

Die Stetigkeit der Nullstellen

Diplomarbeit
von
Dieter Nautz

betreut
von
Prof. P. Roquette

Universität Heidelberg ————— Fakultät für Mathematik ————— November 1989

Inhalt

Einleitung und Überblick 2

Zu den Bezeichnungen 6

1 Grundlagen aus der topologischen Algebra 7

1.1 Topologische Körper 7

1.2 Die Topologie bewerteter Körper 9

1.3 Die Topologie endlich dimensionaler Vektorräume 10

2 Die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen 13

3 Die Topologie des Funktionenkörpers 19

3.1 Die Topologie beliebig dimensionaler Vektorräume 19

3.2 Die Anwendung auf Funktionenkörper 24

4 Rationale Funktionenkörper 27

5 Die Topologie der Riemannschen Fläche 30

5.1 Definition und einige Eigenschaften 30

5.2 Die Riemannsche Fläche als K – Mannigfaltigkeit 31

5.3 Riemannsche Flächen von Körpererweiterungen 34

6 Die Stetigkeit der Nullstellen 41

6.1 Die Nullstellen der Norm einer Funktion 41

6.2 Die Stetigkeit der Nullstellen 43

Literaturverzeichnis 48

Einleitung und Überblick

Liegen die Koeffizienten zweier Polynome gleichen Grades hinreichend nahe beieinander, dann gilt dies auch für ihre Nullstellen. Dies ist – grob gesagt – die Aussage des Satzes über die Stetigkeit der Nullstellen (im folgenden oft kurz „Stetigkeit der Nullstellen“), wie er in Kapitel 2 für Polynome über bewerteten Körpern bewiesen wird.

Sei nun K ein algebraisch abgeschlossener, topologischer Körper (Def.1.1), $K(x)$ ein rationaler Funktionenkörper und $S = S(K(x)|K)$ die zugehörige Riemannsche Fläche. Stellen aus S und Elemente aus $K \cup \infty$ entsprechen sich in diesem Fall eindeutig. Nichtkonstante Polynome in x (oder einer anderen Erzeugenden) sind in der Sprache der Funktionenkörper Funktionen mit genau einem Pol, nämlich der Stelle P_∞ , die die Erzeugende auf ∞ abbildet. In Kapitel 4 wird gezeigt, wie S in natürlicher Weise mit einer Topologie versehen werden kann, so daß die Erzeugende einen Homöomorphismus zwischen $S \setminus P_\infty$ und K vermittelt. Die Stetigkeit der Nullstellen ist somit auch ein Satz über die Nullstellen von Elementen rationaler Funktionenkörper mit höchstens einem Pol.

Thema dieser Arbeit ist es zu untersuchen, ob – und gegebenenfalls in welcher Formulierung – die Stetigkeit der Nullstellen auch für Funktionen mit mehreren Polen in Funktionenkörpern beliebigen Geschlechts über algebraisch abgeschlossenen Grundkörper Gültigkeit besitzt. Die Elemente des Funktionenkörpers werden dabei in gewohnter Weise als Funktionen von der Riemannschen Fläche nach $K \cup \infty$ aufgefaßt.

Die Gliederung dieser Arbeit richtet sich strikt nach ihrem Ziel, nämlich der schrittweisen Verallgemeinerung des Satzes über die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen in Kapitel 2, auf rationale Funktionen in Kapitel 4, bis schließlich auf Funktionen aus Funktionenkörpern beliebigen Geschlechts im Schubkapitel. In den Kapiteln 1, 3 und 5 werden jeweils die Tatsachen zur Verfügung gestellt, welche zum Beweis des Satzes auf der jeweiligen Stufe notwendig oder interessant sind. Nachdem die Fragen nach der geeigneten Topologisierung des Funktionenkörpers und der zugehörigen Riemannschen Fläche in den Kapiteln 3 beziehungsweise 5 geklärt wurden (siehe auch unten), folgt schließlich aus Satz 6.5 eine Formulierung der Stetigkeit der Nullstellen, welche die klassische Situation bei Polynomen als Spezialfall beinhaltet:

