $e \in a\mathcal{O}_v$ gibt es ein $e_0 \in \mathcal{O}_v$ mit $e = a \cdot e_0$, das heißt es gilt

$$v(e) = v(a \cdot e_0) = v(a) + v(e_0) \geq v(a) \geq v(b),$$

also $v(eb^{-1}) \geq 0$. Damit ist nun $e = b \cdot eb^{-1} \in b \cdot \mathcal{O}_v$. Es gilt also $a\mathcal{O}_v \subseteq b\mathcal{O}_v$ und daher auch $a\mathcal{O}_v + z \subseteq b\mathcal{O}_v + z$.

Insgesamt erhalten wir die Beziehung $a\mathcal{O}_v + x = a\mathcal{O}_v + z \subseteq b\mathcal{O}_v + z = b\mathcal{O}_v + y$, also gilt $(a\mathcal{O}_v + x) \cap (b\mathcal{O}_v + y) = a\mathcal{O}_v + x \in \mathcal{B}$. □

Bemerkung 2.35. Die Abbildungen $\mu_a : K \to K$ mit $x \mapsto a \cdot x$ und $t_d : K \to K$ mit $x \mapsto x + d$ sind für alle $a, b \in K$ stetig bezüglich $\mathcal{T}_v$. Mit Ausnahme von μ_0 sind alle diese Abbildungen Homöomorphismen mit den stetigen Umkehrabbildungen $(\mu_a)^{-1} = \mu_{a^{-1}}$ und $(t_d)^{-1} = t_{-d}$.

Lemma 2.36. *Die Menge $\mathcal{B}_\mathfrak{m} = \{a \cdot \mathfrak{m}_v + x \mid a \in K^\times, x \in K\}$ bildet ebenfalls eine Basis von $\mathcal{T}_v$.*

Beweis. Seien $a \in \mathfrak{m}_v$ und $b \in \mathcal{O}_v$. Dann gilt $v(a \cdot b) = v(a) + v(b) \geq v(a) > 0$ und damit $a \cdot b \in \mathfrak{m}_v$, also insgesamt $\mathfrak{m}_v \cdot \mathcal{O}_v \subseteq \mathfrak{m}_v$. Wegen $1 \in \mathcal{O}_v$ folgt auch $\mathfrak{m}_v \subseteq \mathfrak{m}_v \cdot \mathcal{O}_v$. Wir erhalten also

$$\mathfrak{m}_v = \mathfrak{m}_v \cdot \mathcal{O}_v = \bigcup_{z \in \mathfrak{m}_v} z \cdot \mathcal{O}_v \in \mathcal{T}_v$$

und mit der Stetigkeit von $\mu_{a^{-1}}$ und t_{-d} folgt auch $a \cdot \mathfrak{m}_v + d = (t_d \circ \mu_a)(\mathfrak{m}_v) \in \mathcal{T}_v$ für alle $a \in K^\times$ und alle $d \in K$, das heißt $\mathcal{B}_\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{T}_v$.

Für $x \in K$ und $U \in \mathcal{T}_v$ mit $x \in U$ gibt es nun ein $a \in K^\times$ mit $a \cdot \mathfrak{m}_v + x \subseteq a \cdot \mathcal{O}_v + x \subseteq U$, also ist $\mathcal{B}_\mathfrak{m}$ sogar eine Basis für $\mathcal{T}_v$. □

Für $x, y \in K$ mit $x \neq y$ ist $a := (x - y) \in K^\times$ und $y \in a \cdot \mathfrak{m}_v + y$. Wegen $v(x-y) = v(a)$ ist weiter $x - y \notin a \cdot \mathfrak{m}_v$, also $x \notin a \cdot \mathfrak{m}_v + y$, das heißt die Topologie $\mathcal{T}_v$ auf K erfüllt das erste Trennungsaxiom.

Da zwei Mengen aus $\mathcal{B}$, wie im Beweis von Bemerkung 2.34 gesehen, entweder disjunkt sind oder eine von ihnen bereits Teilmenge der anderen ist, ist die Topologie $\mathcal{T}_v$ damit sogar hausdorffsch.

Darüber hinaus ist sie sogar eine Körper-Topologie auf dem zugrunde liegenden Körper.

Proposition 2.37. *Sei K ein Körper und $\mathcal{O}_v$ ein Bewertungsring auf K, sowie $\mathcal{T}_v$ die von $\mathcal{O}_v$ induzierte Topologie. Dann ist $(K, \mathcal{T}_v)$ ein topologischer Körper.*

Beweis. Für den gesamten Beweis seien $a \in K^\times$ und $d \in K$, das heißt $a \cdot \mathcal{O}_v + d \in \mathcal{B}$ beliebig.

Seien nun zunächst $x, y \in K$ so, dass $\mu(x, y) = x \cdot y \in a \cdot \mathcal{O}_v + d$ erfüllt ist. Wähle ein Element $b \in K^\times$ mit

$$v(b) \geq \max\{v(a), v(a) - v(x), v(a) - v(y), 0\}.$$

Dann gilt $v(b^2) \geq v(b) \geq v(a)$ sowie $v(bx) = v(b) + v(x) \geq v(a)$ und analog $v(by) \geq v(a)$. Nun ist die Menge $U = (b \cdot \mathcal{O}_v + x) \times (b \cdot \mathcal{O}_v + y)$ eine offene Umgebung von (x, y) in $K \times K$, für die

$$\begin{aligned}\mu(U) &= b^2 \cdot \mathcal{O}_v + bx \cdot \mathcal{O}_v + by \cdot \mathcal{O}_v + x \cdot y \\ &\subseteq a \cdot \mathcal{O}_v + a \cdot \mathcal{O}_v + a \cdot \mathcal{O}_v + x \cdot y \\ &= a \cdot \mathcal{O}_v + x \cdot y = a \cdot \mathcal{O}_v + d\end{aligned}$$

gilt. Die Gleichheit in der letzten Zeile folgt dabei wie im Beweis von Bemerkung 2.34 aus $x \cdot y \in a \cdot \mathcal{O}_v + d$. Zusammengefasst erhalten wir eine offene Menge $U \subseteq K \times K$ mit $(x, y) \in U \subseteq \mu^{-1}(a \cdot \mathcal{O}_v + d)$, das heißt μ ist stetig.

Seien jetzt $x, y \in K$ so, dass $\alpha(x, y) = x + y \in a \cdot \mathcal{O}_v + d$ erfüllt ist. Dann ist die Menge $U = (a \cdot \mathcal{O}_v + x) \times (a \cdot \mathcal{O}_v + y)$ eine offene Umgebung von (x, y) in $K \times K$ mit

$$\alpha(U) = a \cdot \mathcal{O}_v + a \cdot \mathcal{O}_v + (x + y) = a \cdot \mathcal{O}_v + (x + y) = a \cdot \mathcal{O}_v + d.$$

Es gilt also $(x, y) \in U \subseteq \alpha^{-1}(a \cdot \mathcal{O}_v + d)$, das heißt α ist stetig.

Abschließend sei nun $x \in K^\times$ so, dass $\iota(x) = x^{-1} \in a \cdot \mathcal{O}_v + d$ erfüllt ist. Wähle $b \in K^\times$ mit $v(b) \geq \max\left\{v(x), v(ax^2)\right\}$. Dann ist $U = (b \cdot \mathfrak{m}_v + x) \cap K^\times$ nach Lemma 2.36 eine offene Umgebung von x in $K^\times$ und für $y \in U \setminus x$ gilt $y - x \in (b \cdot \mathfrak{m}_v)$, also $v(y - x) > v(b)$. Wegen

$$v(b) \geq v(x) = v\left(y + (x - y)\right) \geq \min\{v(y), v(y - x)\}$$

folgt $\min\{v(y), v(y - x)\} \neq v(y - x)$, also $v(x) \geq v(y)$. Wir erhalten damit die Ungleichung $v(axy) \leq v(ax^2) \leq v(b) \leq v(y - x)$, das heißt $v(axy) \leq v(y - x)$, womit

$$v(a) \leq v\left(x^{-1}y^{-1}(y - x)\right) = v(y^{-1} - x^{-1})$$

gilt. Es folgt $y^{-1} - x^{-1} \in a \cdot \mathcal{O}_v$, also $\iota(y) = y^{-1} \in a \cdot \mathcal{O}_v + x^{-1} = a \cdot \mathcal{O}_v + d$. Insgesamt erhalten wir $x \in U \subseteq \iota^{-1}\left((a \cdot \mathcal{O}_v + d) \cap K^\times\right)$, das heißt ι ist stetig. □

Später werden wir sehen, dass alle nicht-trivialen henselschen (bzw. p-henselschen bzw. $n_{\leq}$-henselschen) Bewertungen auf einem Körper dieselbe Topologie induzieren. Wir führen dafür jetzt schon den Begriff der Unabhängigkeit zweier Bewertungsringe ein.

Definition 2.38. Zwei Bewertungsringe $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ auf einem Körper K heißen *unabhängig*, falls sie unterschiedliche Topologien induzieren.

Eine rein algebraische Charakterisierung der Unabhängigkeit zweier Bewertungsringe liefert das folgende Lemma.

Lemma 2.39. *Sei K ein Körper und v, w seien zwei Bewertungen auf K. Die Bewertungsringe $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ sind genau dann unabhängig, wenn $\mathcal{O}_v\mathcal{O}_w = K$ gilt.*

Beweis. Siehe [EP05, Theorem 2.3.4]. $\square$

3 Henselsche Bewertungen

3.1 Grundlagen

Es gibt eine Reihe von Charakterisierungen henselscher Bewertungen, die alle als Definition des Begriffs in Frage kämen (siehe Theorem 3.4). Obwohl der Name eigentlich daher stammt, dass diese Bewertungen die Aussage von Hensels Lemma erfüllen, hat sich die folgende Eigenschaft in der Literatur als Standarddefinition etabliert.

Definition und Bemerkung 3.1. Eine Bewertung v auf einem Körper K (bzw. der bewertete Körper (K, v)) heißt *henselsch*, falls der zugehörige Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf den (einmalig a priori festgelegten) algebraischen Abschluss K^{alg} von K hat.

Da je zwei algebraische Abschlüsse von K isomorph zueinander sind, hat $\mathcal{O}_v$ dann sogar eine eindeutige Fortsetzung auf jeden algebraischen Abschluss von K.

Bemerkung 3.2. Ein bewerteter Körper (K, v) ist genau dann henselsch, wenn $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf jede algebraische Körpererweiterung L/K hat.

Beweis. Sei (K, v) ein henselsch bewerteter Körper und L/K eine algebraische Körpererweiterung. Ohne Einschränkung sei $L \subset K^{\text{alg}}$. Weiter seien $\mathcal{O}_w$ und $\mathcal{O}_{w'}$ zwei Fortsetzungen von $\mathcal{O}_v$ auf L und $\mathcal{O}_{\hat{w}}$ bzw. $\mathcal{O}_{\hat{w}'}$ seien Fortsetzungen von $\mathcal{O}_w$ bzw. $\mathcal{O}_{w'}$ auf K^{alg}.

Dann sind $\mathcal{O}_{\hat{w}}$ und $\mathcal{O}_{\hat{w}'}$ auch Fortsetzungen von $\mathcal{O}_v$. Da (K, v) henselsch ist gilt daher bereits $\mathcal{O}_{\hat{w}} = \mathcal{O}_{\hat{w}'}$ und es folgt

$$\mathcal{O}_w = \mathcal{O}_{\hat{w}} \cap L = \mathcal{O}_{\hat{w}'} \cap L = \mathcal{O}_{w'},$$

also hat $\mathcal{O}_v$ genau eine Fortsetzung auf L.

Die Umkehrung ist klar, da K^{alg}/K eine algebraische Körpererweiterung ist. □

Beispiel 3.3. Die triviale Bewertung auf einem beliebigen Körper ist henselsch.

Beweis. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung von K und $\mathcal{O}_v \subseteq L$ ein Bewertungsring auf L mit $\mathcal{O}_v \cap K = K$, das heißt $\mathcal{O}_v \supseteq K$ sei eine Fortsetzung des trivialen Bewertungsrings auf K. Wir zeigen, dass $v(x) \leq 0$ für alle $x \in L \setminus \{0_L\}$ gilt. Damit folgt dann sofort $v(x) \geq 0$ für alle $x \in L$, also $\mathcal{O}_v = L$.

Sei also $x \in L \setminus \{0\}$ beliebig. Da L/K algebraisch ist, existieren dann $d \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_i \in K$ für $0 \leq i \leq d$ mit $a_d \neq 0$ und $a_d x^d + \cdots + a_0 = 0$. Multiplizieren wir diese Gleichung für $m = \min \{i \,|\, a_i \neq 0\} \in \mathbb{N}_0$ mit x^{-m}, so ergibt sich

$$a_d x^{d-m} + a_{d-1} x^{d-1-m} + \cdots + a_{m+1} x + a_m = 0,$$

also $a_m = -\sum_{i=m+1}^{d} a_i x^{i-m} = -\sum_{i\in I} a_i x^{i-m}$ für $I = \{i \in \mathbb{N} \,|\, m+1 \leq i \leq d, a_i \neq 0\}$. Dabei ist $I \neq \emptyset$, denn sonst wäre $a_m x^m = 0$ und damit $x = 0$.

Wegen $a_i \in K \setminus \{0\}$ für alle $i \in I \cup \{m\}$ und $K \subseteq \mathcal{O}_v$ folgt $v(\sum_{i\in I} a_i x^{i-m}) = v(a_m) = 0$ sowie

$$\begin{aligned} v\left(\sum_{i\in I} a_i x^{i-m}\right) &\geq \max\left\{v(a_i x^{i-m}) \,|\, i \in I\right\} \\ &= \max\left\{v(a_i) + (i-m)\cdot v(x) \,|\, i \in I\right\} \\ &= \max\left\{(i-m)\cdot v(x) \,|\, i \in I\right\} \\ &= k \cdot v(x) \end{aligned}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Insgesamt ergibt sich $k \cdot v(x) \leq 0$ und damit $v(x) \leq 0$. Da $x \in L \setminus \{0\}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Wir listen nun einige der erwähnten Charakterisierungen henselscher Bewertungen auf.

Theorem 3.4. *Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Dann sind äquivalent:*

(1) Die Bewertung v ist henselsch.

(2) Der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ hat eine eindeutige Fortsetzung auf den separablen Abschluss K^{sep} von K.

(3) Für jede Galoiserweiterung L/K hat $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf L.

(4) Es gilt die Aussage von **Hensels Lemma***: Jedes Polynom $f \in \mathcal{O}_v[X]$, für das $\mathrm{res}_{Kv}(f) \in Kv[X]$ eine einfache Nullstelle $\alpha \in Kv$ im Restklassenkörper besitzt, hat eine Nullstelle $a \in \mathcal{O}_v$ mit $a + \mathfrak{m}_v = \alpha$.*

(5) Jedes Polynom $f \in \mathcal{O}_v[X]$ der Form

$$f(X) = X^d + X^{d-1} + a_{d-2}X^{d-2} + \cdots + a_0$$

mit $d = \deg(f) \geq 1$ und $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_v$ besitzt eine Nullstelle in K (äquivalent[7]: in $\mathcal{O}_v$).

Beweis. Siehe [EP05, Lemma 4.1.1 und Theorem 4.1.3]. □

Bemerkung 3.5. Die Nullstelle $a \in \mathcal{O}_v$ in Kriterium (4) aus Theorem 3.4 ist durch $a + \mathfrak{m}_v = \alpha$ bereits eindeutig bestimmt.

Wäre nämlich $b \in \mathcal{O}_v$ eine weitere Nullstelle von f mit $b + \mathfrak{m}_v = \alpha$, so gäbe es ein Polynom $g \in \mathcal{O}_v[X]$ mit

$$\begin{aligned} f(X) &= (X-a)\cdot(X-b)\cdot g(X) \text{ und daher} \\ \mathrm{res}_{Kv}(f)(X) &= (X-\alpha)\cdot(X-\alpha)\cdot \mathrm{res}_{Kv}(g)(X), \end{aligned}$$

[7]Nach Lemma 2.19 liegt jede Nullstelle von f in K bereits in $\mathcal{O}_v$.

das heißt α wäre entgegen der Voraussetzungen keine einfache Nullstelle von $\mathrm{res}_{Kv}(f)$ in Kv.

Ein Beispiel für eine nicht-triviale henselsche Bewertung ist der Potenzreihenkörper $K((T))$ mit der zuvor diskutierten Bewertung.

Beispiel 3.6. Die Bewertung $v(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i) = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid a_i \neq 0\}$ auf dem Potenzreihen-Körper

$$K((T)) := \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \mid a_i \in K, \{i \in \mathbb{Z} \mid a_i \neq 0\} \text{ ist nach unten beschränkt} \right\}$$

aus Beispiel 2.15 ist henselsch.

Beweisskizze. Wir verwenden die Charakterisierung (5) aus Theorem 3.4. Betrachte also ein Polynom $f(X) \in \mathcal{O}_v[X]$ der Form

$$f(X) = X^d + X^{d-1} + \alpha_{d-2}X^{d-2} + \cdots + \alpha_0$$

mit $d = \deg(f) \geq 1$ und $\alpha_{d-2}, \ldots, \alpha_0 \in \mathfrak{m}_v$. Dabei seien geeignete Koeffizienten $a_{k,i} \in K$ für $0 \leq k \leq d-2$ und $i \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\alpha_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} T^i$ für $0 \leq k \leq d-2$ gilt.

Induktiv lässt sich zeigen, dass für $\beta \in K((T))$ mit $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i T^i$ die Gleichung

$$\beta^k = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{(i_j)=i}^{k} \prod_{j=1}^{k} b_{i_j} \right) T^i$$

gilt, wobei die Summe $\sum_{(i_j)=i}^{k}$ über alle Tupel $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ mit $\sum_{j=1}^{k} i_j = i$ läuft. Das Element $f(\beta)$ lässt sich dann schreiben als $f(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i T^i$ mit

$$f_0 = \sum_{(i_j)=0}^{d} b_{i_1} \cdots b_{i_d} + \sum_{(i_j)=0}^{d-1} b_{i_1} \cdots b_{i_{d-1}} = b_0^d + b_0^{d-1}$$

und

$$\begin{aligned} f_i = &\sum_{(i_j)=i}^{d} b_{i_1} \cdots b_{i_d} + \sum_{(i_j)=i}^{d-1} b_{i_1} \cdots b_{i_{d-1}} \\ &+ \sum_{(i_j)=i}^{d-1} b_{i_1} \cdots b_{i_{d-2}} \cdot a_{d-2,i_{d-1}} + \cdots + \sum_{(i_j)=i}^{2} b_{i_1} \cdot a_{1,i_2} + a_{0,i} \end{aligned}$$

für $i > 0$. Zum Term f_i tragen insbesondere nur die b_j mit $j \leq i$ bei. Daher lässt sich die Folge $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ rekursiv so wählen, dass $f_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit $f(\beta) = 0$ gilt. $\square$

3.2 Die Henselisierung eines bewerteten Körpers

Ähnlich wie jeder Körper mit einem Absolutbetrag bzw. einer Metrik eine Vervollständigung besitzt, hat auch jeder bewertete Körper eine (minimale) henselsche Erweiterung. Die charakteristischen Eigenschaften dieser sogenannten Henselisierung eines bewerteten Körpers (K, v), die bis auf eindeutigen K-Isomorphismus eindeutig ist, sind Inhalt dieses Kapitels.

Lemma 3.7. *Sei (K, v) ein bewerteter Körper und w eine Fortsetzung von v auf K^{sep}. Dann ist $D_{w,v} := \{\sigma \in G_K \mid \sigma(\mathcal{O}_v) = \mathcal{O}_v\}$ eine abgeschlossene Untergruppe der absoluten Galoisgruppe G_K und ihr Fixkörper $K^h(w) = \mathrm{Fix}(D_{w,v})$ zusammen mit der Bewertung $w{\restriction}K^h(w)$ ist henselsch. Außerdem sind $D_{w,v}$ und $D_{w',v}$ für zwei Fortsetzungen w, w' von v auf K^{sep} zueinander konjugiert, das heißt $K^h(w)$ und $K^h(w')$ isomorph.*

Beweis. Siehe [EP05, Lemma 5.2.1]. □

Definition 3.8. Seien K, v und w sowie $K^h(w)$ wie in Lemma 3.7. Dann heißt der bewertete Körper $\big(K^h(w), w{\restriction}K^h(w)\big)$ eine *Henselisierung von* (K, v).

Eine universelle Eigenschaft für Henselisierungen liefert das folgende Theorem, aus dem außerdem die Eindeutigkeit bis auf (eindeutigen) K-Isomorphismus folgt.

Theorem 3.9. *Sei (K, v) ein bewerteter Körper, K^h/K eine Körpererweiterung und v^h eine Fortsetzung von v auf K^h.*

Dann ist (K^h, v^h) genau dann eine Henselisierung von (K, v), wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) (K^h, v^h) ist henselsch und

(2) für jede Erweiterung von bewerteten Körpern $(L, w) \supseteq (K, v)$ für die (L, w) henselsch ist, existiert ein eindeutig bestimmter Körperhomomorphismus $\iota : K^h \hookrightarrow L$ mit $\iota(\mathcal{O}_{v^h}) = \mathcal{O}_w \cap \iota(K^h)$ und $\iota{\restriction}K = \mathrm{id}_K$.

Beweis. Siehe [EP05, Theorem 5.2.2]. □

Insbesondere ist ein bewerteter Körper genau dann henselsch, wenn er seine eigene Henselisierung ist.

Korollar 3.10. *Sei $(L, w) \supseteq (K, v)$ eine Erweiterung bewerteter Körper und (K^h, v^h) eine Henselisierung von (K, v) mit $(K^h, v^h) \supseteq (L, w)$. Dann ist (K^h, v^h) auch eine Henselisierung von (L, w).*

Beweis. Sei (L^h, w^h) eine Henselisierung von (L, w). Dann ist (L^h, w^h) insbesondere henselsch und eine Erweiterung von (K, v). Nach Theorem 3.9 für (K, v) und (K^h, v^h) gibt es also genau einen Körperhomomorphismus $\iota : K^h \hookrightarrow L^h$ mit $\iota(\mathcal{O}_{v^h}) = \mathcal{O}_{w^h} \cap \iota(K^h)$ und $\iota\restriction K = \mathrm{id}_K$.

Außerdem ist auch (K^h, v^h) henselsch und nach Voraussetzung eine Erweiterung von (L, w). Nach Theorem 3.9 für (L, w) und (L^h, w^h) gibt es damit genau einen Körperhomomorphismus $\kappa : L^h \hookrightarrow K^h$ mit $\kappa(\mathcal{O}_{w^h}) = \mathcal{O}_{v^h} \cap \kappa(L^h)$ und $\kappa\restriction L = \mathrm{id}_L$.

Dann ist $\kappa \circ \iota : K^h \hookrightarrow K^h$ ein Körperhomomorphismus mit

$$\begin{aligned}(\kappa \circ \iota)(\mathcal{O}_{v^h}) &= \kappa\left(\mathcal{O}_{w^h} \cap \iota(K^h)\right) = \kappa(\mathcal{O}_{w^h}) \cap (\kappa \circ \iota)(K^h) \\ &= \mathcal{O}_{v^h} \cap \kappa(L^h) \cap (\kappa \circ \iota)(K^h) = \mathcal{O}_{v^h} \cap (\kappa \circ \iota)(K^h),\end{aligned}$$

da κ injektiv ist und da $(\kappa \circ \iota)(K^h) \subseteq \kappa(L^h)$ gilt. Wegen $\iota\restriction K = \kappa\restriction K = \mathrm{id}_K$ ist außerdem auch $(\kappa \circ \iota)\restriction K = \mathrm{id}_K$ erfüllt. Wieder nach Theorem 3.9 für (K, v) und (K^h, v^h) gibt es jedoch nur genau einen Körperhomomorphismus, der diese Eigenschaften hat. Sie gelten aber offensichtlich auch für id_{K^h}, also folgt bereits $\kappa \circ \iota = \mathrm{id}_{K^h}$.

Damit ist κ surjektiv und insgesamt ein Isomorphismus zwischen L^h und K^h, der die Eigenschaft $\kappa(\mathcal{O}_{w^h}) = \mathcal{O}_{v^h} \cap \kappa(L^h) = \mathcal{O}_{v^h}$ erfüllt. Also ist (K^h, v^h) wie behauptet auch eine Henselisierung von (L, w). □

Eine wichtige Eigenschaft der Henselisierung ist, dass sie stets eine unmittelbare Erweiterung des zugrunde liegenden bewerteten Körpers ist, das heißt Wertegruppe und Restklassenkörper verändern sich beim Übergang zur Henselisierung nicht.

Theorem 3.11. *Ist (K, v) ein bewerteter Körper und (K^h, v^h) eine Henselisierung von (K, v), so ist die Erweiterung $(K^h, v^h)/(K, v)$ unmittelbar.*

Beweis. Siehe [EP05, Theorem 5.2.5]. □

Beispiel 3.12. Betrachte nun den Quotientenkörper $K(T)$ des Polynomrings über K, das heißt

$$K(T) := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \,\middle|\, a_i \in K, \{i \in \mathbb{Z} \,|\, a_i \neq 0\} \text{ ist endlich} \right\} \subseteq K((T)),$$

sowie für v wie in Beispiel 3.6 die Bewertung $v \restriction K(T)$ auf $K(T)$. Die Wertegruppe $\mathrm{im}(v\restriction K(T))$ dieser Bewertung ist nach Definition von v die Gruppe $\mathbb{Z}$ und der Restklassenkörper $K(T)\,(v\restriction K(T))$ ist K.

Ist $(K(T))^{\mathrm{sep}}$ ein separabler Abschluss von $K(T)$, so ist $L = (K(T))^{\mathrm{sep}} \cap K((T))$ mit der Bewertung $v\restriction L$ eine Henselisierung von $(K(T), v\restriction K(T))$.

Um zu zeigen, dass $(L, v\restriction L)$ henselsch ist, benötigen wir noch die folgende Aussage.

Lemma 3.13. *Sei $(L, w)/(K, v)$ eine Erweiterung bewerteter Körper und K sei relativ separabel abgeschlossen in L, das heißt jedes über K separable Element von L liege bereits in K. Dann ist (K, v) henselsch, falls (L, w) henselsch ist.*

Beweis. Siehe [EP05, Korollar 4.1.5]. □

Beweis von Beispiel 3.12. Die Aussagen über Wertegruppe und Restklassenkörper folgen genau wie in Beispiel 2.15.

Wegen $K(T) \subseteq L \subseteq (K(T))^{\mathrm{sep}}$ ist $(K(T))^{\mathrm{sep}}$ ein separabler Abschluss von L, das heißt L ist relativ separabel abgeschlossen in $K((T))$. Nach Beispiel 3.6 ist $K((T))$ außerdem henselsch, also folgt mit Lemma 3.13, dass auch $(L, v{\restriction}L)$ henselsch ist.

Damit lässt sich, nach Theorem 3.9, jede Henselisierung von $K(T)$ in L einbetten. Insbesondere existiert auch eine Henselisierung F von $K(T)$ mit $F \subseteq L$ und der Bewertung $v{\restriction}F$ auf F.

Sei nun $\alpha \in L$ ein beliebiges Element. Da die Wertegruppe und der Restklassenkörper der Bewertung $v \restriction K(T)$ mit vK bzw. Kv übereinstimmen, ist die Erweiterung $K((T)), v)/K(T), v \restriction K(T)$ unmittelbar. Damit ist auch $(F(\alpha), v \restriction F(\alpha))$ eine unmittelbare Erweiterung von $(F, v \restriction F)$. Weiter ist $\alpha \in L$ separabel über $K(T)$, also auch über F, das heißt $F(\alpha)/F$ ist eine endliche separable unmittelbare Körpererweiterung. Wegen $\mathrm{im}(v \restriction F) = \mathbb{Z}$ und da $(F, v \restriction F)$ henselsch ist, folgt mit Theorem 2.25 nun bereits $[F(\alpha) : F] = e(v{\restriction}F(\alpha)/v{\restriction}F) \cdot f(v{\restriction}F(\alpha)/v{\restriction}F) = 1$, also $\alpha \in F$. Da $\alpha \in L$ beliebig gewählt war, erhalten wir $L \subseteq F \subseteq L$. Wie behauptet ist $(L, v \restriction L)$ also eine Henselisierung von $(K(T), v{\restriction}K(T))$. □

3.3 Die kanonische henselsche Bewertung

Die Beweise der folgenden Aussagen führen wir im Kapitel 5 allgemeiner für $n_{\leq}$-henselsche Bewertungen. Die entsprechenden Aussagen für henselsche Bewertungen, die wir nun formulieren wollen, folgen dann als einfache Korollare, da jede henselsche Bewertung für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $n_{\leq}$-henselsch ist. Alternativ finden sich sämtliche Beweise dieses Abschnitts auch in [EP05, Section 4.4].

Theorem 3.14. *Sei K ein Körper und seien $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \subsetneq K$ zwei nicht-triviale unabhängige henselsche Bewertungsringe auf K. Dann ist $K = K^{\mathrm{sep}}$.*

Beweis. Siehe Korollar 5.11 oder [EP05, Theorem 4.4.1]. □

Wir partitionieren nun die Menge $H(K)$ der henselschen Bewertungsringe auf K in die beiden Teilmengen

$$H_1(K) = \{\mathcal{O}_v \in H(K) \,|\, (Kv)^{\mathrm{sep}} \neq Kv\} \text{ und}$$
$$H_2(K) = \{\mathcal{O}_v \in H(K) \,|\, (Kv)^{\mathrm{sep}} = Kv\}$$

Behauptung 3.15. *Die Menge $H_1(K)$ ist durch $\subseteq$ linear geordnet und für alle $\mathcal{O}_v \in H_2(K)$ und $\mathcal{O}_w \in H_1(K)$ gilt $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$.*

Beweis. Siehe Korollar 5.15 oder [EP05, Theorem 4.4.2]. □

Behauptung 3.16. *Durch $\mathcal{O}_{v_*} := \bigcap H_1(K)$ wird ein henselscher Bewertungsring auf K definiert.*

Beweis. Der Beweis funktioniert genau wie der von Behauptung 5.16. Siehe alternativ auch [EP05, Theorem 4.4.2]. □

Behauptung 3.17. *Falls $H_2(K) \neq \emptyset$ ist, so gibt es ein eindeutiges bezüglich $\subseteq$ maximales Element in $H_2(K)$.*

Beweis. Der Beweis funktioniert genau wie der von Behauptung 5.19. Siehe alternativ auch [EP05, Theorem 4.4.2]. □

Diese Aussagen erlauben uns, die kanonische henselsche Bewertung auf einem Körper K wie folgt zu definieren.

Definition 3.18. Sei K ein beliebiger Körper und sei

$$H_1(K) = \{\mathcal{O}_v \in H(K) \,|\, (Kv)^{\mathrm{sep}} \neq Kv\} \text{ und}$$
$$H_2(K) = \{\mathcal{O}_v \in H(K) \,|\, (Kv)^{\mathrm{sep}} = Kv\}\,.$$

Falls $H_2(K) \neq \emptyset$ ist, sei $\mathcal{O}_K$ das maximale Element von $H_2(K)$. Andernfalls setzen wir $\mathcal{O}_K := \mathcal{O}_{v_*} = \bigcap H_1(K)$. Die zu $\mathcal{O}_K$ gehörige Bewertung auf K sei mit v_K bezeichnet.

Die Bewertung v_K heißt dann die *kanonische henselsche Bewertung auf K*, der zugehörige Bewertungsring $\mathcal{O}_K$ heißt der *kanonische henselsche Bewertungsring auf K*.

Gilt $K^{\mathrm{sep}} = K$, so liegt jeder henselsche Bewertungsring auf K in $H_2(K)$, die kanonische henselsche Bewertung ist dann die gröbste henselsche Bewertung auf K – das heißt die triviale.

Ist K andererseits ein henselscher Körper, das heißt existiert überhaupt eine nicht-triviale henselsche Bewertung auf K, mit $K \neq K^{\mathrm{sep}}$, so ist auch die kanonische henselsche Bewertung nicht trivial: Im Fall $H_2(K) = \emptyset$ ist dann nämlich $\#H_1(K) \geq 2$ und $\mathcal{O}_K = \bigcap H_1(K) \neq K$ und andernfalls kann das maximale Element von $H_2(K)$, wegen $K^{\mathrm{sep}} \neq K$, nicht mit K übereinstimmen.

4 p-henselsche Bewertungen

Für das gesamte Kapitel halten wir eine beliebige Primzahl $p \in \mathbb{P}$ fest.

4.1 Grundlagen

Notation 4.1. Wir schreiben $K(p)$ für das Kompositum aller Galoiserweiterungen L/K, für die ein $k \in \mathbb{N}$ mit $[L : K] = p^k$ existiert.

Bemerkung 4.2. Ist $\alpha \in K(p)$, so gibt es insbesondere eine endliche Galoiserweiterung L/K mit $\alpha \in L \subseteq K(p)$, das heißt α ist algebraisch und separabel über K und das Minimalpolynom $\operatorname{mipo}_K(\alpha)$ von α über K zerfällt über L in Linearfaktoren. Die Körpererweiterung $K(p)/K$ ist daher algebraisch, normal und separabel, also bereits eine Galoiserweiterung.

Bemerkung 4.3. Ist $K \neq K(p)$, das heißt besitzt K eine Galoiserweiterung L vom Grad p^k für ein $k \in \mathbb{N}$, so besitzt K bereits eine Galoiserweiterung vom Grad p:

Die Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ ist dann nämlich eine p-Gruppe und damit auflösbar. Insbesondere gibt es einen Normalteiler $G_1 \trianglelefteq G$, für den der Quotient G/G_1 zyklisch von Ordnung p ist. Deren Fixkörper $F = \operatorname{Fix}_K(G_1)$ ist dann eine Galoiserweiterung von K mit $[F : K] = \#G/G_1 = p$.

Ersetzen wir nun in der Definition 3.1 der henselschen Bewertung die Körpererweiterung K^{alg} von K durch das Kompositum $K(p)$ aller endlichen Galoiserweiterungen, deren Grad eine Potenz von p ist, so erhalten wir den Begriff der p-henselschen Bewertung.

Definition 4.4. Sei (K, v) ein bewerteter Körper.

(1) Die Bewertung v (bzw. der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$) heißt *p-henselsch*, falls $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf $K(p)$ hat.

(2) Der Körper K heißt *p-henselsch*, falls es eine nicht-triviale p-henselsche Bewertung auf K gibt.

Ähnlich wie für henselsche Bewertungen gibt es eine Reihe verschiedener Charakterisierungen dieses Begriffs. Wir erwähnen hier nur die für uns wichtigsten.

Theorem 4.5. *Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Dann sind äquivalent:*

(1) Die Bewertung v ist p-henselsch.

(2) Für jede Galoiserweiterung L/K mit $[L : K] = p$ hat $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf L.

(3) *Jedes Polynom $f \in \mathcal{O}_v[X]$, das über $K(p)$ in Linearfaktoren zerfällt und für das $\mathrm{res}_{Kv}(f) \in Kv[X]$ eine einfache Nullstelle $\alpha \in Kv$ im Restklassenkörper besitzt, hat eine Nullstelle $a \in \mathcal{O}_v$ mit $a + \mathfrak{m}_v = \alpha$.*

(4) *Ist $f \in \mathcal{O}_v[X]$ ein Polynom, das über $K(p)$ in Linearfaktoren zerfällt und ist $a \in \mathcal{O}_v$ mit $v(f(a)) > 2v(f'(a))$, so hat f eine Nullstelle in K (äquivalent: in $\mathcal{O}_v$) mit $v(b-a) > v(f'(a))$.*

(5) *Es gilt $K = K^h \cap K(p)$ für jede Henselisierung (K^h, v^h) von (K, v).*

Beweis. Für die Äquivalenzen (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) siehe [EP05, Theorem 4.2.2 und Theorem 4.2.3].

Für die Implikation (4) $\Rightarrow$ (5) siehe [Koe95, Proposition 1.2 (iii) $\Rightarrow$ (iv)].

Wir zeigen nun zunächst (5) $\Rightarrow$ (3) und anschließend (3) $\Rightarrow$ (4).

Sei dazu (K^h, v^h) eine Henselisierung von (K, v) und $f \in \mathcal{O}_v[X]$ sei ein Polynom, das über $K(p)$ in Linearfaktoren zerfällt und für das $\mathrm{res}_{Kv}(f)$ eine einfache Nullstelle $\alpha \in Kv$ im Restklassenkörper besitzt. Wegen $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_{v^h}$ gilt dann auch $f \in \mathcal{O}_{v^h}[X]$ und da die Erweiterung $(K^h, v^h)/(K, v)$ unmittelbar ist, ist α eine einfache Nullstelle von $\mathrm{res}_{K^h v^h}(f) = \mathrm{res}_{Kv}(f)$ im Restklassenkörper $K^h v^h = Kv$.

Nun ist (K^h, v^h) henselsch, also hat f eine Nullstelle $a \in \mathcal{O}_{v^h} \subseteq K^h$ mit $a + \mathfrak{m}_{v^h} = \alpha$. Da das Polynom f über $K(p)$ in Linearfaktoren zerfällt, gilt schon $a \in K^h \cap K(p) = K$ und mit Lemma 2.19 folgt $a \in \mathcal{O}_v$. Wegen $a + \mathfrak{m}_{v^h} = \alpha$ folgt, da die Henselisierung eine unmittelbare Erweiterung ist, auch $a + \mathfrak{m}_v = \alpha$.

Um zu zeigen, dass auch (3) $\Rightarrow$ (4) gilt, sei nun $f \in \mathcal{O}_v[X]$ ein Polynom, das über $K(p)$ in Linearfaktoren zerfällt und $a \in \mathcal{O}_v$ sei so, dass $v(f(a)) > 2v(f'(a))$ gilt. Wir passen den Beweis von [EP05, Theorem 4.1.3, (4) $\Rightarrow$ (5)] geeignet an. Die Taylor-Entwicklung von f nach a liefert uns ein Polynom $g \in \mathcal{O}_v[X]$ mit

$$f(a - x) = f(a) - f'(a)x + x^2 g(x)$$

für jedes $x \in K$. Mit g ist auch die Abbildung $h : K \to K$, die durch $h(x) := g(f'(a) \cdot x)$ definiert wird, ein Polynom über dem Bewertungsring $\mathcal{O}_v$, da aus $f' \in \mathcal{O}_v[X]$ und $a \in \mathcal{O}_v$ auch $f'(a) \in \mathcal{O}_v$ folgt. Für beliebiges $y \in K$ und $x = f'(a) \cdot y$ erhalten wir dann

$$f(a - f'(a)y) = f(a) - f'(a)^2 y + f'(a)^2 y^2 h(y).$$

Nun ist $v(f'(a)^2) < v(f(a)) \leq \infty$, also $f'(a)^2 \neq 0$. Damit ergibt sich

$$\frac{f(a - f'(a)y)}{f'(a)^2} = \frac{f(a)}{f'(a)^2} - y + y^2 h(y) =: f_1(y),$$

und wir erhalten ein weiteres Polynom $f_1 \in K[X]$, welches nach der Voraussetzung $v(f(a)) > v(f'(a)^2)$ ebenfalls in $\mathcal{O}_v[X]$ liegt. Wieder wegen $v(f(a)) > v(f'(a)^2)$ folgt nun

$\mathrm{res}_{Kv}(f_1)(X) = -X + X^2 h(X) = X \cdot (-1 + X \cdot h(X))$, das heißt $0 \in Kv$ ist eine einfache Nullstelle des Polynoms $\mathrm{res}_{Kv}(f_1)$.

Weiter ist die Vorschrift $y \mapsto a - f'(a) \cdot y$ nach Definition von f_1 offensichtlich eine bijektive Abbildung zwischen den Nullstellenmengen von f_1 bzw. von f, das heißt mit f zerfällt auch f_1 über $K(p)$ in Linearfaktoren. Nach Voraussetzung hat f_1 dann eine Nullstelle $y \in K$ mit $y + \mathfrak{m}_v = 0$, also $y \in \mathfrak{m}_v$. Für diese ist dann $b = a - f'(a) \cdot y$ eine Nullstelle von f und es gilt $v(b - a) = v(-f'(a) \cdot y) > v(f'(a))$. □

4.2 Die eindeutige p-henselsche Topologie

Ähnlich wie im Fall henselscher (bzw. $n_{\leq}$-henselscher) Bewertungen induzieren alle p-henselschen Bewertungen auf einem Körper – unter gewissen Voraussetzungen – dieselbe Topologie. Genauer gilt die folgende Aussage, deren Beweis die nächsten Seiten in Anspruch nimmt.

Theorem 4.6 ([Koe95, Theorem 2.1])**.** *Sei K ein Körper, der eine primitive p-te Einheitswurzel $\zeta_p \in K$ enthält, falls $\mathrm{char}(K) \neq p$ ist. Sind $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \subseteq K$ zwei unabhängige nicht-triviale p-henselsche Bewertungsringe auf K, so ist $K = K(p)$.*

Aus Gründen der Übersichtlichkeit teilen wir den Beweis in zwei Lemmata auf, die getrennt die Fälle $\mathrm{char}(K) \neq p$ und $\mathrm{char}(K) = p$ behandeln. Wir zeigen jeweils, dass alle nicht-trivialen p-henselschen Bewertungen auf K dieselbe Topologie induzieren, falls $K \neq K(p)$ gilt. Die Behauptung aus Theorem 4.6 folgt dann sofort durch Einnahme der Kontraposition.

Zuerst behandeln wir den Fall $\mathrm{char}(K) \neq p$ (und $\zeta_p \in K$ für eine p-te Einheitswurzel ζ_p). Es bezeichne $K^p = \{x^p \mid x \in K\}$ die Menge der p-ten Potenzen in K.

Lemma 4.7. *Sei K ein Körper und v eine nicht-triviale p-henselsche Bewertung auf K. Weiter gelte $K \neq K(p)$, das heißt K habe eine Galoiserweiterung vom Grad p.*

Ist $\mathrm{char}(K) \neq p$ und $\zeta_p \in K$ eine p-te Einheitswurzel, so ist die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ a \cdot (K^p)^\times + b \mid a \in K^\times, b \in K \right\}$$

eine Subbasis der von v induzierten Topologie $\mathcal{T}_v$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jedes Element von $\mathcal{S}$ eine bezüglich $\mathcal{T}_v$ offene Menge ist. Betrachte dazu für $b \in \mathfrak{m}_v$ das Polynom $f(X) = X^p - (p^2 b + 1) \in \mathcal{O}_v[X]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v(f(1)) &= v(-p^2 b) = v(p^2) + v(b) = 2v(p) + v(b) \text{ und} \\ v(f'(1)) &= v(p \cdot 1) = v(p), \end{aligned}$$

also ist $v(f(1)) - 2v(f'(1)) = v(b) > 0$. Wegen $\zeta_p \in K \subseteq K(p)$ zerfällt das Polynom f außerdem über $K(p)$ in Linearfaktoren. Nach dem Kriterium (4) aus Theorem 4.5 hat f

damit eine Nullstelle $a \in K$ und wir erhalten $p^2b + 1 = a^p \in K^p$. Da $b \in \mathfrak{m}_v$ beliebig gewählt war, folgt $p^2\mathfrak{m}_v + 1 \subseteq K^p$. Wegen $v(p) \geq 0$, also $v(-p^{-2}) = -2v(p) \leq 0$ ist $-p^{-2} \notin \mathfrak{m}_v$, das heißt $0 \notin p^2\mathfrak{m}_v + 1$. Es folgt $(K^p)^\times \subseteq (K^p)^\times \cdot (p^2\mathfrak{m}_v + 1) \subseteq (K^p)^\times$ und damit

$$(K^p)^\times = (K^p)^\times \cdot (p^2\mathfrak{m}_v + 1) = \bigcup_{a \in K^\times} ap^2\mathfrak{m}_v + a^p \in \mathcal{T}_v.$$

Nach Bemerkung 2.35 gilt dann bereits $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_v$ und es folgt $\mathcal{T}_\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_v$ für die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{m}_v$ bezüglich der von $\mathcal{S}$ erzeugten Topologie offen ist. Beachte, dass die Menge $p^2\mathfrak{m}_v \setminus K^p$ nicht leer ist: Für $a \in K \setminus \{0\}$ wähle $b \in K^\times$ mit $ab \in \mathfrak{m}_v$ und $a^2b \in \mathfrak{m}_v$. Dann ist $(p^2a^2b)(p^2ab)^{-1} = a$. Wäre nun $p^2\mathfrak{m}_v \subseteq K^p$, so hätten wir $a \in (p^2\mathfrak{m}_v) \cdot (p^2\mathfrak{m}_v)^{-1} \subseteq K^p$ für alle $a \in K$, also $K = K^p$.

Nun gibt es nach Bemerkung 4.3 eine zyklische Galoiserweiterung L/K vom Grad p, etwa $L = K(\alpha)$ mit $\alpha^p \in K$. Aus $K = K^p$ folgt dann aber $L = K$, ein Widerspruch!

Wir können daher ein $a \in p^2\mathfrak{m}_v \setminus K^p$ wählen. Dann ist $U := (a - a\cdot(K^p)^\times) \cap (a^2 - a^2\cdot(K^p)^\times)$ der Schnitt zweier Mengen aus $\mathcal{S}$. Wir zeigen nun $0 \in U \subseteq \mathfrak{m}_v$, woraus $\mathfrak{m}_v \subseteq U + \mathfrak{m}_v \subseteq \mathfrak{m}_v$ und damit $\mathfrak{m}_v = U + \mathfrak{m}_v = \bigcup_{b \in \mathfrak{m}_v}(U + b)$ folgt. Dass $0 \in U$ gilt, ist wegen $1 \in (K^p)^\times$ klar. Für $x \in U$ existieren nun nach Definition $y, z \in K^\times$ mit $x = a - ay^p = a^2 - a^2z^p$.

Wir zeigen nun $x \in \mathfrak{m}_v$. Dabei können wir annehmen, dass $\min\{v(a), v(a-x)\} = v(a-x)$ gilt – denn wegen $v(x) \geq \min\{v(a), v(a-x)\}$ und $v(a) > 0$ folgt andernfalls bereits $v(x) > 0$, also $x \in \mathfrak{m}_v$. Damit gilt insbesondere $v(x) \geq \min\{v(a), v(a-x)\} = v(a-x)$.

Wäre jetzt $x \notin \mathfrak{m}_v$, so hätten wir

$$v(a^2 - a) \geq \min\{2v(a), v(a)\} = v(a) > v(p^2) \geq v(xp^2).$$

und es ergäbe sich $v(a^2 - a) > v(xp^2) \geq v((a-x)p^2)$, also $a^2 - a \in (a-x)p^2 \cdot \mathfrak{m}_v$. Folglich wäre

$$\begin{aligned} a^2 - x = (a^2 - a) + (a - x) &\in (a-x)p^2 \cdot \mathfrak{m}_v + (a - x) \\ &= (a-x)(p^2 \cdot \mathfrak{m}_v + 1) \end{aligned}$$

und aus $a - x = ay^p \in a \cdot (K^p)^\times$ und $p^2 \cdot \mathfrak{m}_v + 1 \subseteq (K^p)^\times$ folgte $a^2 - x \in a \cdot (K^p)^\times$. Damit wäre $a^2z^p = a^2 - x \in a \cdot (K^p)^\times \cap a^2 \cdot (K^p)^\times$, es gäbe also ein $w \in K^\times$ mit $a^2z^p = aw^p$. Dies führt nun mit $a = a^2z^p(a^2w^p)^{-1} = (zw^{-1})^p \in K^p$ zum Widerspruch zur Wahl von $a \notin K^p$.

Es ist also $0 \in U \subseteq \mathfrak{m}_v$ und damit ist $\mathfrak{m}_v = U + \mathfrak{m}_v$ offen bezüglich der von $\mathcal{S}$ erzeugten Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ auf K. Da die Abbildungen $x \mapsto a \cdot x$ und $x \mapsto x + b$ für alle $a \in K^\times$ und alle $b \in K$ bezüglich $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ offensichtlich stetig sind, folgt $\mathcal{T}_v \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{S}$. □

Für den Fall $\mathrm{char}(K) = p$ setze nun $K^{(p)} := \{x^p - x \mid x \in K\}$.

Lemma 4.8. *Sei K ein Körper und v eine nicht-triviale p-henselsche Bewertung auf K. Weiter gelte $K \neq K(p)$, das heißt K habe eine Galoiserweiterung vom Grad p.*

Ist $\operatorname{char}(K) = p$, *so ist die Menge*

$$\mathcal{B} = \left\{ M_{c,d}^{a,b} \,|\, a,b,c,d \in K, ad - bc \neq 0 \right\}$$

für $M_{c,d}^{a,b} := \left\{ \frac{ax+b}{cx+d} \,|\, x \in K^{(p)}, cx + d \neq 0 \right\}$ *eine Basis der von v induzierten Topologie $\mathcal{T}_v$.*

Beweis. Fixiere zunächst beliebige Elemente $a, b, c, d \in K$ mit $ad - bc \neq 0$. Wir zeigen dann, dass $M_{c,d}^{a,b}$ bezüglich der von v induzierten Topologie $\mathcal{T}_v$ offen ist.

Für $x \in K$ mit $cx + d \neq 0$ und $c \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{cx+d} &= \frac{bc-ad}{c^2x+cd} + \frac{acx+ad}{c^2x+cd} = \frac{bc-ad}{c^2x+cd} + \frac{a}{c} = \frac{1}{x+\frac{d}{c}} \cdot \frac{bc-ad}{c^2} + \frac{a}{c} \\ &= \left(x + \frac{d}{c}\right)^{-1} \cdot \frac{bc-ad}{c^2} + \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

das heißt die Abbildung $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ ist als Komposition von Translationen, Inversion und einer Dilatation bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_v$ stetig und offen auf der Menge $\{x \in K \,|\, cx + d \neq 0\}$. Für $c = 0$ und $d \neq 0$ ist $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ ebenfalls stetig und offen (auf $\{x \in K \,|\, cx + d \neq 0\} = K$).

Wegen $M_{c,d}^{a,b} = f(K^{(p)} \cap \{x \in K \,|\, cx + d \neq 0\})$ genügt es daher, zu zeigen, dass die Menge $K^{(p)} \cap \{x \in K \,|\, cx + d \neq 0\}$ bezüglich $\mathcal{T}_v$ offen ist. Es gilt

$$\{x \in K \,|\, cx + d \neq 0\} = \begin{cases} \emptyset, & c = d = 0 \\ K, & c = 0, d \neq 0 \\ K \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, & c, d \neq 0 \end{cases}$$
$$\in \mathcal{T}_v,$$

also genügt es sogar, $K^{(p)} \in \mathcal{T}_v$ zu zeigen.

Betrachte dazu für beliebiges $b \in \mathfrak{m}_v$ das Polynom $q(X) = X^p - X - b \in \mathcal{O}_v[X]$. Für eine Nullstelle α von q sind, wegen $\operatorname{char}(K) = p$, auch $\alpha + 1, \ldots, \alpha + (p-1) \in K(\alpha)$ Nullstellen von q, das heißt q zerfällt über $K(\alpha)$ und damit auch über $K(p) \supseteq K(\alpha)$ in Linearfaktoren. Weiter ist $\operatorname{res}_{Kv}(q) = X^p - X$ separabel über Kv und hat daher die einfache Nullstelle $1 + \mathfrak{m}_v \in Kv$. Da (K, v) nach Voraussetzung p-henselsch ist, hat q damit eine Nullstelle $a \in K$. Folglich ist $b = a^p - a \in K^{(p)}$ und da $b \in \mathfrak{m}_v$ beliebig war, erhalten wir $\mathfrak{m}_v \subseteq K^{(p)}$.

Weil die Menge $K^{(p)}$, wegen $(x^p - x) + (y^p - y) = (x+y)^p - (x+y)$, für alle $x, y \in K$ additiv abgeschlossen ist, folgt

$$K^{(p)} = \bigcup_{x \in K^{(p)}} \mathfrak{m}_v + x \in \mathcal{T}_v$$

und damit, wie zuvor im Beweis von Lemma 4.7 argumentiert, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_v$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass $\mathcal{B}$ sogar eine Basis der von v induzierten Topologie $\mathcal{T}_v$ auf K ist. Wegen $\lambda \cdot M_{c,d}^{a,b} = M_{c,d}^{\lambda a, \lambda b}$ und $M_{c,d}^{a,b} + t = M_{c,d}^{a+tc, b+td}$ sind die Abbildungen $x \mapsto \lambda x$ und $x \to x + t$ für alle $\lambda, t \in K$ stetig (und offen) bezüglich der von $\mathcal{B}$ erzeugten Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Daher genügt es, $\mathfrak{m}_v \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ zu zeigen.

Da v nach Voraussetzung nicht-trivial ist, gibt es ein Element $a \in \mathfrak{m}_v \setminus \{0\}$. Setzen wir $q(X) := aX^p - aX - 1 \in \mathcal{O}_v[X]$, so hat das Polynom $\mathrm{res}_{Kv}(q) = -1 \neq 0$ dann keine Nullstelle in Kv, also hat auch q keine Nullstelle in K. Damit ist $a^{-1} \neq x^p - x$ für alle $x \in K$, also $a^{-1} \notin K^{(p)}$. Insbesondere gilt $K^{(p)} \cap \left\{x \in K \,|\, 1 \cdot x - a^{-1} \neq 0\right\} = K^{(p)}$. Setze nun

$$U := M_{1,-a^{-1}}^{a^2,0} = \left\{ \frac{a^2 x}{x - a^{-1}} \,|\, x \in K^{(p)} \right\}.$$

Wir zeigen $0 \in U \subseteq \mathfrak{m}_v$, woraus – genau wie zuvor im Fall $\mathrm{char}(K) \neq p$ – mit der Identität $\mathfrak{m}_v = U + \mathfrak{m}_v = \bigcup_{b \in \mathfrak{m}_v} U + b \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ die Behauptung folgt.

Dass $0 \in U$ gilt, ist wegen $0 \in K^{(p)}$ klar. Um $U \subseteq \mathfrak{m}_v$ zu zeigen, sei $y \in U$ beliebig und $x \in K^{(p)}$ so, dass $y = \frac{a^2 x}{x - a^{-1}}$ gilt. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1. $v(x) = v(a^{-1}) = -v(a)$.

Wegen $x \in K^{(p)}$ und $a^{-1} \notin K^{(p)}$ gilt dann $x - a^{-1} \notin K^{(p)} \supseteq \mathfrak{m}_v$, das heißt $v(x - a^{-1}) \leq 0$. Es folgt $v(a^2) + v(x) - v(x - a^{-1}) \geq v(a^2) + v(x) = v(a) > 0$.

Fall 2. $v(x) > v(a^{-1})$.

Dann ist $v(x - a^{-1}) = \min\left\{v(x), v(a^{-1})\right\} = v(a^{-1})$ und daher $v(x) - v(x - a^{-1}) = v(x) - v(a^{-1}) > 0$. Es folgt $v(a^2) + v(x) - v(x + a^{-1}) > v(a^2) > 0$.

Fall 3. $v(x) < v(a^{-1})$.

Dann ist $v(x - a^{-1}) = \min\left\{v(x), v(a^{-1})\right\} = v(x)$ und es folgt sofort die Ungleichung $v(a^2) + v(x) - v(x - a^{-1}) = v(a^2) > 0$.

In allen drei Fällen gilt $v(y) = v\left(\frac{a^2 x}{x - a^{-1}}\right) = v(a^2) + v(x) - v(x - a^{-1}) > 0$, das heißt $y \in \mathfrak{m}_v$. Da $y \in U$ beliebig gewählt war, erhalten wir – wie behauptet – nun $U \subseteq \mathfrak{m}_v$. $\square$

5 $n_{\leq}$-henselsche Bewertungen

5.1 Grundlagen

Am Beispiel der p-henselschen Bewertung haben wir gesehen, wie sich aus der Definition 3.1 eine Verallgemeinerung des Begriffs der henselschen Bewertung durch das Ersetzen von K^{alg} durch andere Körpererweiterungen von K ergibt.

Legen wir dagegen etwa Hensels Lemma als definierende Eigenschaft henselscher Bewertungen zugrunde, so ergibt sich eine andere natürliche Verallgemeinerung des Begriffs: Wir fordern nicht mehr die uneingeschränkte Gültigkeit der Aussage von Hensels Lemma, sondern beschränken uns dabei auf bestimmte Polynome. Im Fall p-henselscher Bewertung waren dies genau die Polynome, die in $K(p)$ in Linearfaktoren zerfallen.

In [FJ15, Definition 6.1] führen Fehm und Jahnke den Begriff der $n_{\leq}$-henselschen Bewertung ein, indem sie die Forderung in der Aussage von Hensels Lemma auf Polynome vom Grad $\leq n$ beschränken.

Wir wählen hier eine etwas schwächere Definition, die uns später die Einführung der kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung, analog zur kanonischen henselschen Bewertung, erlaubt. Dazu beschränken wir uns in der Forderung nach der Existenz von Nullstellen auf doppelt-normierte Polynome vom Grad $\leq n$, deren Koeffizienten (bis auf die ersten beiden) im maximalen Ideal liegen (vgl. Kriterium (5) aus Theorem 3.4).

Definition 5.1. Sei (K, v) ein bewerteter Körper.

(1) Die Bewertung v (bzw. der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$) heißt *$n_{\leq}$-henselsch*, falls jedes Polynom $f \in \mathcal{O}_v[X]$ der Form

$$f(X) = X^d + X^{d-1} + a_{d-2}X^{d-2} + \cdots + a_0$$

mit $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_v$ und $1 \leq d = \deg(f) \leq n$ eine Nullstelle in K (äquivalent: in $\mathcal{O}_v$) besitzt.

(2) Der Körper K heißt *$n_{\leq}$-henselsch*, falls es eine nicht-triviale $n_{\leq}$-henselsche Bewertung auf K gibt.

Erlauben wir einen von 1 verschiedenen $(d-1)$-ten Koeffizienten, der allerdings nicht im maximalen Ideal liegen darf, so erhalten wir denselben Begriff.

Lemma 5.2. *Sei K ein Körper und v eine Bewertung auf K, sei $\mathcal{O}_v$ der zugehörige Bewertungsring. Dann ist v genau dann $n_{\leq}$-henselsch, wenn jedes Polynom $f \in \mathcal{O}_v[X]$ der Form*

$$f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + a_{d-2}X^{d-2} + \cdots + a_0$$

mit $a_{d-1} \notin \mathfrak{m}_v$ sowie $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_v$ und $d = \deg(f) \leq n$ eine Nullstelle in K (äquivalent: in $\mathcal{O}_v$) besitzt.

Beweis. Da $1 \notin \mathfrak{m}_v$ für jede Bewertung v auf K gilt, ist jede Bewertung, die das Kriterium in Lemma 5.2 erfüllt, $n_{\leq}$-henselsch.

Um zu zeigen, dass dieses Kriterium umgekehrt bereits für jede $n_{\leq}$-henselsche Bewertung v erfüllt ist, reproduzieren wir den Beweis von (7) $\Rightarrow$ (6) in [EP05, Theorem 4.1.3].

Sei dazu ein Polynom $f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}_v[X]$ mit $a_{d-1} \notin \mathfrak{m}_v$ und $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_v$ sowie $d \leq n$ gegeben. Insbesondere ist dann $a_{d-1} \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_v = \mathcal{O}_v^\times$, also auch $a_{d-1}^{-1} \in \mathcal{O}_v^\times$. Wir setzen $b_{d-i} := a_{d-i} \cdot a_{d-1}^{-i}$ für $2 \leq i \leq d$ und erhalten mit

$$g(Y) := a_{d-1}^{-d} \cdot f(a_{d-1}Y) = Y^d + Y^{d-1} + b_{d-2}Y^{d-2} + \cdots + b_0$$

ein Polynom $g \in \mathcal{O}_v[Y]$ dessen Koeffizienten $b_{d-i} = a_{d-i} \cdot a_{d-1}^{-i} \in \mathfrak{m}_v \cdot \mathcal{O}_v \subseteq \mathfrak{m}_v$ im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_v$ liegen. Da v nach Voraussetzung $n_{\leq}$-henselsch ist, hat g daher eine Nullstelle $b \in K$. Für diese ist dann $a = a_{d-1}b \in K$ eine Nullstelle von f. $\square$

Für $n_{\leq}$-henselsche Bewertungen erhalten wir eine eingeschränkte Variante des Theorems 3.4 über die Charakterisierung henselscher Bewertungen. Um die entsprechenden Aussagen zu formulieren, führen wir den folgenden Begriff ein.

Notation 5.3. Für eine endliche Galoiserweiterung L/K bezeichne

$$[L : K]_{\text{poly}} := \min\{\deg(f) \,|\, L \text{ ist Zerfällungskörper des irreduziblen Polynoms } f \in K[X]\}$$

den *Polynom-Grad* der Erweiterung.

Wir schreiben $K^{\leq}(d)$ für das Kompositum aller Galoiserweiterungen L/K vom Polynom-Grad $[L : K]_{\text{poly}} \leq d$.

Bemerkung 5.4. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ einer endlichen Galoiserweiterung L/K ist stets eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_d für $d = [L : K]_{\text{poly}}$. Damit ist $[L : K] = \#\,\mathrm{Gal}(L/K)$ immer ein Teiler von $\#S_d = [L : K]_{\text{poly}}!$, insbesondere gilt für jede endliche Galoiserweiterung L/K die Ungleichung $[L : K] \leq [L : K]_{\text{poly}}!$.

Theorem 5.5. *Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Dann gilt (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) für die folgenden Aussagen.*

(1) Der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ hat eine eindeutige Fortsetzung auf jede Galoiserweiterung von K vom Polynom-Grad $\leq n$.

(2) Jedes Polynom $f \in \mathcal{O}_v[X]$ mit $\deg(f) \leq n$, für das $\mathrm{res}_{Kv}(f) \in Kv[X]$ im Restklassenkörper eine einfache Nullstelle $\alpha \in Kv$ besitzt, besitzt auch eine Nullstelle $a \in \mathcal{O}_v$ mit $a + \mathfrak{m}_v = \alpha$.

(3) Die Bewertung v ist $n_{\leq}$-henselsch.

(4) Der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ hat eine eindeutige Fortsetzung auf jede Galoiserweiterung von K vom Grad $\leq n$.

Beweis. Wir orientieren uns an den Beweisen von [EP05, Theorem 4.1.3] und [FJ15, Lemma 6.3].

(1) $\Rightarrow$ (2): Es sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf jede Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $\leq n$ hat. Zu zeigen ist, dass dann jedes Polynom über $\mathcal{O}_v$ vom Grad $\leq n$, das eine einfache Nullstelle $\alpha \in Kv$ im Restklassenkörper besitzt, auch eine Nullstelle $a \in \mathcal{O}_v$ mit $a + \mathfrak{m}_v = \alpha$ hat.

Sei dazu $\bar{f} \in Kv[X]$ ein Polynom mit $1 \leq \deg(\bar{f}) =: d \leq n$, das im Restklassenkörper Kv eine einfache Nullstelle α besitzt. Ohne Einschränkung sei $\bar{f}$ normiert und irreduzibel in $Kv[X]$. Dann gibt es ein normiertes Polynom $f \in \mathcal{O}_v[X]$ mit $\deg(f) = \deg(\bar{f})$ und $\mathrm{res}_{Kv}(f) = \bar{f}$. Da $\bar{f}$ in $Kv[X]$ irreduzibel ist, ist f nach Bemerkung 2.33 irreduzibel in $K[X]$. Für den Zerfällungskörper L von f gilt damit $[L : K]_{\text{poly}} \leq d \leq n$, also gibt es nach der Voraussetzung (1) eine eindeutige Fortsetzung $\mathcal{O}_w$ von $\mathcal{O}_v$ auf L. Alle Nullstellen $a_1, \ldots, a_d \in L$ von f liegen nach Lemma 2.19 bereits in $\mathcal{O}_w$. Außerdem sind sämtliche Nullstellen von $\mathrm{res}_{Lw}(f)$ in Lw durch $a_1 + \mathfrak{m}_w, \ldots, a_d + \mathfrak{m}_w$ gegeben und eine davon muss bereits $\alpha \in Kv \subseteq Lw$ sein. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $a_1 + \mathfrak{m}_w = \alpha$ gilt.

Wir zeigen nun durch einen Widerspruchsbeweis, dass $\deg(f) = d = 1$ gilt. Angenommen also, es wäre $d > 1$. Dann gäbe es ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\sigma(a_1) = a_2$. Mit $\mathcal{O}_w$ ist dabei auch $\sigma(\mathcal{O}_w) \subseteq L$ wieder ein Bewertungsring auf L, der $\mathcal{O}_v$ fortsetzt. Da es aber nur eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_v$ auf L gibt, folgt $\sigma(\mathcal{O}_w) = \mathcal{O}_w$ und damit auch $\sigma(\mathfrak{m}_w) = \mathfrak{m}_w$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : Lw &\to Lw \\ a + \mathfrak{m}_w &\mapsto \sigma(a) + \mathfrak{m}_w \end{aligned}$$

ist daher ein Kv-Automorphismus von Lw, und wegen $\alpha \in Kv$ folgt

$$a_2 + \mathfrak{m}_w = \sigma(a_1) + \mathfrak{m}_w = \bar{\sigma}(a_1 + \mathfrak{m}_w) = \bar{\sigma}(\alpha) = \alpha.$$

Dann kann aber $\alpha = a_1 + \mathfrak{m}_w = a_2 + \mathfrak{m}_w$ entgegen der Voraussetzungen keine einfache Nullstelle von $\bar{f}$ sein, ein Widerspruch. Folglich muss schon $\deg(f) = 1$ gelten, womit f insbesondere eine Nullstelle in K besitzt.

(2) $\Rightarrow$ (3): Angenommen, jedes Polynom über $\mathcal{O}_v$ vom Grad $\leq n$, das im Restklassenkörper Kv eine einfache Nullstelle besitzt, habe auch eine Nullstelle in $\mathcal{O}_v \subseteq K$. Wir zeigen, dass $\mathcal{O}_v$ dann $n_{\leq}$-henselsch ist.

Sei dazu $f(X) = X^d + X^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}_v[X]$ mit $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_v$ sowie $d \leq n$ gegeben. Dann ist $\mathrm{res}_{Kv}(f) = X^d + X^{d-1} = (X + (1 + \mathfrak{m}_v)) \cdot X^{d-1}$, also ist $-1 + \mathfrak{m}_v \neq \mathfrak{m}_v$ eine einfache Nullstelle von $\mathrm{res}_{Kv}(f)$ in Kv. Nach der Voraussetzung (2) hat das Polynom f damit eine Nullstelle in $\mathcal{O}_v \subseteq K$, das heißt v ist $n_{\leq}$-henselsch.

(3) $\Rightarrow$ (4): Zu zeigen ist, dass jeder $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ auf K sich eindeutig auf jede Galoiserweiterung von K vom Grad $\leq n$ fortsetzt.

Wir zeigen die Kontraposition. Sei also N/K eine Galoiserweiterung vom Grad $\leq n$, für die es mindestens zwei Fortsetzungen von $\mathcal{O}_v$ auf N gibt. Sämtliche dieser Fortsetzungen seien mit $\mathcal{O}_{v_1^N}, \ldots, \mathcal{O}_{v_m^N} \subseteq N$ benannt. Sei

$$H = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K) \,|\, \sigma(\mathcal{O}_{v_1}) = (\mathcal{O}_{v_1})\} \leq \mathrm{Gal}(N/K),$$

wobei $\mathrm{Gal}(N/K)$ die Galoisgruppe der Erweiterung N/K bezeichne, und betrachte den Fixkörper

$$L = \mathrm{Fix}(H) = \{x \in N \,|\, \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in H\}$$

der Gruppe H. Wegen $m > 1$ ist $H \neq \mathrm{Gal}(N/K)$ und damit auch $L \neq K$. Weiter sei $\mathcal{O}_{v_i^L} = \mathcal{O}_{v_i^N} \cap L$ für $1 \leq i \leq m$ und $R = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_{v_i^L}$ sowie $\mathfrak{p}_i = R \cap \mathfrak{m}_{v_i^L}$ für alle i.

Ohne Einschränkung sind die $\mathcal{O}_{v_i^L}$ so nummeriert, dass

$$\left\{\mathcal{O}_{v_1^L}, \ldots, \mathcal{O}_{v_k^L}\right\} = \left\{\mathcal{O}_{v_1^L}, \ldots, \mathcal{O}_{v_m^L}\right\}$$

für ein $k \leq m$ gilt, für welches die $\mathcal{O}_{v_1^L}, \ldots, \mathcal{O}_{v_k^L}$ paarweise verschieden sind.

Nach Lemma 2.21 gilt dann sogar $\mathcal{O}_{v_i^L} \subsetneq \mathcal{O}_{v_j^L}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$, so dass wir die Aussage (3) aus Lemma 2.20 anwenden können. Die $\mathfrak{p}_i$ für $1 \leq i \leq k$ sind demnach genau die maximalen Ideale von R.

Außerdem ist $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_i$ für $2 \leq i \leq m$, denn für $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_i$ gilt

$$\mathcal{O}_{v_1^N} \cap L = \mathcal{O}_{v_1^L} = R_{\mathfrak{p}_1} = R_{\mathfrak{p}_i} = \mathcal{O}_{v_i^L} = \mathcal{O}_{v_i^N} \cap L,$$

also gibt es nach dem Konjugationstheorem 2.22 ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/L) = H$ mit $\mathcal{O}_{v_i^N} = \sigma(\mathcal{O}_{v_1^N})$. Dann gilt aber nach Definition von H schon $\mathcal{O}_{v_i^N} = \mathcal{O}_{v_1^N}$, das heißt $i = 1$.

Insbesondere gilt $\mathcal{O}_{v_1^L} \neq \mathcal{O}_{v_2^L}$ und damit $k \geq 2$.

Nun können wir Aussage (4) aus Lemma 2.20 auf das Tupel $(1, 0, \ldots, 0) \in \prod_{i=1}^k \mathcal{O}_{v_i^L}$ anwenden und erhalten ein $\beta \in R$ mit $1 - \beta \in \mathfrak{m}_{v_1^L}$ und $\beta \in \mathfrak{m}_{v_j^L}$ für $2 \leq j \leq k$. Wegen $k \geq 2$ kann β also nicht in K liegen, denn sonst wäre

$$1 = (1 - \beta) + \beta \in (\mathfrak{m}_{v_1^L} \cap K) + (\mathfrak{m}_{v_j^L} \cap K) = \mathfrak{m}_v + \mathfrak{m}_v = \mathfrak{m}_v.$$

Wir betrachten jetzt das Minimalpolynom $f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ von β über K. Dann ist $K(\beta) \supsetneq K$ eine Erweiterung vom Grad $d > 1$, die zwischen K und N liegt. Es ist also $d \leq [N : K] \leq n$. Wir zeigen nun, dass $a_{d-1} \notin \mathfrak{m}_v$

und $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_v$ gilt. Nach Lemma 5.2 müsste f dann eine Nullstelle in K besitzen, falls (3) erfüllt wäre – ein Widerspruch.

Wegen $f(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - \beta_i)$ für die Konjugierten $\beta_1, \ldots, \beta_d \in L$ von β gilt $a_{d-1} = -(\beta_1 + \cdots + \beta_d)$. Ohne Einschränkung sei $\beta = \beta_1$, so dass $1 - \beta_1 \in \mathfrak{m}_{v_1^L}$ gilt. Für $2 \leq i \leq d$ gibt es jeweils ein $\sigma_i \in \mathrm{Gal}(N/K)$ mit $\sigma_i(\beta_i) = \beta$. Wegen $\beta_i \neq \beta \in L = \mathrm{Fix}(H)$ ist $\sigma_i \notin H$ und damit $\sigma_i(\mathcal{O}_{v_1^N}) = \mathcal{O}_{v_j^N}$ für ein $j \geq 2$. Aus $\beta \in \mathfrak{m}_{v_j^L} \subseteq \mathfrak{m}_{v_j^N} = \sigma_i(\mathfrak{m}_{v_1^N})$ folgt dann $\beta_i = \sigma_i^{-1}(\beta) \in \mathfrak{m}_{v_1^N}$. Insgesamt ist also $1 + a_{d-1} = (1 - \beta) - \beta_2 - \cdots - \beta_d \in \mathfrak{m}_{v_1^N} \cap K = \mathfrak{m}_v$, das heißt $a_{d-1} \notin \mathfrak{m}_v$.

Alle anderen Koeffizienten von f, das heißt die a_i mit $i < d-1$, sind von der Form

$$a_i = \beta_1 \cdot \gamma_i + \tau_i,$$

wobei $\gamma_i, \tau_i \in N$ Summen von Produkten der β_j für $j > 1$ sind und damit in $\mathfrak{m}_{v_1^N}$ liegen. Es folgt $a_i \in \mathfrak{m}_{v_1^N} \cap K = \mathfrak{m}_v$.

Als Minimalpolynom des Elements $\beta \notin K$ ist f ein irreduzibles Polynom vom Grad $\deg(f) = d \geq 2$ und hat damit insbesondere keine Nullstelle in K. Folglich kann die Bewertung v nach Lemma 5.2 nicht $n_{\leq}$-henselsch sein, das heißt die Aussage (3) ist nicht erfüllt. $\square$

Um von Aussage (4) aus dem vorangegangenen Theorem 5.5 wieder auf Aussage (1) zu schließen, erhöhen wir die Schranke in (4) von n auf $n!$.

Bemerkung 5.6. Sei (K, v) ein bewerteter Körper und v eine Bewertung auf K. Falls der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf jede Galoiserweiterung L vom Grad $[L : K] \leq n!$ besitzt, so hat $\mathcal{O}_v$ eine eindeutige Fortsetzung auf jede Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $\leq n$.

Insbesondere ist v dann eine $n_{\leq}$-henselsche Bewertung und für jede $n!_{\leq}$-henselsche Bewertung gilt bereits Aussage (1) aus Theorem 5.5.

Beweis. Sei L/K eine beliebige Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $[L : K]_{\mathrm{poly}} \leq n$. Dann ist $[L : K] \leq [L : K]_{\mathrm{poly}}! \leq n!$, also besitzt $\mathcal{O}_v$ nach Voraussetzung eine eindeutige Fortsetzung auf L. Damit ist die Aussage (1) aus Theorem 5.5 erfüllt – was genau die Behauptung war. $\square$

Offensichtlich ist jede henselsche Bewertung auch $n_{\leq}$-henselsch; genauer ist eine Bewertung genau dann henselsch, wenn sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine $n_{\leq}$-henselsche Bewertung ist.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige positive ganze Zahl. Wir konstruieren im Folgenden einen bewerteten Körper (L, w), der zwar $n_{\leq}$-henselsch, aber nicht $p_{\leq}$-henselsch ist für jede Primzahl $p > n$.

Die Aussage sowie ihr konstruktiver Beweis sind im Wesentlichen aus [FJ15, Lemma 6.4] entnommen.

Proposition 5.7. *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine positive ganze Zahl, $p > n$ prim und K ein Körper mit $\operatorname{char} K = 0$, der sämtliche p-ten Einheitswurzeln enthält. Dann existiert ein Körper $L \supseteq K$ mit einer Bewertung w, die $n_{\leq}$-henselsch, aber nicht $p_{\leq}$-henselsch ist.*

Dabei kann L so gewählt werden, dass $Lw = K$ gilt.

Beweis. Sei $F = K(X) \subseteq K((X))$ und die Bewertung $v : K((X))^{\times} \to \mathbb{Z}$ auf $K((X))$ sei durch $v(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i) = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid a_i \neq 0\}$ definiert. Für jeden Zwischenkörper $F \subseteq k \subseteq K((X))$ setze $v_k := v{\restriction}k$. Wie in Beispiel 3.12 gesehen ist $F^h := F^{\mathrm{alg}} \cap K((X))$ mit der Bewertung v_{F^h} dann eine Henselisierung von (F, v_F).

Betrachte nun das Polynom $f(T) := T^p - (X+1) \in F[T] \subseteq K((X))[T]$ sowie das zugehörige reduzierte Polynom $\bar{f} = \mathrm{res}_{K((X))v}(f) \in K[T]$ im Restklassenkörper $(K((X)))\,v = K$. Wegen $v(X) = 1$, also $X \in \mathfrak{m}_v$, gilt dann $\bar{f}(T) = T^p - 1$. Da K nach Voraussetzung $\operatorname{char} K = 0$ erfüllt und alle p-ten Einheitswurzeln enthält, ist $\bar{f}$ über K separabel und zerfällt in Linearfaktoren. Weiter ist, wie in Beispiel 3.6 gesehen, v eine henselsche Bewertung auf $K((X))$, das heißt f besitzt eine Nullstelle $\alpha \in K((X))$. Nun ist $f \in F[T]$ ein Polynom über F, die Nullstelle α liegt also bereits in $F^{\mathrm{alg}} \cap K((X)) = F^h$. Beachte, dass $X + 1 \in K[X]$ ein Primelement ist, sowie dass $F = \operatorname{Quot}(K[X])$ gerade der Quotientenkörper von $K[X]$ ist. Nach dem Eisenstein-Kriterium ist $f(T) = T^p - (X+1) \in F[T]$ damit irreduzibel über F, also stimmt f schon mit dem Minimalpolynom $\mathrm{mipo}_F(\alpha)$ von α über F überein. Insbesondere folgt $[F(\alpha) : F] = \deg(f) = p$, das heißt die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(F(\alpha)/F)$ ist zyklisch von Ordnung p.

Sei nun $S \leq G_F$ eine p-Sylowgruppe der absoluten Galoisgruppe G_F von F, sodass S eine Fortsetzung $\hat{\sigma} \in S$ eines nicht-trivialen Elements $\sigma \in \mathrm{Gal}(F(\alpha)/F)$ auf F^{sep} enthält. Wir bezeichnen den Fixkörper von S mit $E := \mathrm{Fix}(S)$ und setzen $L := E \cap F^h$ sowie $w := v_L$. Wegen $F \subseteq L \subseteq F^h$ ist (L, w) eine unmittelbare Erweiterung von $(F, v{\restriction}F)$, also gilt $Lw = F(v{\restriction}F) = K$. Weiter ist $\alpha \notin \mathrm{Fix}(S) = E$, denn es gilt $\hat{\sigma}(\alpha) = \sigma(\alpha) \neq \alpha$. Da die Erweiterung $F(\alpha)/F$ wegen $[F(\alpha) : F] = p$ keine echten Zwischenkörper besitzt und $\alpha \notin L \cap F(\alpha)$ sowie $F \subseteq F(\alpha) \cap L \subseteq F(\alpha)$ gilt, folgt bereits $F(\alpha) \cap L = F$. Weiter ist $[L : F]$ teilerfremd zu p, da $[E : L] \cdot [L : F] = [E : F]$, wegen $E = \mathrm{Fix}(P)$, teilerfremd zu p ist. Aus $L(\alpha) = F(\alpha)L$ und $F = F(\alpha) \cap L$ folgt damit schon $[L(\alpha) : L] = p$, also ist auch $\mathrm{Gal}(L(\alpha)/L)$ zyklisch von Ordnung p.

Unter Beachtung des Kriteriums (5) aus Theorem 4.5 und mit Korollar 3.10 sehen wir, dass (L, w) nicht p-henselsch sein kann: Andernfalls wäre $L = L^h \cap L(p)$ für jede Henselisierung L^h von L, also auch für $L^h = F^h$, das heißt $\alpha \in F(\alpha) \subseteq F^h \cap L(p) = L$. Damit kann (L, w) auch nicht $p_{\leq}$-henselsch sein, denn sonst hätte $\mathcal{O}_w$ eine eindeutige Fortsetzung auf jede Galoiserweiterung von L vom Grad $\leq p$, insbesondere also auf jede Galoiserweiterung vom Grad p, und wäre folglich p-henselsch.

Es bleibt zu zeigen, dass (L, w) dennoch $n_{\leq}$-henselsch ist. Sei dazu $1 \leq d \leq n$ beliebig und $g(T) = T^d + T^{d-1} + a_{d-2}T^{d-2} + \cdots + a_0 \in L[T]$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_i \in \mathfrak{m}_w = L \cap \mathfrak{m}_v$ für $0 \leq i \leq d-2$. Es gilt dann auch $g \in F^h[T]$ und $a_i \in F^h \cap \mathfrak{m}_v = \mathfrak{m}_{v_{F^h}}$ für $0 \leq i \leq d-2$. Da (F^h, v_{F^h}) henselsch (und damit insbesondere $n_{\leq}$-henselsch) ist, besitzt g folglich eine Nullstelle $\beta \in F^h$. Betrachte jetzt den Zerfällungskörper Z des Minimalpolynoms $\mathrm{mipo}_E(\beta)$ von β über E. Da die absolute Galoisgruppe $G_E = S$ von E eine p-Sylowgruppe in G_F und damit insbesondere eine pro-p-Gruppe ist, ist $\mathrm{Gal}(Z/E)$ dann eine p-Gruppe.

Weiter gilt $E(\beta) \subseteq Z$ sowie

$$[E(\beta) : E] = \deg(\mathrm{mipo}_E(\beta)) \leq \deg(g) = d \leq n < p,$$

mit $p^m = [Z : E] = [Z : E(\beta)] \cdot [E(\beta) : E]$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$ folgt dann bereits $\beta \in E \cap F^h = L$. Das Polynom g besitzt also insbesondere eine Nullstelle in L. Damit ist (L, w) wie behauptet $n_{\leq}$-henselsch. $\square$

Korollar 5.8. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ existiert ein Körper K, der $n_{\leq}$-henselsch, aber nicht $n!_{\leq}$-henselsch ist.*

Beweis. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ lässt die Zahl $n! - 1$ beim Teilen durch jede Primzahl $q \leq n$ offensichtlich den Rest -1. Jeder Primteiler p von $n! - 1$ erfüllt daher die Ungleichung $n < p \leq n!$. Mit Proposition 5.7 folgt dann die Behauptung. $\square$

Auch alle nicht-trivialen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungen auf einem Körper K induzieren – falls n in Abhängigkeit von K groß genug ist und falls $K^{\mathrm{sep}} \neq K$ gilt – dieselbe Topologie.

Notation 5.9. Sei K ein Körper mit $K^{\mathrm{sep}} \neq K$. Wir bezeichnen mit

$$m(K) := \min \{[L : K] \,|\, L/K \text{ ist Galoiserweiterung mit } L \neq K\}$$

den Grad der kleinsten echten Galoiserweiterung von K und mit

$$p(K) := \min \{p \in \mathbb{P} \,|\, p \text{ teilt } m(K)\}$$

den kleinsten Primteiler von $m(K)$.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung von Theorem 3.14 für henselsche Bewertungen. In der Tat folgt das genannte Theorem aus der folgenden Aussage als einfaches Korollar.

Theorem 5.10. *Sei K ein Körper mit $K^{\mathrm{sep}} \neq K$, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \subsetneq K$ zwei nicht-triviale unabhängige $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsringe auf K. Dann gilt $n < m(K) \cdot p(K)$.*

Bevor wir den Beweis führen, halten wir die entsprechende Aussage für henselsche Bewertungen als Korollar fest, das wir zuvor bereits in Theorem 3.14 formuliert haben.

Korollar 5.11. *Sei K ein Körper und seien $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \subsetneq K$ zwei nicht-triviale unabhängige henselsche Bewertungsringe auf K. Dann ist $K = K^{\mathrm{sep}}$.*

Beweis. Wäre $K^{\mathrm{sep}} \neq K$, so wäre die Bewertungsringe $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ insbesondere $n_{\leq}$-henselsch für $n := m(K) \cdot p(K) \in \mathbb{N}$. Dies führt mit Theorem 5.10 sofort zum Widerspruch. □

Im Beweis nutzen wir die eindeutige p-henselsche Topologie aus Theorem 4.6.

Beweis von Theorem 5.10. Betrachte eine Galoiserweiterung N/K mit minimalem Grad $[N : K] = m(K)$ und setze $p = p(K)$. Falls $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(N) \neq p$ gilt, so ist $K(\zeta_p)$ für eine beliebige primitive p-te Einheitswurzel $\zeta_p \in K^{\mathrm{alg}}$ eine Galoiserweiterung von K vom Grad $m = [K(\zeta_p) : K] \in \{1, p-1\}$. Insbesondere ist $m < m(K)$, also muss schon $K = K(\zeta_p)$ und damit $\zeta_p \in K$ gelten.

Sei nun $L = \mathrm{Fix}(S)$ der Fixkörper einer p-Sylowgruppe $S \leq \mathrm{Gal}(N/K)$ der Galoisgruppe von N/K. Dann ist $[N : L] = \#S = p^k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$, das heißt insbesondere gilt $L \neq L(p)$. Weiter ist $\zeta_p \in L$, falls $\mathrm{char}(L) \neq p$ gilt.

Seien $\mathcal{O}_{v_L}$ und $\mathcal{O}_{w_L}$ Fortsetzungen von $\mathcal{O}_v$ bzw. $\mathcal{O}_w$ auf L. Dann gilt $\mathcal{O}_{v_L}\mathcal{O}_{w_L} \supseteq \mathcal{O}_v\mathcal{O}_w = K$, nach Beispiel 3.3 folgt also $\mathcal{O}_{v_L}\mathcal{O}_{w_L} = L$.

Zwischenbehauptung. Falls $n \geq m(K) \cdot p(K)$ gilt, so sind die Bewertungen v_L und w_L auf L beide p-henselsch.

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für v_L, der Beweis für w_L ist identisch. Sei also L' eine Galoiserweiterung von L mit $[L' : L] = p$. Dann ist $L'N \supseteq N \supseteq L \supseteq K$ ein Körperturm mit $[L'N : K] = [L'N : N] \cdot [N : K] \leq [L' : L] \cdot [N : K] \leq p \cdot m(K) = m(K) \cdot p(K) \leq n$.

Seien nun $\mathcal{O}_{v_1}, \mathcal{O}_{v_2} \subseteq L'$ zwei Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{v_L}$ auf L', und $\mathcal{O}_{v_1'}, \mathcal{O}_{v_2'} \subseteq L'N$ Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{v_1}$ bzw. von $\mathcal{O}_{v_2}$ auf $L'N$. Dann sind $\mathcal{O}_{v_1'}$ und $\mathcal{O}_{v_2'}$ insbesondere Fortsetzungen von $\mathcal{O}_v$ auf $L'N$ und da $L'N/K$ eine Galoiserweiterung vom Grad $[L'N : K] \leq m(K) \cdot p(K) \leq n$ ist, folgt mit Aussage (4) aus Theorem 5.5 bereits $\mathcal{O}_{v_1'} = \mathcal{O}_{v_2'}$. Insbesondere gilt dann

$$\mathcal{O}_{v_1} = \mathcal{O}_{v_1'} \cap L' = \mathcal{O}_{v_2'} \cap L' = \mathcal{O}_{v_2}.$$

Da $\mathcal{O}_{v_1}$ und $\mathcal{O}_{v_2}$ beliebige Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{v_L}$ auf L' waren, haben wir damit gezeigt, dass nur eine solche Fortsetzung existiert. Folglich ist $\mathcal{O}_{v_L}$ nach Kriterium (2) aus Theorem 4.5 ein p-henselscher Bewertungsring auf L. ⊠

Wäre nun $n \geq m(K) \cdot p(K)$, so wären nach der Zwischenbehauptung alle Bedingungen in Theorem 4.6, angewandt auf den Körper L mit den Bewertungsringen $\mathcal{O}_{v_L}$ und $\mathcal{O}_{w_L}$, erfüllt. Es würde also $L = L(p)$ folgen, ein Widerspruch! □

Für zwei beliebige vergleichbare Bewertungsringe $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$ auf K erhalten wir, wie in Lemma 2.28 gesehen, einen Bewertungsring $\mathcal{O}_{\bar{v}} := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_w$ auf dem Restklassenkörper Kw.

Die Bewertung v ist dabei genau dann henselsch (bzw. p-henselsch), wenn sowohl w als auch $\bar{v}$ henselsch (bzw. p-henselsch) sind. Die $n_{\leq}$-henselsche Variante dieser Aussage ist etwas schwächer.

Lemma 5.12. *Seien v und w zwei Bewertungen auf einem Körper K mit $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) Falls v eine $n_{\leq}$-henselsche Bewertung ist, so sind w und $\bar{v}$ beide $n_{\leq}$-henselsch.

(2) Falls w und $\bar{v}$ beide $n!_{\leq}$-henselsch sind, so ist v eine $n_{\leq}$-henselsche Bewertung.

Beweis. (1) Sei zunächst $f(X) = X^d + X^{d-1} + a_{d-2}X^{d-2} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}_w[X]$ mit $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_w$. Wegen $\mathfrak{m}_w \subseteq \mathfrak{m}_v$ sind dann schon die Bedingungen $f \in \mathcal{O}_v[X]$ und $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_v$ erfüllt. Da v nach Voraussetzung $n_{\leq}$-henselsch ist, besitzt das Polynom f also eine Nullstelle in K. Folglich ist mit v auch w eine $n_{\leq}$-henselsche Bewertung.

Betrachte jetzt ein beliebiges Polynom $\bar{f} \in \mathcal{O}_{\bar{v}}[X]$ der Form $\bar{f}(X) = X^d + X^{d-1} + \alpha_{d-2}X^{d-2} + \cdots + \alpha_0$ mit $\alpha_{d-2}, \ldots, \alpha_0 \in \mathfrak{m}_{\bar{v}}$ und $d \leq n$. Dann gibt es ein Polynom $f \in K[X]$ mit $f(X) = X^d + X^{d-1} + a_{d-2}X^{d-2} + \cdots + a_0$ und $a_i + \mathfrak{m}_w = \alpha_i$ für $0 \leq i \leq d-2$, das heißt $\mathrm{res}_{Kw}(f) = \bar{f}$. Wegen $a_i + \mathfrak{m}_w = \alpha_i \in \mathfrak{m}_{\bar{v}} = \mathcal{O}_{\bar{v}} \setminus (\mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w)$ gilt dabei $a_i \in \mathfrak{m}_v$ für $0 \leq i \leq d-2$. Da die Bewertung v nach Voraussetzung $n_{\leq}$-henselsch ist, besitzt das Polynom f also eine Nullstelle $a \in \mathcal{O}_v$. Für diese ist $a + \mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_{\bar{v}}$ dann eine Nullstelle von $\bar{f}$. Da $\bar{f}$ beliebig gewählt war, ist damit auch $\bar{v}$ eine $n_{\leq}$-henselsche Bewertung.

(2) Seien nun w und $\bar{v}$ beide $n!_{\leq}$-henselsch. Sei $f(X) = \sum a_i X^i \in \mathcal{O}_v[X]$ ein Polynom mit Grad $\deg(f) \leq n$ und einfacher Nullstelle $a + \mathfrak{m}_v \in Kv$ im Restklassenkörper, d.h. es gelte $f(a) \in \mathfrak{m}_v$ und $f'(a) \notin \mathfrak{m}_v$. Wir zeigen, dass f eine Nullstelle a' in $\mathcal{O}_v$ mit $a' + \mathfrak{m}_v = a + \mathfrak{m}_v$ besitzt. Insbesondere ist v dann $n_{\leq}$-henselsch nach (2) $\Rightarrow$ (3) aus Theorem 5.5.

Betrachte dazu das Polynom $g = \mathrm{res}_{Kw}(f) \in Kw[X]$. Dann liegen sowohl $\alpha := a + \mathfrak{m}_w$ als auch die Koeffizienten $a_i + \mathfrak{m}_w$ von g in $\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_w = \mathcal{O}_{\bar{v}}$, das heißt es ist $g \in \mathcal{O}_{\bar{v}}[X]$. Wegen $\mathfrak{m}_{\bar{v}} = \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_w$ gilt nach Bemerkung 2.32 auch

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= f(a) + \mathfrak{m}_w \in \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_w = \mathfrak{m}_{\bar{v}} \text{ sowie} \\ g'(\alpha) &= f'(a) + \mathfrak{m}_w \in \mathcal{O}_v^\times/\mathfrak{m}_w = \mathcal{O}_{\bar{v}}^\times = \mathcal{O}_{\bar{v}} \setminus \mathfrak{m}_{\bar{v}}, \end{aligned}$$

das heißt $\alpha + \mathfrak{m}_{\bar{v}}$ ist einfache Nullstelle von $\mathrm{res}_{(Kw)\bar{v}}(g) =: h \in (Kw)\bar{v}[X]$.

Bemerkung 5.6 erlaubt uns nun, die Aussage (2) aus Theorem 5.5 auf das Polynom g mit $\deg(g) \leq n$ und Koeffizienten im $n!_{\leq}$-henselschen Bewertungsring $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ anzuwenden. Es existiert also eine Nullstelle $\beta \in \mathcal{O}_{\bar{v}}$ von g mit $\beta + \mathfrak{m}_{\bar{v}} = \alpha + \mathfrak{m}_{\bar{v}}$.

Für $h = \mathrm{res}_{(Kw)\bar{v}}(g) \in (Kw)\bar{v}[X]$ erhalten wir dann mit Bemerkung 2.32 die Gleichungskette

$$g'(\beta) + \mathfrak{m}_{\bar{v}} = h'(\beta + \mathfrak{m}_{\bar{v}}) = h'(\alpha + \mathfrak{m}_{\bar{v}}) = g'(\alpha) + \mathfrak{m}_{\bar{v}}.$$

Damit folgt aus $g'(\alpha) \notin \mathfrak{m}_{\bar{v}}$ auch $g'(\beta) \notin \mathfrak{m}_{\bar{v}}$ und insbesondere $g'(\beta) \neq 0$. Also ist β eine einfache Nullstelle von g.

Aussage (2) aus Theorem 5.5 für das Polynom f mit $\deg(f) \leq n$ und Koeffizienten im $n!_{\leq}$-henselschen Bewertungsring $\mathcal{O}_w$ liefert dann, wegen $\mathrm{res}_{Kw}(f) = g$, die Existenz einer Nullstelle $a' \in \mathcal{O}_w$ von f mit $a' + \mathfrak{m}_w = \beta \in \mathcal{O}_{\bar{v}}$. Es gibt also ein $b \in \mathcal{O}_v$ mit $a' - b \in \mathfrak{m}_w \subseteq \mathcal{O}_v$, insbesondere folgt $a' = (a' - b) + b \in \mathcal{O}_v$. □

Um uns im nächsten Abschnitt der kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung widmen zu können, fehlt nun noch ein wichtiges Lemma.

Lemma 5.13. *Sei $(K, \mathcal{O}_v)$ ein bewerteter Körper und $n \in \mathbb{N}$. Falls Kv eine echte Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $\leq n$ hat, so auch K.*

Beweis. Sei $L \supsetneq Kv$ eine echte Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $[L : Kv]_{\mathrm{poly}} \leq n$ und sei $\bar{f} \in Kv[X]$ ein normiertes, irreduzibles und separables Polynom mit $2 \leq \deg(\bar{f}) \leq n$, dessen Zerfällungskörper gerade L ist.[8] Dann können wir ein normiertes $f \in \mathcal{O}_v[X]$ mit $\deg(f) = \deg(\bar{f})$ wählen, für das $\mathrm{res}_{Kv}(f) = \bar{f}$ gilt.

Da $\bar{f}$ in $Kv[X]$ irreduzibel ist, ist f nach Bemerkung 2.33 irreduzibel in $K[X]$. Außerdem ist f separabel über K, denn eine mehrfache Nullstelle $a \in K$ von $f \in \mathcal{O}_v[X]$ läge nach Lemma 2.19 schon in $\mathcal{O}_v$ und würde daher eine Nullstelle $a + \mathfrak{m}_v$ von $\bar{f}$ mit $\bar{f}'(a + \mathfrak{m}_v) = f'(a) + \mathfrak{m}_v = 0$ induzieren.

Der Zerfällungskörper L' von f ist dann eine echte Galoiserweiterung von K, welche die Ungleichung $[L' : K]_{\mathrm{poly}} \leq \deg(f) = n$ erfüllt. □

5.2 Die kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung

Wir halten für diesen Abschnitt ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ fest. Es bezeichne dann $d_n = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d! \leq \sqrt{n}\}$ die größte positive ganze Zahl, deren Fakultät zum Quadrat höchstens so groß wie n ist. Weiter fixieren wir einen beliebigen Körper K.

Ähnlich wie zur Definition der kanonischen henselschen Bewertung partitionieren wir die Menge $H^{\leq n}(K)$ der $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringe auf K in die beiden Teilmengen

$$H_1^{\leq n}(K) = \left\{\mathcal{O}_v \in H^{\leq n}(K) \,\middle|\, Kv^{\leq}(d_n) \neq Kv\right\} \text{ und}$$
$$H_2^{\leq n}(K) = \left\{\mathcal{O}_v \in H^{\leq n}(K) \,\middle|\, Kv^{\leq}(d_n) = Kv\right\}$$

[8] Etwa erfüllt $f = \mathrm{mipo}_K(a)$ für ein primitives Element $a \in L$ der Erweiterung L/Kv diese Bedingungen.

Behauptung 5.14. *Die Menge $H_1^{\leq n}(K)$ ist durch $\subseteq$ linear geordnet und für alle $\mathcal{O}_v \in H_2^{\leq n}(K)$ und $\mathcal{O}_w \in H_1^{\leq n}(K)$ gilt $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$.*

Wir halten zunächst wieder das folgende Korollar fest, das wir schon in Abschnitt 3.3 als Behauptung 3.15 formuliert, aber noch nicht bewiesen, haben.

Korollar 5.15. *Die Menge $H_1(K)$ ist durch $\subseteq$ linear geordnet und für alle $\mathcal{O}_v \in H_2(K)$ und $\mathcal{O}_w \in H_1(K)$ gilt $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$.*

Beweis. Für $\mathcal{O}_u \in H_1(K)$ gilt nach Definition $(Ku)^{\text{sep}} \neq Ku$, das heißt der Restklassenkörper Ku hat eine echte endliche Galoiserweiterung. Wegen $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{O}_u \in H_1^{\leq n}(K)$. Sind also $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \in H_1(K)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \in H_1^{\leq n}(K)$ und nach Behauptung 5.14 folgt $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$ oder $\mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_v$.

Für $\mathcal{O}_u \in H_2(K)$ ist Ku separabel abgeschlossen, also gilt insbesondere $Ku^{\leq}(d_n) = Ku$ und damit $\mathcal{O}_u \in H_2^{\leq n}(K)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist nun $\mathcal{O}_v \in H_2(K)$ und $\mathcal{O}_w \in H_1(K)$, so gibt es daher ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{O}_v \in H_2^{\leq n}(K)$ und $\mathcal{O}_w \in H_1^{\leq n}(K)$. Nach Behauptung 5.14 folgt also $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$. $\square$

Beweis von Behauptung 5.14. Seien $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \in H^{\leq n}(K)$ zwei $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsringe auf K mit $\mathcal{O}_v \subsetneq \mathcal{O}_w$ und $\mathcal{O}_w \subsetneq \mathcal{O}_v$. Dann ist $\mathcal{O}_u := \mathcal{O}_v \cdot \mathcal{O}_w$ wieder ein Bewertungsring auf K mit $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_u$ und $\mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_u$. Im Restklassenkörper Ku sind $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ und $\mathcal{O}_{\bar{w}}$ zwei nicht-triviale Bewertungsringe. Beide sind nach Lemma 5.12 (1) ebenfalls $n_{\leq}$-henselsch. Weiter ist $\mathcal{O}_{\bar{v}} \cdot \mathcal{O}_{\bar{w}} = \mathcal{O}_u/\mathfrak{m}_u = Ku$ erfüllt, das heißt $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ und $\mathcal{O}_{\bar{w}}$ sind unabhängig.

Wir zeigen nun in einer Fallunterscheidung, dass Ku keine echte Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $\leq d_n$ hat.

Fall 1. $(Ku)^{\text{sep}} \neq Ku$.

Nach Theorem 5.10 ist dann $n < m(Ku) \cdot p(Ku) \leq m(Ku)^2$, also $d_n! \leq \sqrt{n} < m(Ku)$, das heißt Ku hat keine echte Galoiserweiterung vom Grad $\leq d_n!$. Insbesondere hat Ku keine echte Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $\leq d_n$.

Fall 2. $(Ku)^{\text{sep}} = Ku$.

Dann hat Ku gar keine endlichen echten Galoiserweiterungen, insbesondere also auch keine vom Polynom-Grad $\leq d_n$.

Nach Lemma 5.13 haben damit auch $Kv = (Ku)\bar{v}$ und $Kw = (Ku)\bar{w}$ keine echten Galoiserweiterungen vom Polynom-Grad $\leq d_n$, es gilt also $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \in H_2^{\leq n}(K)$.

Für $\mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)$ oder $\mathcal{O}_w \in H_1^{\leq n}(K)$ folgt damit schon $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$ oder $\mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_v$. Insbesondere ist $H_1^{\leq n}(K)$ linear geordnet.

Seien abschließend $\mathcal{O}_v \in H_2^{\leq n}(K)$ und $\mathcal{O}_w \in H_1^{\leq n}(K)$. Dann gilt, wie zuvor gezeigt, $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$ oder $\mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_v$. Wäre $\mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_v$, so würde allerdings, wieder nach Lemma 5.13, aus

$\mathcal{O}_w \in H_1^{\leq n}(K)$ auch $\mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)$ folgen, ein Widerspruch. Folglich gilt, wie behauptet, $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$. □

Behauptung 5.16. *Durch $\mathcal{O}_{v_*} := \bigcap H_1^{\leq n}(K)$ wird ein $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsring auf K definiert.*

Beweis. Zunächst ist $\mathcal{O}_{v_*}$ als Schnitt von Unterringen von K wieder ein Unterring von K. Sei nun $x \in K \setminus \mathcal{O}_{v_*}$ und $\mathcal{O}_{v_0} \in H_1^{\leq n}(K)$ so, dass $x \notin \mathcal{O}_{v_0}$ ist. Für jedes $\mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)$ gilt nach Behauptung 5.14, dass $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_{v_0}$ oder $\mathcal{O}_v \supseteq \mathcal{O}_{v_0}$ erfüllt ist. Im ersten Fall ist $x \notin \mathcal{O}_v$, also $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$, im zweiten Fall ist $x^{-1} \in \mathcal{O}_{v_0} \subseteq \mathcal{O}_v$. Also ist $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$ für jedes $\mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)$, das heißt $x^{-1} \in \mathcal{O}_{v_*}$. Damit ist $\mathcal{O}_{v_*}$ ein Bewertungsring auf K.

Weiter ist $\mathcal{O}_{v_*}^\times = \bigcap\{\mathcal{O}_v^\times \mid \mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)\}$, denn es gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{O}_{v_*}^\times &\iff x \in \mathcal{O}_{v_*} \text{ und } x^{-1} \in \mathcal{O}_{v_*} \\ &\iff x \in \mathcal{O}_v \text{ und } x^{-1} \in \mathcal{O}_v \text{ für alle } \mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K) \\ &\iff x \in \mathcal{O}_v^\times \text{ für alle } \mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für das maximale Ideal die Identität $\mathfrak{m}_{v_*} = \bigcup\{\mathfrak{m}_v \mid \mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)\}$ gilt. Daraus lässt sich dann leicht folgern, dass $\mathcal{O}_{v_*}$ wie behauptet $n_{\leq}$-henselsch ist.

Sei dazu zunächst $x \in \mathfrak{m}_{v_*} = \mathcal{O}_{v_*} \setminus \mathcal{O}_{v_*}^\times$ und sei $\mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)$ so, dass $x \notin \mathcal{O}_v^\times$. Dann ist $x \in \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = \mathfrak{m}_v$. Ist andererseits $x \in \mathfrak{m}_{v_0}$ für ein $\mathcal{O}_{v_0} \in H_1^{\leq n}(K)$, so folgt $x \in \mathcal{O}_v$ für alle $\mathcal{O}_v \supseteq \mathcal{O}_{v_0}$ und $x \in \mathfrak{m}_{v_0} \subseteq \mathfrak{m}_w \subseteq \mathcal{O}_w$ für alle $\mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_{v_0}$, also $x \in \mathcal{O}_{v_*}$. Wegen $x \notin \mathcal{O}_{v_0}^\times \supseteq \mathcal{O}_{v_*}^\times$ ist dann schon $x \in \mathcal{O}_{v_*} \setminus \mathcal{O}_{v_*}^\times = \mathfrak{m}_{v_*}$.

Sei nun abschließend $f(X) = X^d + X^{d-1} + a_{d-2}X^{d-2} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}_{v_*}[X]$ ein Polynom mit $d \leq n$ und $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_{v_*}$. Dann gibt es, nach der zuvor gezeigten Identität $\mathfrak{m}_{v_*} = \bigcup\{\mathfrak{m}_v \mid \mathcal{O}_v \in H_2^{\leq n}(K)\}$, für jedes $i = 0, \ldots, d-2$ ein $\mathcal{O}_{v_i} \in H_1^{\leq n}(K)$ mit $a_i \in \mathfrak{m}_{v_i}$. Da $H_1^{\leq n}(K)$ linear geordnet ist, gibt es ein $j \in \{0, \ldots, d-2\}$ mit $\bigcap_{i=0}^{d-2} \mathcal{O}_{v_i} = \mathcal{O}_{v_j} \in H_1^{\leq n}(K)$ und für dieses gilt $f \in \mathcal{O}_{v_j}[X]$ sowie $a_{d-2}, \ldots, a_0 \in \bigcup_{i=0}^{d-2} \mathfrak{m}_{v_i} = \mathfrak{m}_{v_j}$. Weil $\mathcal{O}_{v_j} \in H_1^{\leq n}(K)$ insbesondere $n_{\leq}$-henselsch ist, hat f daher eine Nullstelle in K und damit ist auch $\mathcal{O}_{v_*}$ ein $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsring. □

Falls $H_2^{\leq n}(K) = \emptyset$ ist, so haben wir mit $\mathcal{O}_{v_*} \in H_1^{\leq n}(K)$ einen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsring auf K gefunden, der mit allen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringen auf K vergleichbar ist. Dieser heißt dann der *kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsring* und die dazugehörige Bewertung v_* heißt die *kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung* auf K.

Jedoch liegt $\mathcal{O}_{v_*}$ nicht zwingend selbst in $H_1^{\leq n}(K)$. Der Fall $H_2^{\leq n}(K) \neq \emptyset$ erfordert daher noch etwas mehr Aufwand.

An einer Stelle benötigen wir dazu die Diskriminante eines Polynoms, deren für uns wichtigste Eigenschaften die folgende Bemerkung beschreibt.

Bemerkung und Definition 5.17. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom. Dann ist f genau dann separabel, wenn es keine Polynome $p, q \in K[X]$ mit $\{p, q\} \neq \{0\}$ sowie $\deg(p) < \deg(f')$ und $\deg(q) < \deg(f)$ gibt, die $p \cdot f = q \cdot f'$ erfüllen.

Setze $d := \deg(f)$. Seien $p(X) = p_{d-2}X^{d-2} + \cdots + p_0$ und $q(X) = q_{d-1}X^{d-1} + \cdots + q_0$ Polynome in den Unbekannten $p_{d-2}, \ldots, p_0, q_{d-1}, \ldots, q_0$. Die Gleichung $pf - qf' = 0$ lässt sich als lineares Gleichungssystem in den $2d-1$ vielen Koeffizienten von p und q schreiben. Dieses System hat $\deg(pf - qf') = \max\{\deg(pf), \deg(qf')\} = 2d - 1$ viele Gleichungen und wird daher durch eine quadratische Matrix $M \in K^{(2d-1)\times(2d-1)}$ beschrieben. Das Polynom f ist, nach der Äquivalenz im ersten Absatz, genau dann separabel, wenn dieses Gleichungssystem keine nicht-triviale Lösung hat.

Wir definieren die *Diskriminante* $\delta(f)$ *von* f als die Determinante dieser Matrix, $\delta(f) := \det(M) \in K$. Dann ist $\delta(f)$ polynomiell in den Koeffizienten von f und das Polynom f ist genau dann separabel, wenn $\delta(f) \neq 0$ gilt.

Beweis. Zu zeigen ist die im ersten Absatz beschriebene Äquivalenz:

> “Das Polynom ist f genau dann separabel, wenn es keine Polynome $p, q \in K[X]$ mit $\{p, q\} \neq \{0\}$ sowie $\deg(p) < \deg(f')$ und $\deg(q) < \deg(f)$ gibt, die $p \cdot f = q \cdot f'$ erfüllen.”

Sei f zunächst inseparabel, das heißt jeder größte gemeinsame Teiler g von f und f' hat Grad $\deg(g) > 0$. Es existieren dann Polynome $p, q \in K[X]$ mit $\{p, q\} \neq \{0\}$ sowie $qg = f$ und $pg = f'$. Für diese gilt, wie behauptet, $p \cdot f = pqg = qpg = q \cdot f'$ sowie

$$\begin{aligned} \deg(p) &= \deg(f') - \deg(g) < \deg(f') \text{ und} \\ \deg(q) &= \deg(f) - \deg(g) < \deg(f). \end{aligned}$$

Seien jetzt andererseits Polynome $p, q \in K[X]$ mit $\{p, q\} \neq \{0\}$ sowie $pf = qf'$ und $\deg(p) < \deg(f')$ gegeben. Dann gilt $f' | (pf)$ und aus $\deg(p) < \deg(f')$ folgt die Existenz eines Polynoms $g \in K[X]$ mit $g|f'$ und $g|f$ sowie $\deg(g) > 0$. Insbesondere muss jeder größte gemeinsame Teiler von f und f' bereits in $K[X] \setminus K$ liegen, das heißt f ist inseparabel.

Es ist also f genau dann separabel, wenn das Gleichungssystem $M \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\delta(f) = \det(M) \neq 0$ ist. Außerdem ist $\delta(f) = \det(M)$ ein Polynom in den Einträgen von M. Diese sind Linearkombinationen der Koeffizienten von f, also ist $\delta(f)$ auch polynomiell in den Koeffizienten von f. □

Korollar 5.18. *Für jedes Polynom* $f \in \mathcal{O}_v[X]$ *gilt* $\mathrm{res}_{Kv}(\delta(f)) = \delta(\mathrm{res}_{Kv}(f))$.

Beweis. Nach Bemerkung 5.17 ist δ polynomiell in den Koeffizienten von f und nach Definition von res_{Kv} als Fortsetzung des Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_v \to Kv$ folgt die Behauptung. □

Behauptung 5.19. *Falls $H_2^{\leq n}(K) \neq \emptyset$ ist, so gibt es ein eindeutiges bezüglich $\subseteq$ maximales Element in $H_2^{\leq n}(K)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz eines maximalen Elements unter Verwendung des Zornschen Lemmas. Sei dazu $\emptyset \neq S \subseteq H_2^{\leq n}(K)$ eine nicht-leere, linear geordnete Teilmenge. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{O}_{v^*} := \bigcup S$ einen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsring definiert, der selbst in $H_2^{\leq n}(K)$ liegt.

Zunächst ist $\mathcal{O}_{v^*}$ als Supremum der linear geordneten Menge S von Unterringen von K jedenfalls ein Unterring von K. Ist nun $x \in K \setminus \mathcal{O}_{v^*}$, das heißt $x \notin \mathcal{O}_v$ für alle $\mathcal{O}_v \in S$, so folgt $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$ für alle $\mathcal{O}_v \in S$, und damit wegen $S \neq \emptyset$ insbesondere $x^{-1} \in \mathcal{O}_{v^*}$. Der Ring $\mathcal{O}_{v^*}$ ist also ein Bewertungsring auf K.

Für jedes $\mathcal{O}_v \in S$ ist $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_{v^*}$ und wegen $S \neq \emptyset$ ist $\mathcal{O}_{v^*}$ damit nach Lemma 5.12 bereits $n_{\leq}$-henselsch.

Zur Verwendung des Zornschen Lemmas müssen wir noch $\mathcal{O}_{v^*} \in H_2^{\leq n}(K)$ nachweisen. Zu zeigen ist dafür nur noch, dass $(Kv^*)^{\leq}(d_n) = Kv^*$ gilt.

Sei dazu $L \supseteq Kv^*$ eine Galoiserweiterung vom Polynom-Grad $\leq d_n$ und sei $\bar{f} \in Kv^*[X]$ ein normiertes, irreduzibles und separables Polynom mit $\deg(\bar{f}) \leq d_n$ dessen Zerfällungskörper gerade L ist. Wie im Beweis von Lemma 5.13 können wir dann ein normiertes, irreduzibles Polynom $f \in \mathcal{O}_{v^*}[X]$ mit $\deg(f) = \deg(\bar{f})$ und $\mathrm{res}_{Kv^*}(f) = \bar{f}$ finden. Da die Diskriminante $\delta(\cdot)$ eines Polynoms polynomiell in den Koeffizienten ist, gilt $\mathrm{res}_{Kv^*}(\delta(f)) = \delta(\mathrm{res}_{Kv^*}(f)) = \delta(\bar{f}) \neq 0_{Kv^*} = \mathfrak{m}_{v^*}$, das heißt $\delta(f) \in \mathcal{O}_{v^*}^{\times}$.

Wir können daher $\mathcal{O}_v \in S$ so wählen, dass $\delta(f) \in \mathcal{O}_v^{\times}$ gilt und außerdem alle Koeffizienten des Polynoms f in $\mathcal{O}_v$ liegen. Insbesondere ist $\mathrm{res}_{Kv}(f)$ dann separabel über Kv. Nun ist $\mathcal{O}_{\bar{v}} = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_{v^*}$ ein $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsring auf Kv^* und $\mathrm{res}_{(Kv^*)\bar{v}}(\bar{f}) = \mathrm{res}_{Kv}(f)$ hat eine – einfache – Nullstelle in $Kv = (Kv^*)\bar{v}$, da $Kv^{\leq}(d_n) = Kv$ und $\deg(\mathrm{res}_{Kv}(f)) \leq d_n$ ist. Die Aussage 2 aus Theorem 5.5 (für d_n statt n) liefert uns dann, wegen $d_n! \leq n$, die Existenz einer Nullstelle von $\bar{f}$ in $\mathcal{O}_{\bar{v}} \subseteq Kv^*$. Da $\bar{f}$ nach Annahme irreduzibel ist, folgt schon $\deg(\bar{f}) = 1$ und damit $L = Kv^*$. Der Restklassenkörper Kv^* hat also keine echten Galoiserweiterungen vom Polynom-Grad $\leq d_n$, das heißt es ist $\mathcal{O}_{v^*} \in H_2^{\leq n}(K)$. Nach dem Zornschen Lemma existiert also mindestens ein maximales Element in $H_2^{\leq n}(K)$.

Abschließend ist noch die Eindeutigkeit des maximalen Elements von $H_2^{\leq n}(K)$ zu zeigen. Seien dazu $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \in H_2^{\leq n}(K)$ beide maximal. Dann ist, nach Lemma 5.12 (1), auch $\mathcal{O}_u = \mathcal{O}_v \cdot \mathcal{O}_w$ ein $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsring auf K. Falls $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ nicht vergleichbar wären, so würde – wie im Beweis von Behauptung 5.14 – bereits $\mathcal{O}_u \in H_2^{\leq n}(K)$ folgen. Dann wäre aber $\mathcal{O}_u \supsetneq \mathcal{O}_v$ und insbesondere wäre $\mathcal{O}_v$ nicht maximal. Also müssen $\mathcal{O}_v$ und $\mathcal{O}_w$ vergleichbar sein. Da beide maximal sind folgt daraus bereits $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_w$. □

Nun haben wir alle nötigen Resultate, um die kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung auf einem Körper K im allgemeinen Fall definieren zu können.

Definition 5.20. Sei K ein beliebiger Körper und sei, wie zu Beginn des Abschnitts 5.2, $d_n = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d! \leq \sqrt{n}\}$ sowie

$$H_1^{\leq n}(K) = \left\{\mathcal{O}_v \in H^{\leq n}(K) \mid Kv^{\leq}(d_n) \neq Kv\right\} \text{ und}$$
$$H_2^{\leq n}(K) = \left\{\mathcal{O}_v \in H^{\leq n}(K) \mid Kv^{\leq}(d_n) = Kv\right\}.$$

Falls $H_2^{\leq n}(K) \neq \emptyset$ ist, sei $\mathcal{O}_{\leq}$ das maximale Element von $H_2^{\leq n}(K)$. Andernfalls sei $\mathcal{O}_{\leq} := \mathcal{O}_{v_*} = \bigcap H_1^{\leq n}(K)$. Die zu $\mathcal{O}_{\leq}$ gehörige Bewertung auf K sei mit $v_K^{\leq n}$ bezeichnet.

Die Bewertung $v_K^{\leq n}$ heißt dann die *kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung auf K*, der zugehörige Bewertungsring $\mathcal{O}_{\leq n}$ heißt der *kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsring auf K*.

Zum Abschluss dieses Kapitels halten wir noch zwei Eigenschaften der kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung fest. Ihre wichtigste Eigenschaft ist die Vergleichbarkeit mit allen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungen auf dem zugrunde liegenden Körper.

Proposition 5.21. *Der kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsring auf einem Körper K (mit $K^{\mathrm{sep}} \neq K$) ist, bezüglich $\subseteq$, mit allen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringen auf K vergleichbar.*

Beweis. Im Fall $H_2^{\leq n}(K) = \emptyset$ ist die Aussage klar, denn $H_1^{\leq n}(K)$ ist durch $\subseteq$ linear geordnet. Andernfalls ist $\mathcal{O}_{\leq n}$ maximales Element von $H_2^{\leq n}(K)$ und daher mit allen Bewertungsringen aus $H_2^{\leq n}(K)$ vergleichbar. Da die Bewertungsringe aus $H_1^{\leq n}(K)$ ohnehin mit allen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringen vergleichbar sind, folgt die Behauptung. □

Ist $n \in \mathbb{N}$ groß genug (und besitzt der Körper K dann überhaupt eine nicht-triviale $n_{\leq}$-henselsche Bewertung), so ist $\mathcal{O}_{\leq n} \neq K$. Genauer gilt die folgende Proposition.

Proposition 5.22. *Sei K ein $n_{\leq}$-henselscher Körper. Dann gilt (vgl. Notation 5.9):*

(1) Ist $n \geq (m(K)!)^2$, so ist $\mathcal{O}_{\leq n} \neq K$.

(2) Ist $n < m(K)^2$, so gilt $\mathcal{O}_{\leq n} = K$.

Beweis. (1) Ist $n \geq (m(K)!)^2$, so gilt $K^{\leq}(d_n) \neq K$, also $K \in H_1^{\leq n}(K) \neq \emptyset$. Für $H_2^{\leq n}(K) \neq \emptyset$ liegt der kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsring $\mathcal{O}_{\leq n}$ ohnehin nicht in $H_1^{\leq n}(K)$ und kann damit insbesondere nicht mit K übereinstimmen. Für $H_2^{\leq n}(K) = \emptyset$ sei v eine nicht-triviale $n_{\leq}$-henselsche Bewertung auf K. Dann ist $\mathcal{O}_v \in H_1^{\leq n}(K)$ und es folgt $\mathcal{O}_{\leq n} = \bigcap H_1^{\leq n}(K) \subseteq \mathcal{O}_v \subsetneq K$.

(2) Ist $n < m(K)^2$, das heißt $m(K) > d_n!$, so hat K keine echte endliche Galoiserweiterung vom Grad $\leq d_n!$, also auch keine vom Polynom-Grad $\leq d_n$. Nach Lemma 5.13 gilt dann $Kv^{\leq}(d_n) = Kv$ für jede Bewertung v auf K, also folgt $\in H_2^{\leq n}(K) = H^{\leq n}(K)$. Der kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertungsring $\mathcal{O}_{\leq n}$ ist dann das maximale Element von $H^{\leq n}(K)$, das heißt $\mathcal{O}_{\leq n} = K$. □

6 Zusammenhang der verschiedenen Begriffe

6.1 Henselsche, $n_{\leq}$-henselsche und p-henselsche Bewertungen

Eine erste Rechtfertigung der Untersuchung (kanonischer) $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsringe liefert die folgende Proposition, die einen Zusammenhang zur kanonischen henselschen Bewertung herstellt.

Proposition 6.1. *Sei K ein henselscher Körper mit $K^{\mathrm{sep}} \neq K$ und v_K die kanonische henselsche Bewertung auf K, sowie $\mathcal{O}_K$ der zugehörige Bewertungsring. Dann lässt sich $\mathcal{O}_K$ wie folgt durch die kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringe $\mathcal{O}_{\leq n}$ auf K ausdrücken.*

(1) Falls der Restklassenkörper Kv_K separabel abgeschlossen ist, das heißt falls $\mathcal{O}_K \in H_2(K)$ gilt, so ist $\mathcal{O}_K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\leq n}$.

(2) Falls der Restklassenkörper Kv_K nicht separabel abgeschlossen ist, das heißt falls $\mathcal{O}_K \in H_1(K)$ gilt, so ist $\mathcal{O}_K = \bigcup_{n\geq n_0} \mathcal{O}_{\leq n}$ für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq (d!)^2$, wobei $d = \min\{[L : Kv_K]_{poly} \,|\, L/Kv_K \text{ ist Galoiserweiterung mit } L \neq Kv_K\}$ sei.

Im Beweis benutzen wir die folgende Beobachtung.

Bemerkung 6.2. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ gegeben, so ist $\mathcal{O}_{\leq m}$ auch ein $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsring auf K, also nach Proposition 5.21 mit $\mathcal{O}_{\leq n}$ vergleichbar. Insbesondere ist die Menge $\{\mathcal{O}_{\leq n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ der kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsringe auf K für variierendes $n \in \mathbb{N}$ daher durch $\subseteq$ linear geordnet.

Beweis von Proposition 6.1. Wie in Abschnitt 5.2 sei $d_n = \max\{d \in \mathbb{N} \,|\, d! \leq \sqrt{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Außerdem schreiben wir der Übersicht halber kurz $v = v_K$ für die kanonische henselsche und $v_n = v_K^{\leq n}$ für die kanonische $n_{\leq}$-henselsche Bewertung auf K.

(1) Ist Kv separabel abgeschlossen, so gilt insbesondere $Kv^{\leq}(d_n) = Kv$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist damit $\mathcal{O}_K \in H_2^{\leq n}(K)$ und insbesondere ist $H_2^{\leq n}(K)$ dann nicht leer. Daher ist $\mathcal{O}_{\leq n}$, nach Definition, maximales Element von $H_2^{\leq n}(K)$. Folglich ist $\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_{\leq n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $\mathcal{O}_K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\leq n} =: \mathcal{O}$. Als Schnitt von Unterringen von K, der mit $\mathcal{O}_K$ einen henselschen Bewertungsring enthält, ist $\mathcal{O} \subseteq K$ selbst ein henselscher Bewertungsring auf K. Es bezeichne w die Bewertung auf K mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_w$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ induziert w, wegen $\mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_{\leq n}$, eine Bewertung w_n auf dem Restklassenkörper Kv_n mit $(Kv_n)w_n = Kw$.

Hätte Kw nun eine echte endliche Galoiserweiterung, etwa vom Polynom-Grad d, so hätte nach Lemma 5.13 auch Kv_n eine Galoiserweiterung desselben Polynom-Grades. Für $n \geq (d!)^2$, das heißt $d_n \geq d$, führt dies, wegen $\mathcal{O}_{\leq n} \in H_2^{\leq n}(K)$, also $Kv_n{}^{\leq}(d_n) = Kv_n$, aber zum Widerspruch. Demnach ist Kw separabel abgeschlossen, also gilt $\mathcal{O}_w \in H_2(K)$. Da $\mathcal{O}_K$ maximales Element von $H_2(K)$ ist, folgt $\mathcal{O} = \mathcal{O}_w \subseteq \mathcal{O}_K$ und insgesamt $\mathcal{O}_K = \mathcal{O} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\leq n}$.

(2) Ist Kv nicht separabel abgeschlossen, so gibt es eine endliche Galoiserweiterung L/Kv vom Polynom-Grad $[L : Kv]_{\text{poly}} = d > 1$. Fixiere nun ein beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq (d!)^2$. Für $n \geq n_0$ ist dann $d_n \geq d_{n_0} \geq d$, das heißt $(Kv)^{\leq}(d_n) \neq Kv$. Es folgt $\mathcal{O}_K \in H_1^{\leq n}(K)$ und damit $\mathcal{O}_K \supseteq \mathcal{O}_{\leq n}$ für alle $n \geq n_0$, das heißt $\mathcal{O}_K \supseteq \bigcup_{n\geq n_0} \mathcal{O}_{\leq n}$. Da die Menge $\{\mathcal{O}_{\leq n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ nicht-leer und nach Bemerkung 6.2 linear geordnet ist, ist $\mathcal{O} := \bigcup_{n\geq n_0} \mathcal{O}_{\leq n}$ als deren Supremum selbst wieder ein Bewertungsring auf K. Außerdem ist $\mathcal{O}$ nach Lemma 5.12 (1) mit $\mathcal{O}_{\leq n} \subseteq \mathcal{O}$ ebenfalls $n_{\leq}$-henselsch für alle $n \geq n_0$.

Insgesamt ist $\mathcal{O}$ folglich ein henselscher Bewertungsring auf K. Weiter ist $H_2(K) = \emptyset$, denn sonst läge $\mathcal{O}_K$, nach Definition, in der Menge $H_2(K)$. Damit gilt $\mathcal{O} \in H_1(K)$ und aus $\mathcal{O}_K = \bigcap H_1(K)$ folgt $\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}_K$, also insgesamt $\mathcal{O}_K = \mathcal{O} = \bigcup_{n\geq n_0} \mathcal{O}_{\leq n}$. □

Wir führen nun noch zwei weitere Begriffe ein, die mit dem der $n_{\leq}$-henselschen Bewertung in Verbindung stehen.

Definition 6.3. Sei (K, v) ein bewerteter Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine positive ganze Zahl.

(1) Die Bewertung v (bzw. der bewertete Körper (K, v)) heißt *prim-henselsch unterhalb von* n, falls für alle Primzahlen $p \leq n$ und jede Galoiserweiterung L/K mit $L(p) \neq L$ und $[L : K] \cdot p \leq n$ jede Fortsetzung w von v auf L eine p-henselsche Bewertung ist.

(2) Die Bewertung v (bzw. der bewertete Körper (K, v)) heißt *separabel prim-henselsch unterhalb von* n, falls für alle Primzahlen $p \leq n$ und jede separable Körpererweiterung L/K mit $L(p) \neq L$ und $[L : K] \cdot p \leq n$ jede Fortsetzung w auf L eine p-henselsche Bewertung ist.

(3) Der Körper K heißt *prim-henselsch unterhalb von* n, falls es eine nicht-triviale Bewertung v auf K gibt, die prim-henselsch unterhalb von n ist.

(4) Der Körper K heißt *separabel prim-henselsch unterhalb von* n, falls es eine nicht-triviale Bewertung v auf K gibt, die separabel prim-henselsch unterhalb von n ist.

Offensichtlich ist jede Bewertung, die separabel prim-henselsch unterhalb von n ist auch prim-henselsch unterhalb von n.

Außerdem ist jede Bewertung, die prim-henselsch unterhalb von n ist auch p-henselsch für alle Primzahlen $p \leq n$, was die Bezeichnung "prim-henselsch unterhalb von n" erklärt.

Bemerkung 6.4. Ist (K, v) (separabel) prim-henselsch unterhalb von n, so ist v bereits p-henselsch für jede Primzahl $p \leq n$: Falls $K(p) = K$ ist, ist die Aussage trivialerweise erfüllt, andernfalls folgt sie sofort aus der Definition 6.3.

Den Zusammenhang zu $n_{\leq}$-henselschen Bewertungen stellt nun die folgende Proposition her.

Proposition 6.5. *Ist (K, v) ein $n!_{\leq}$-henselsch bewerteter Körper, so ist (K, v) (separabel) prim-henselsch unterhalb von n.*

Beweis. Sei $p \leq n$ eine Primzahl und L/K eine separable Erweiterung mit $L(p) \neq L$ und $[L : K] \cdot p \leq n$. Weiter sei w eine beliebige Fortsetzung von v auf L.

Wir halten nun eine beliebige Galoiserweiterung L'/L vom Grad p fest. Dann ist L'/K endlich und separabel und damit, nach dem Satz vom primitiven Element, insbesondere eine einfache Körpererweiterung. Betrachte für $\alpha \in L'$ mit $L' = K(\alpha)$ das Minimalpolynom $f = \operatorname{mipo}_K(\alpha) \in K[X]$ und den Zerfällungskörper N von f. Dann ist N/K eine Galoiserweiterung, für deren Polynom-Grad die Ungleichung

$$[N : K]_{\text{poly}} \leq \deg(f) = [K(\alpha) : K] = [L' : L] \cdot [L : K] = p \cdot [L : K] \leq n$$

gilt, das heißt es ist $[N : K] \leq n!$. Da (K, v) nach Voraussetzung $n_{\leq}$-henselsch ist, hat v damit eine eindeutige Fortsetzung auf N. Jede Fortsetzung von w auf L' liefert auch eine Fortsetzung von w auf N, die dann auch Fortsetzung von v auf N ist. Folglich besitzt w auch nur genau eine Fortsetzung auf L'. Da L'/L von Grad p beliebig gewählt war, ist (L, w) demnach p-henselsch.

Insgesamt ist (K, v) dann wie behauptet separabel prim-henselsch unterhalb von n (und damit auch prim-henselsch unterhalb von n). $\square$

Korollar 6.6. *Sei K ein Körper, der $n_{\leq}$-henselsch ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist K bereits separabel prim-henselsch unterhalb von n für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Um die Umkehrung zu zeigen, verlangen wir eine zusätzliche Bedingung an die absolute Galoisgruppe. Für allgemeine prim-henselsche Bewertungen fällt diese Bedingung noch etwas stärker aus, als für separabel prim-henselsche Bewertungen: Im ersten Fall benötigen wir, dass G_K pro-nilpotent ist, im zweiten genügt es, wenn G_K pro-auflösbar ist.

Proposition 6.7. *Sei (K, v) prim-henselsch unterhalb von $n!$ und die absolute Galoisgruppe $G_K = \operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ von K sei pro-nilpotent. Dann ist v bereits $n_{\leq}$-henselsch.*

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition. Sei also (K, v) nicht $n_{\leq}$-henselsch und sei G_K pro-nilpotent. Zu zeigen ist, dass (K, v) nicht prim-henselsch unterhalb von $n!$ ist. Da für $n = 1$ jede Bewertung auf jedem Körper trivialerweise $n_{\leq}$-henselsch ist, gilt nach Voraussetzung $n \geq 2$.

Sei nun N/K eine Galoiserweiterung mit

$$[N : K] = \min\left\{[N' : K] \,|\, v \text{ hat keine eindeutige Fortsetzung auf } N'\right\} > 1,$$

sodass v mehr als eine Fortsetzung auf N besitzt.

Nach Bemerkung 5.6 gibt es eine Galoiserweiterung vom Grad höchstens $n!$, auf die v keine eindeutige Fortsetzung hat, also ist $1 < [N : K] \leq n!$. Sei nun $p | [N : K]$ ein Primteiler und S eine p-Sylowgruppe in $G = \mathrm{Gal}(N/K)$, sowie $L = \mathrm{Fix}(S)$ die entsprechende Körpererweiterung von K. Da G_K pro-nilpotent und G damit nilpotent ist, ist S insbesondere ein Normalteiler von G. Die Erweiterung L/K ist daher eine Galoiserweiterung. Außerdem ist $[N : L] = \#S = p^k$ für geeignetes $k \geq 1$, das heißt $L(p) \neq L$ und $[L : K] \cdot p \leq [N : L] \cdot [L : K] = [N : K] \leq n!$. Weiter gibt es, wegen $[L : K] < [N : K]$ und nach Wahl von N, eine eindeutige Fortsetzung w von v auf L. Da v (und damit auch w) mehr als eine Fortsetzung auf N besitzt, kann (L, w) dann nicht p-henselsch sein.

Insgesamt ist (K, v) also nicht prim-henselsch unterhalb von $n!$. □

Korollar 6.8. *Sei K ein Körper, der prim-henselsch unterhalb von n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist G_K pro-nilpotent, so ist K bereits $n_{\leq}$-henselsch für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 6.9. *Sei (K, v) separabel prim-henselsch unterhalb von $n!$ und die absolute Galoisgruppe G_K von K sei pro-auflösbar. Dann ist v bereits $n_{\leq}$-henselsch.*

Beweis. Wie im Beweis von Proposition 6.7 zeigen wir die Kontraposition. Sei also wieder (K, v) nicht $n_{\leq}$-henselsch (mit $n \geq 2$) und G_K diesmal pro-auflösbar.

Wähle, genau wie im Beweis von Proposition 6.7, eine Galoiserweiterung N/K mit

$$[N : K] = \min\left\{[N' : K] \,|\, v \text{ hat keine eindeutige Fortsetzung auf } N'\right\},$$

sodass v mehr als eine Fortsetzung auf N besitzt. Dann ist $1 < [N : K] \leq n!$, wie oben bereits gesehen.

Wir können nun ohne Einschränkung annehmen, dass $n > 2$ gilt: Für $n = 2$ folgt schon $[N : K] = 2$, womit $L = K$ eine separable Körpererweiterung von K mit $[L : K] \cdot 2 = 2 \leq n!$ ist. Für $p = 2$ ist dann weiter $L(2) \neq L$ und (L, v) ist – nach Wahl von N – nicht p-henselsch. Also ist (K, v) in diesem Fall nicht separabel prim-henselsch unterhalb von $n!$ – auch falls G_K nicht pro-auflösbar ist.

Nun ist $G = \mathrm{Gal}(N/K) \neq \{\mathrm{id}\}$ auflösbar, da G_K pro-auflösbar ist. Für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ existieren also Untergruppen $G_i \leq G$ sowie Primzahlen p_i für $0 \leq i \leq m$ mit

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ \dots \ \trianglerighteq G_m \trianglerighteq G_{m+1} = \{\mathrm{id}\}$$

sodass G_i / G_{i+1} zyklisch von Ordnung p_i ist.

Wir betrachten für $0 \leq i \leq m+1$ die zugehörigen Körpererweiterungen $L_i := \mathrm{Fix}(G_i)$ von K. Für $0 \leq i \leq m$ ist L_i/K dann eine separable Körpererweiterung mit

$$[L_i : K] \cdot p_i = [L_{i+1} : K] \leq [N : K] \leq n!,$$

das heißt insbesondere gilt $p_i \leq n!$. Weiter ist $L_i(p_i) \neq L_i$, denn es ist $[L_{i+1} : L_i] = \#G_i/G_{i+1} = p_i$.

Finden wir nun ein $j \in \{0, \ldots, m\} =: M$ und eine Fortsetzung v_j von v auf L_j, die sich nicht eindeutig auf L_{j+1} fortsetzen lässt, so bezeugen $L = L_j$ und $p = p_j$, dass (K, v) nicht separabel prim-henselsch unterhalb von $n!$ ist.

Betrachte dazu die Menge $J := \{i \in M \mid v \text{ hat eine eindeutige Fortsetzung auf } L_i\}$. Diese Menge ist endlich und nicht-leer (denn trivialerweise gilt $0 \in J$), also enthält sie ein größtes Element $j \in J$. Nach Definition hat v eine eindeutige Fortsetzung v_j auf L_j. Jedoch lässt v sich nicht eindeutig auf L_{j+1} fortsetzen – für $j < m$ folgt dies sofort nach Definition, für $j = m$ folgt es nach Wahl von $N = L_{m+1}$. Damit ist (L_j, v_j) nicht p_j-henselsch, aber es gilt $[L_j : K] \cdot p_j \leq n!$ sowie $L_j(p_j) \neq L_j$.

Insgesamt ist (K, v) also nicht separabel prim-henselsch unterhalb von n. □

Korollar 6.10. *Sei K ein Körper, der separabel prim-henselsch unterhalb von n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist G_K pro-auflösbar, so ist K bereits $n_{\leq}$-henselsch für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

6.2 Bezug zur Modelltheorie: t-henselsche Bewertungen

Bewertete Körper – und insbesondere Körper mit Bewertungen, die unterschiedliche Varianten von Hensels Lemma erfüllen – haben eine schöne und ergiebige Modelltheorie (siehe etwa [PZ78, JK15b, JK15a]).

So ist zwar die Eigenschaft eines Körpers, eine nicht-triviale henselsche Bewertung zu tragen, keine im modelltheoretischen Sinn elementare Eigenschaft, jedoch lassen sich die Körper, die elementar äquivalent zu einem henselschen Körper sind, ebenfalls durch eine (topologische) Variante von Hensels Lemma beschreiben, wie Theorem 6.16 zeigt.

Eine erste modelltheoretische Anwendung der kanonischen $n_{\leq}$-henselschen Bewertung ist die folgende.

Proposition 6.11. *Sei $K \neq K^{\mathrm{sep}}$ ein Körper mit nicht-trivialer henselscher Bewertung v. Ist der Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ auf K definierbar in der Sprache $\mathcal{L}_{ring} = \{0, 1, +, \cdot\}$ der Ringe, so existiert ein $\emptyset$-definierbarer nicht-trivialer Bewertungsring $\mathcal{O}_w$ auf K mit $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}_v$, das heißt w induziert die eindeutige henselsche Topologie.*

Bevor wir den Beweis führen, halten wir zur Einordnung der Aussage von Proposition 6.11 fest, dass aus der Existenz einer definierbaren nicht-trivialen henselschen Bewertung auf einem Körper im Allgemeinen nicht die Existenz einer $\emptyset$-definierbaren nicht-trivialen henselschen Bewertung folgt.

Bemerkung 6.12. Es existiert ein Körper L mit $L \neq L^{\text{sep}}$, auf dem es eine definierbare nicht-triviale henselsche Bewertung, aber keine $\emptyset$-definierbare nicht-triviale henselsche Bewertung gibt.

Beweis. In [JK15c, Example 6.3] konstruieren Jahnke und Koenigsmann einen Körper L mit $L \neq L^{\text{sep}}$, auf dem es eine definierbare nicht-triviale henselsche Bewertung gibt, und einen zu L elementar äquivalenten Körper K, der nicht henselsch ist.

Insbesondere kann es in dieser Situation keine $\emptyset$-definierbare nicht-triviale henselsche Bewertung auf L geben, denn die Definition einer solchen würde auch auf K eine nicht-triviale henselsche Bewertung definieren. □

Beweis von Proposition 6.11. Sei $\phi(x,t)$ eine $\mathcal{L}_{\text{ring}}$-Formel, die den Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ definiert, das heißt mit $\phi(K,t) = \{x \in K \mid \phi(x,t)\} = \mathcal{O}_v$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass der Restklassenkörper Kv nicht separabel abgeschlossen ist – denn andernfalls gäbe es nach [JK15b, Theorem 3.10] sogar eine $\emptyset$-definierbare henselsche Bewertung auf K.

Es gibt dann also ein $n \geq 2$, sodass Kv eine echte Galoiserweiterung L vom Grad $[L : Kv] = n$ besitzt. Für $m = (n!)^2$ ist nun $[L : Kv]_{\text{poly}} \leq [L : Kv] \leq n = d_m$, das heißt insbesondere gilt $Kv^{\leq}(d_m) \neq Kv$ und damit $\mathcal{O}_v \in H_1^{\leq m}(K)$. Nach Definition des kanonischen $m_{\leq}$-henselschen Bewertungsrings $\mathcal{O}_{\leq m}$ auf K folgt $\mathcal{O}_v \supseteq \mathcal{O}_{\leq m}$.

Betrachte nun die Menge $S := \{s \in K \mid \phi(K,s) \in H_1^{\leq m}(K)\}$ der Parameter $s \in K$, für die $\phi(K,s) = \mathcal{O}_u$ ein $m_{\leq}$-henselscher Bewertungsring auf K mit $Ku^{\leq}(d_m) \neq Ku$ ist. Dann ist $\mathcal{O} := \bigcap_{s \in S} \phi(K,s)$ offensichtlich $\emptyset$-definierbar, da die Bedingung

$$\phi(K,s) \in H_1^{\leq m}(K) \Leftrightarrow \phi(K,s) = \mathcal{O}_u \text{ ist } m_{\leq}\text{-henselsch mit } Ku^{\leq}(d_m) \neq Ku$$

an s sich als parameterfreie $\mathcal{L}_{\text{ring}}$-Formel ausdrücken lässt. Als Schnitt von Unterringen von K ist $\mathcal{O}$ selbst wieder ein Unterring von K und, wegen $\mathcal{O}_{\leq m} \subseteq \mathcal{O}$, sogar ein Bewertungsring auf K. Wegen $\phi(K,t) = \mathcal{O}_v \in H_1^{\leq m}(K)$ gilt $t \in S$, also $\mathcal{O}_v \in \{\phi(K,s) \mid s \in S\}$ und daher $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_v \neq K$. Die zum Bewertungsring $\mathcal{O}$ gehörige Bewertung w auf K ist folglich nicht-trivial und erfüllt $\mathcal{O}_v\mathcal{O}_w \neq K$, das heißt v und w induzieren dieselbe Topologie. □

Im Zusammenhang mit der Modelltheorie (henselsch) bewerteter Körper fehlt uns noch ein weiterer wichtiger Begriff.

Definition 6.13. Ein Körper K heißt *t-henselsch*, falls es einen henselschen Körper L gibt, der als $\mathcal{L}_{\text{ring}}$-Struktur elementar äquivalent zu K ist.

Dass jeder henselsche Körper bereits t-henselsch ist, folgt sofort aus der Definition. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie Proposition 6.18 später zeigt. Unter gewissen Voraussetzungen sind die beiden Begriffe jedoch äquivalent. Genauer gilt die folgende Aussage.

Lemma 6.14 (Koenigsmann)**.** *Sei K ein t-henselscher Körper, der weder separabel abgeschlossen noch reell abgeschlossen ist und dessen absolute Galoisgruppe G_K pro-auflösbar ist. Dann ist K henselsch.*

Beweis. Siehe [Koe04, Lemma 3.5]. □

Bewertete t-henselsche Körper lassen sich durch eine topologische Variante der Aussage von Hensels Lemma charakterisieren, die eine direkte Verbindung zu $n_{\leq}$-henselschen Bewertungen herstellt: Ein Körper, der für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine nicht-triviale $n_{\leq}$-henselsche Bewertung besitzt, ist bereits t-henselsch.

Topologisch können wir t-henselsche Körper dabei mithilfe sogenannter V-Topologien beschrieben.

Definition 6.15. (1) Sei $(K, \mathcal{T})$ ein topologischer Körper. Eine Teilmenge $S \subseteq K$ heißt *beschränkt*, falls es für jedes $U \in \mathcal{T}$ mit $0 \in U$ ein $V \in \mathcal{T}$ gibt mit $0 \in V$ und $V \cdot S \subseteq U$ (das heißt für alle $x \in V$ und $y \in S$ gilt $x \cdot y \in U$).

(2) Eine *V-Topologie auf einem Körper K* ist eine Körper-Topologie $\mathcal{T}$ auf K bezüglich der Menge $(K \setminus U)^{-1}$ für jede offene Umgebung U der 0 in K, das heißt für jedes $U \in \mathcal{T}$ mit $0 \in U$, beschränkt ist.

Wir können jetzt das zuvor erwähnte Theorem formulieren, das t-henselsche Körper durch eine Variante der Aussage von Hensels Lemma charakterisiert.

Theorem 6.16 (Prestel-Ziegler)**.** *Ein Körper K mit einer V-Topologie $\mathcal{T}$ ist genau dann t-henselsch, wenn für jedes $n \geq 1$ ein $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ existiert, sodass jedes Polynom der Form $X^{n+1} + X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_i \in U$ für $0 \leq i \leq n-1$ eine Nullstelle in K besitzt.*

Beweis. Siehe [PZ78, Theorem 7.2 (i)]. □

Diese topologische Beschreibung liefert den erwähnten Zusammenhang zwischen $n_{\leq}$-henselschen und t-henselschen Körpern.

Korollar 6.17. *Jeder Körper K, auf dem es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen nicht-trivialen $n_{\leq}$-henselschen Bewertungsring gibt, ist t-henselsch.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{O}_{\leq n} \neq K$ der kanonische $n_{\leq}$-henselscher Bewertungsring und $\mathcal{T}_n$ die von diesem induzierte Topologie auf K. Wir betrachten nun die Topologie $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{n_0}$ auf K für $n_0 = m(K) \cdot p(K)$. Diese ist, nach Proposition 2.37, eine Körper-Topologie und nach Theorem 5.10 gilt $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m(K) \cdot p(K)$.

Wir setzen $\nu(n) := \max\{n+1, n_0\}$ und wählen $U_n := \mathfrak{m}_{\leq \nu(n)} \in \mathcal{T}$. Jedes Polynom der Form $X^{n+1} + X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$ mit $a_i \in U_n$ für $0 \leq i \leq n-1$ besitzt dann eine Nullstelle in K, da der Bewertungsring $\mathcal{O}_{\leq \nu(n)}$, wegen $\nu(n) \geq n+1$, stets $(n+1)_{\leq}$-henselsch ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ eine V-Topologie auf K ist. Wir müssen also für $U \in \mathcal{T}$ mit $0 \in U$ zeigen, dass $(K \setminus U)^{-1}$ beschränkt ist. Seien dazu $U, W \in \mathcal{T}$ mit $0 \in U$ und $0 \in W$ gegeben. Weiter sei $v = v_K^{\leq n_0}$ die kanonische $n_{0\leq}$-henselsche Bewertung auf K. Dann gibt es $a, b \in K^\times$ mit $0 \in a\mathcal{O}_v \subseteq W$ und $0 \in b\mathcal{O}_v \subseteq U$. Insbesondere ist $(K \setminus U)^{-1} \subseteq (K \setminus b\mathcal{O}_v)^{-1}$, das heißt für $z \in (K \setminus U)^{-1}$ gilt $v(z^{-1}) < v(b)$ und damit $v(bz) > 0$. Wir betrachten jetzt die offene Menge $V = ab\mathcal{O}_v$. Für jedes $x \in \mathcal{O}_v$ und jedes $z \in (K \setminus U)^{-1}$ gilt

$$v(ab \cdot x \cdot z) = v(ax) + v(bz) > v(ax) \geq v(a),$$

also ist $V \cdot (K \setminus U)^{-1} \subseteq a\mathcal{O}_v \subseteq W$. Da $W \in \mathcal{T}$ mit $0 \in W$ beliebig (und insbesondere unabhängig von U) gewählt war, ist die Menge $(K \setminus U)^{-1}$ für jedes $U \in \mathcal{T}$ mit $0 \in U$ beschränkt. □

Wir zeigen nun noch, dass es auch Körper gibt, die zwar $n_{\leq}$-henselsch für jedes $n \in \mathbb{N}$, aber nicht henselsch sind. Insbesondere ist jeder solche Körper dann t-henselsch, aber nicht henselsch – Lemma 6.14 gilt also nicht ohne die Bedingungen an K.

Proposition 6.18. *Es existiert ein Körper K, auf dem es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine nicht-triviale $n_{\leq}$-henselsche Bewertung $v_n^\star$, aber keine nicht-triviale henselsche Bewertung gibt.*

Für den Beweis, der sich an [FJ15, Construction 6.5] orientiert, benötigen wir die folgende Aussage über den inversen Limes eines inversen Systems von Bewertungsringen.

Lemma 6.19. *Sei $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $(I, \mathcal{O}_i, \pi_{i,j})$ ein inverses System von Bewertungsringen $\mathcal{O}_i$ auf den Körpern $K_i = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_i)$. Dann ist der inverse Limes $\mathcal{O} = \varprojlim_{i \in I} \mathcal{O}_i$ ein Bewertungsring auf $K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$.*

Beweis. Siehe [FP11, Lemma 2.5]. □

Beweis von Proposition 6.18. Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Primzahlen mit $p_n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $K_0 = \mathbb{C}$. Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv $n!^{(1)} = n!$ und $n!^{(k+1)} := \left(n!^{(k)}\right)!$ und wählen nun rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ mithilfe von Proposition 5.7 einen bewerteten Körper (K_n, v_n), der $(n!^n)_{\leq}$-henselsch, aber nicht p_n-henselsch ist und für den $K_n v_n = K_{n-1}$ gilt.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $v_{m+1,m} = v_{m+1}$ und für $n > m+1$ definieren wir rekursiv die Bewertungen $v_{n,m} := v_{n-1,m} \circ v_n = v_{m+1} \circ \cdots \circ v_n$ auf K_n. Dann gilt $K_n v_{n,m} = K_m$ für $n > m$: Für $n = m+1$ folgt dies sofort aus der Wahl von (K_m, v_m) und für $n+1 > m+1$ induktiv mit $K_{n+1}v_{n+1,m} = (K_{n+1}v_{n+1})v_{n,m} = K_n v_{n,m}$.

Zwischenbehauptung. Die Bewertungsringe $\mathcal{O}_{v_{n,0}}$ zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned}\pi_{n,m} : \mathcal{O}_{v_{n,0}} &\to \mathcal{O}_{v_{m,0}}\\ x &\mapsto x + \mathfrak{m}_{v_{n,m}}\end{aligned}$$

für $n > m$ bilden ein inverses System (indiziert durch $\mathbb{N}$ mit der Standardordnung $\leq$).

Beweis. Fixiere zunächst $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Wegen $v_{n,0} = v_{m,0} \circ v_{n,m}$ gilt dann $\mathcal{O}_{v_{n,0}}/\mathfrak{m}_{v_{n,m}} = \mathcal{O}_{v_{m,0}}$ und damit $\pi_{n,m}(x) = x + \mathfrak{m}_{v_{n,m}} \in \mathcal{O}_{v_{m,0}}$ für alle $x \in \mathcal{O}_{v_{n,0}}$, das heißt $\pi_{n,m}$ ist wohldefiniert.

Seien nun $n, m, k \in \mathbb{N}$ mit $n > m > k$. Dann gilt $v_{n,k} = v_{m,k} \circ v_{n,m}$ und damit $\mathcal{O}_{v_{m,k}} = \mathcal{O}_{v_{n,k}}/\mathfrak{m}_{v_{n,m}}$, also auch $\mathfrak{m}_{v_{m,k}} = \mathfrak{m}_{v_{n,k}}/\mathfrak{m}_{v_{n,m}}$. Es folgt

$$(\pi_{m,k} \circ \pi_{n,m})(x) = (x + \mathfrak{m}_{v_{n,m}}) + \mathfrak{m}_{v_{m,k}} = x + \mathfrak{m}_{v_{n,k}} = \pi_{n,k}(x)$$

für alle $x \in \mathcal{O}_{v_{n,0}}$. ☒

Nach Lemma 6.19 ist der inverse Limes $\mathcal{O} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{v_{n,0}}$ ein Bewertungsring auf seinem Quotientenkörper $K = \operatorname{Quot}(\mathcal{O})$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{p}_n := \ker(\mathcal{O} \to \mathcal{O}_{v_{n,0}})$ der Kern der kanonischen Projektion. Die Lokalisierung $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_n}$ von $\mathcal{O}$ an dem Ideal $\mathfrak{p}_n$ ist dann ein Unterring von K, der $\mathcal{O}$ enthält, also selbst ein Bewertungsring ist. Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_n}$ ist $\mathfrak{m}_n := \mathfrak{p}_n\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_n}$.

Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ gilt nun $\mathfrak{p}_m \subseteq \mathfrak{p}_n$ und damit $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_m} \supseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_n}$, die Familie $\{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ wird also durch $\subseteq$ linear geordnet. Weiter gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_n} = \mathcal{O}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}_n} = \mathcal{O}_{(0)} = K$ und für die maximalen Ideale folgt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_n = \{0\}$.

Wir wählen nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Bewertung $v_n^\star$ auf K mit $\mathcal{O}_{v_n^\star} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_n}$ und zeigen, dass $v_n^\star$ dann $n_\leq$-henselsch ist.

Sei dazu $g(X) = X^d + X^{d-1} + a_{d-2}X^{d-2} + \cdots + a_0 \in K[X]$ ein Polynom mit $1 \leq \deg(g) = d \leq n$ und $a_i \in \mathfrak{m}_{v_n^\star}$ für $0 \leq i \leq d-2$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ setzt die kanonische Projektion $\pi_m : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{v_{m,0}}$ sich zu einem Epimorphismus $\hat{\pi}_m : \mathcal{O}_{v_m^\star} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_m} \to \operatorname{Quot}\left(\mathcal{O}_{v_{m,0}}\right) = K_m$ mit $\hat{\pi}_m(xy^{-1}) = \pi_m(x) \cdot (\pi_m(y))^{-1}$ fort und wir erhalten, wegen $\mathfrak{m}_{v_m^\star} = \mathfrak{p}_m\mathcal{O}_{v_m^\star} = \ker(\hat{\pi}_m)$, den kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi_m : Kv_m^\star = \mathcal{O}_{v_m^\star}/\mathfrak{m}_{v_m^\star} &\to \operatorname{Quot}\left(\mathcal{O}_{v_{m,0}}\right) = K_m\\ xy^{-1} + \mathfrak{m}_{v_m^\star} &\mapsto \pi_m(x) \cdot (\pi_m(y))^{-1}\end{aligned}$$

für $x \in \mathcal{O}$ und $y \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{p}_m = \{z \in \mathcal{O} \mid \pi_m(z) \neq 0\}$. Mittels dieses Isomorphismus können wir den Restklassenkörper $Kv_m^\star$ also mit dem Körper K_m identifizieren.

Wir setzen nun $g_m := \operatorname{res}_{Kv_m^\star}(g)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Mit der obigen Identifizierung gilt dann $g_m \in \mathcal{O}_{v_{m,0}}[X]$, da alle Koeffizienten von g in $\mathfrak{p}_n \subseteq \mathcal{O}$ und die Koeffizienten von g_m damit in $\pi_m(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_{v_{m,0}}$ liegen. Es folgt $\operatorname{res}_{K_m v_{m,n}}(g_m) = g_n = \operatorname{res}_{Kv_n^\star}(g)$ für $m \geq n$. Da die Koeffizienten von g alle im maximalen Ideal $\mathfrak{m}_{v_n^\star}$ von $v_n^\star$ liegen, hat $g_n(X) = X^d + X^{d-1} = X^{d-1} \cdot (X+1)$ die einfache Nullstelle $-1 \in Kv_n^\star$. Da die Bewertung v_m nach Voraussetzung $(m!^{(m)})_{\leq}$-henselsch ist, folgt mit Lemma 5.12 (2) induktiv, dass $v_{m-k} \circ \cdots \circ v_m$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine $\left((m-k)!^{(m-k-1)}\right)_{\leq}$-henselsche Bewertung ist. Insbesondere ist $v_{m,n} = v_{n+1} \circ \cdots \circ v_m$ dann $\left((n+1)!^{(n)}\right)_{\leq}$-henselsch, also auch $n_{\leq}$-henselsch. Das Polynom g_k hat daher eine Nullstelle $x_k \in \mathcal{O}_{v_{k,0}}$, die wie in Bemerkung 3.5 gesehen eindeutig bestimmt ist. Die Folge $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist daher ein Element von $\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{v_{k,0}} = \mathcal{O}$ und es gilt $g(x) = (g_k(x_k)) = 0$, das heißt g hat eine Nullstelle im Bewertungsring $\mathcal{O}_{v_n^\star}$, welcher damit wie behauptet $n_{\leq}$-henselsch ist.

Wir zeigen nun durch einen Widerspruchsbeweis, dass K nicht henselsch ist. Angenommen also, w wäre eine nicht-triviale henselsche Bewertung auf K. Dann wäre w insbesondere $n_{\leq}$-henselsch und nach Theorem 5.10 induzierten w und $v_n^\star$ somit für alle $n \geq n_0 := m(K) \cdot p(K)$ dieselbe Topologie $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}_{v_{n_0}^\star}$ auf K. Da die Menge $\{a \cdot \mathfrak{m}_{v_{n_0}^\star} \,|\, a \in K^\times\}$ eine Umgebungsbasis der 0 für die Topologie $\mathcal{T}_{v_{n_0}^\star}$ ist, gäbe es dann ein $a \in K^\times$ mit $a \cdot \mathfrak{m}_{v_{n_0}^\star} \subseteq \mathfrak{m}_w$. Für $a \notin \mathfrak{m}_{v_{n_0}^\star}$, das heißt $v_{n_0}^\star(a) \leq 0$, wäre dann $\mathfrak{m}_{v_{n_0}^\star} \subseteq a \cdot \mathfrak{m}_{v_{n_0}^\star} \subseteq \mathfrak{m}_w$. Für $a \in \mathfrak{m}_{v_{n_0}^\star}$ könnten wir wegen $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_{v_k^\star} = \{0\}$ ein $m > n_0$ mit $a \notin \mathfrak{m}_{v_m^\star}$ finden und erhielten $\mathfrak{m}_{v_m^\star} \subseteq a \cdot \mathfrak{m}_{v_m^\star} \subseteq a \cdot \mathfrak{m}_{v_n^\star} \subseteq \mathfrak{m}_w$. Insgesamt gäbe es also in jedem Fall ein $m \geq n_0$ mit $\mathfrak{m}_{v_m^\star} \subseteq \mathfrak{m}_w$, das heißt der Bewertungsring $\mathcal{O}_{v_m^\star} \supseteq \mathcal{O}_w$ wäre henselsch. Damit wäre auch die von $v_n^\star$ induzierte Bewertung $\bar{v}_n^\star$ auf $Kv_{n+1}^\star = K_{n+1}$ henselsch.

Für das Bild des Bewertungsrings $\mathcal{O}_{\bar{v}_n^\star} = \mathcal{O}_{v_n^\star}/\mathfrak{p}_{n+1} \subseteq Kv_{n+1}^\star$ unter der Identifizierung φ_{n+1} von $Kv_{n+1}^\star$ mit K_{n+1} gilt jedoch

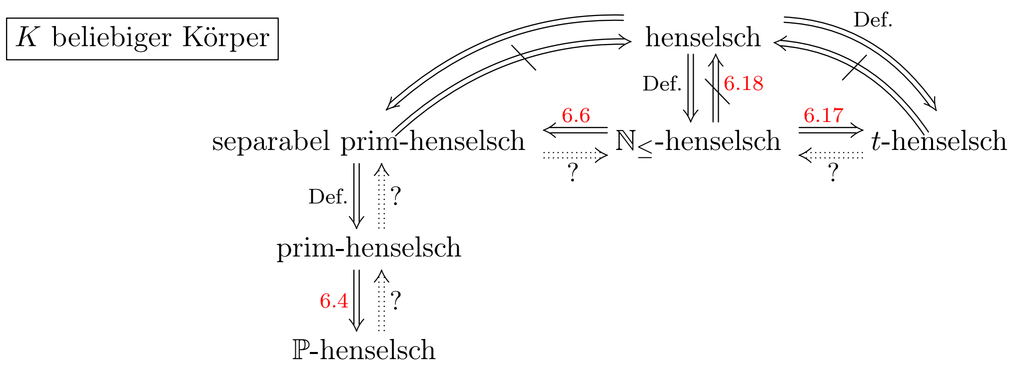
$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}\left(\mathcal{O}_{\bar{v}_n^\star}\right) &= \left\{\pi_{n+1}(x) \cdot (\pi_{n+1}(y))^{-1} \,|\, x, y \in \mathcal{O}, \pi_n(y) \neq 0\right\} \\
&= \mathcal{O}_{v_{n,0}} \cdot \left\{z^{-1} \in \mathcal{O}_{v_{n,0}} \,|\, \pi_{n+1,n}(z) \neq 0\right\} \\
&= \mathcal{O}_{v_{n,0}} \cdot \left\{z^{-1} \in \mathcal{O}_{v_{n,0}} \,|\, z \notin \ker(\pi_{n+1,n})\right\} \\
&= \mathcal{O}_{v_{n,0}} \cdot \left\{z^{-1} \in \mathcal{O}_{v_{n,0}} \,|\, z \notin \mathfrak{m}_{v_{n+1}}\right\} \\
&= \mathcal{O}_{v_{n,0}} \cdot (\mathcal{O}_{v_{n,0}})_{\mathfrak{m}_{v_{n+1}}} = (\mathcal{O}_{v_{n,0}})_{\mathfrak{m}_{v_{n+1}}} = \mathcal{O}_{v_{n+1}},
\end{aligned}$$

da die Abbildung $\pi_{n+1,n} : \mathcal{O}_{v_{n+1,0}} \to \mathcal{O}_{v_{n,0}}$ durch $x \mapsto x + \mathfrak{m}_{v_{n+1,n}}$ gegeben ist und da $v_{n+1,n} = v_{n+1}$ gilt. Also wäre mit $\bar{v}_n^\star$ auch die Bewertung v_{n+1} auf K_{n+1} henselsch. Wir hatten die Bewertung v_{n+1} jedoch so gewählt, dass sie nicht p_n-henselsch und damit insbesondere nicht henselsch ist – ein Widerspruch! □

7 Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Die Resultate aus dem vorherigen Kapitel wollen wir nun in Diagrammform noch einmal zusammenfassen. Wir schreiben dabei kurz "(separabel) prim-henselsch" statt "(separabel) prim-henselsch unterhalb von n für alle $n \in \mathbb{N}$" sowie "$\mathbb{N}_{\leq}$-henselsch" bzw. "$\mathbb{P}$-henselsch" statt "$n_{\leq}$-henselsch für alle $n \in \mathbb{N}$" bzw. "p-henselsch für alle $p \in \mathbb{P}$".

Für beliebige Körper K haben wir dann die folgenden Zusammenhänge, wobei "$\not\Leftarrow$" meint, dass die jeweilige Implikation nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen gilt.



Aus dem obigen Diagramm ergeben sich natürlicherweise eine Reihe offener Fragen.

Frage 7.1. *(Unter welchen Bedingungen) ist jeder t-henselsche Körper bereits $n_{\leq}$-henselsch für jedes $n \in \mathbb{N}$?*

Frage 7.2. *(Unter welchen Bedingungen) ist jeder Körper, der für alle $n \in \mathbb{N}$ separabel prim-henselsch unterhalb von n ist, bereits $n_{\leq}$-henselsch für alle $n \in \mathbb{N}$?*

Teilantworten auf die Fragen 7.1 und 7.2 können wir bereits geben: Nach Koenigsmanns Lemma 6.14 und unserem Korollar 6.10 lautet die Antwort auf beide Fragen jedenfalls "Ja" für alle Körper mit pro-auflösbarer absoluter Galoisgruppe, die weder separabel abgeschlossen noch reell abgeschlossen sind.

Offen bleibt, ob alle diese Bedingungen auch notwendig sind oder ob die entsprechenden Implikationen sogar ganz ohne zusätzliche Voraussetzungen gelten. Letzteres ist vermutlich nicht der Fall, eine genauere Untersuchung hätte jedoch den Rahmen der vorliegenden Arbeit gesprengt und war leider nicht möglich.

Frage 7.3. *(Unter welchen Bedingungen) ist jeder Körper, auf dem es für alle $p \in \mathbb{P}$ eine nicht-triviale p-henselsche Bewertung gibt, bereits $n_{\leq}$-henselsch bzw. (separabel) prim-henselsch unterhalb von n für alle $n \in \mathbb{N}$?*

Die Untersuchung dieser Frage fand, sowie die der folgenden modelltheoretischen Frage, ebenfalls keinen Platz mehr in der vorliegenden Arbeit. Beide bleiben einer zukünftigen Bearbeitung überlassen.

Frage 7.4. *Ist die Eigenschaft eines Körpers, $n_{\le}$-henselsch zu sein, das heißt eine nicht-triviale $n_{\le}$-henselsche Bewertung zu tragen, eine elementare Eigenschaft?*

Die genannten Teilantworten auf die Fragen 7.1 und 7.2 lassen sich wie folgt grafisch zusammenfassen. Alle Implikationen ohne Verweise folgen dabei sofort aus denen mit Verweisen zusammen mit den Implikationen aus dem vorherigen Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}K\text{ weder separabel}\\ \text{noch reell abgeschlossen}\\ \text{und }G_K\text{ pro-auflösbar}\end{array}} & & \text{henselsch} \arrow[dl, Leftrightarrow, bend right] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow, bend left, "6.14"] & \\
& \text{separabel prim-henselsch} \arrow[r, Leftrightarrow, "6.10"] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & \mathbb{N}_{\le}\text{-henselsch} \arrow[r, Leftrightarrow] & t\text{-henselsch} \\
& \text{prim-henselsch} \arrow[u, dotted, shift right, "?"'] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & & \\
& \mathbb{P}\text{-henselsch} \arrow[u, dotted, shift right, "?"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Ist G_K sogar pro-nilpotent, so sind, mit Korollar 6.8, fast alle in den beiden obigen Diagrammen aufgeführten Eigenschaften äquivalent.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}K\text{ weder separabel}\\ \text{noch reell abgeschlossen}\\ \text{und }G_K\text{ pro-nilpotent}\end{array}} & & \text{henselsch} \arrow[dl, Leftrightarrow, bend right] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow, bend left] & \\
& \text{separabel prim-henselsch} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "6.8"'] & \mathbb{N}_{\le}\text{-henselsch} \arrow[r, Leftrightarrow] & t\text{-henselsch} \\
& \text{prim-henselsch} \arrow[d, Rightarrow, shift right] & & \\
& \mathbb{P}\text{-henselsch} \arrow[u, dotted, shift right, "?"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Literaturverzeichnis

[Azu51] G. Azumaya, *On maximally central algebras*, Nagoya Math. J. **2** (1951), 119–150.

[EP05] A. J. Engler and A. Prestel, *Valued fields*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[Bec78] E. Becker, *Hereditarily-Pythagorean fields and orderings of higher level*, Monografías de Matemática [Mathematical Monographs], vol. 29, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978.

[Brö76] L. Bröcker, *Characterization of fans and hereditarily Pythagorean fields*, Math. Z. **151** (1976), no. 2, 149–163.

[EE77] O. Endler and A. J. Engler, *Fields with Henselian valuation rings*, Math. Z. **152** (1977), no. 2, 191–193.

[FJ15] A. Fehm and F. Jahnke, *On the quantifier complexity of definable canonical Henselian valuations*, MLQ Math. Log. Q. **61** (2015), no. 4-5, 347–361.

[FP11] A. Fehm and E. Paran, *Non-ample complete valued fields*, Int. Math. Res. Not. IMRN **18** (2011), 4135–4146.

[FJ86] M. D. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Hen97] K. Hensel, *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **6** (1897), 83–88.

[JK15a] F. Jahnke and J. Koenigsmann, *Uniformly defining p-henselian valuations*, Ann. Pure Appl. Logic **166** (2015), no. 7-8, 741–754.

[JK15b] ———, *Definable Henselian valuations*, J. Symb. Log. **80** (2015), no. 1, 85–99.

[JK15c] ———, *Defining coarsenings of valuations* (2015). Preprint, availabe on arXiv:1501.04506v1 [math.LO].

[Koe04] J. Koenigsmann, *Elementary characterization of fields by their absolute Galois group*, Siberian Adv. Math. **14** (2004), no. 3, 16–42.

[Koe95] J. Koenigsmann, *p-Henselian fields*, Manuscripta Math. **87** (1995), no. 1, 89–99.

[PZ78] A. Prestel and M. Ziegler, *Model-theoretic methods in the theory of topological fields*, J. Reine Angew. Math. **299(300)** (1978), 318–341.

[PZ75] ———, *Erblich euklidische Körper*, J. Reine Angew. Math. **274/275** (1975), 196–205 (German). Collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday, III.

[RZ10] L. Ribes and P. Zalesskii, *Profinite groups*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 40, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[Sch33] F. K. Schmidt, *Mehrfach perfekte Körper*, Math. Ann. **108** (1933), no. 1, 1–25 (German).

[TZ12] K. Tent and M. Ziegler, *A course in model theory*, Lecture Notes in Logic, vol. 40, Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[Wad83] A. R. Wadsworth, *p-Henselian field: K-theory, Galois cohomology, and graded Witt rings*, Pacific J. Math. **105** (1983), no. 2, 473–496.