Sei F ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Grundkörper K . Sei $f \in F$ gegeben mit verschiedenen Nullstellen $P_1, \dots, P_t$. Dann gibt es zu paarweise disjunkten Umgebungen U_i der P_i eine Umgebung W von f , so daß $\forall g \in W$ gleichen Grades wie f gilt: g hat genau $v_{P_i}(f)$ Nullstellen in U_i . Wir sagen dabei, eine Funktion habe „genau“ t Nullstellen, wenn die Summe der Vielfachheiten ihrer Nullstellen gleich t ist.

Die Topologie des Grundkörpers ist für die Gültigkeit des Satzes über die Stetigkeit der Nullstellen ausschlaggebend. Wenn F ein algebraischer Funktionenkörper über algebraisch abgeschlossenen, topologischen Grundkörper K ist, gilt die Stetigkeit der Nullstellen in obiger Formulierung genau dann in F , wenn sie für Polynome über K gilt (6.6). Bewiesen wird die Stetigkeit der Nullstellen für Polynome über bewerteten Körpern, doch ist es nicht klar, ob sie nicht auch für eine größere Klasse von topologischen Körpern gilt. Die wesentlichen Eigenschaften von topologischen Körpern und weitere Grundlagen aus der topologischen Algebra sind in Kapitel 1 zusammengestellt.

In Kapitel 2 – im Beweis der Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen über bewerteten Körpern – wird die Bewertung von K mit Hilfe der Gaußnorm (Def. 2.1) auf $K[x]$, und damit auch auf den Quotientenkörper $K(x)$ fortgesetzt. Obwohl die Gaußnorm eines rationalen Funktionenkörpers im allgemeinen von der Wahl der Erzeugenden abhängt, induziert die Gaußnorm bezüglich jeder Erzeugenden auf endlich dimensionalen Teilvektorräumen die Produkttopologie, die – wie in Abschnitt 1.3 gezeigt wird – auf endlich dimensionalen Vektorräumen über topologischen Körpern von der Wahl der Basis, also insbesondere von der Erzeugung des Funktionenkörpers unabhängig ist.

Basisunabhängigkeit der Produkttopologie bedeutet, daß die einen Basiswechsel bewirkenden linearen Abbildungen topologische Abbildungen sind. Umgebungen einer Funktion "bezüglich einer Basis" werden also bei Basiswechsel wieder auf Umgebungen der Funktion abgebildet. Diese Basisunabhängigkeit des Umgebungsbegriffs ist hier allerdings im rein topologischen Sinne – und nicht etwa numerisch – zu verstehen: Liegen zum Beispiel die Koeffizienten zweier linear unabhängiger Funktionen f und g bezüglich einer Basis "nahe beieinander", erreicht man durch Basiswechsel zu einer Basis, die für von Null verschiedenes $a \in K$ die Funktionen fa^{-1} und g enthält, daß die Koeffizienten von f und g bezüglich dieser Basis beliebig weit auseinander liegen. Im gleichen Sinne gilt: wenn zwei Funktionen bezüglich der Produkttopologie eines endlich dimensionalen Teilvektorraums "benachbart" sind, dann sind sie dies in der Produkttopologie jedes endlich dimensionalen Teilvektorraums, der beide Funktionen enthält.

Diese Beobachtung führt in Kapitel 3 zu der Konstruktion einer Topologie für Funktionenkörper, die als Vereinigung (genauer: induktiven Limes) ihrer endlich dimensionalen Teilvektorräume aufgefaßt werden. Eine Teilmenge von F sei genau dann offen, wenn ihr Durchschnitt mit jedem endlich dimensionalen Teilvektorraum von F in der Produkttopologie offen ist. Wir zeigen unter anderem, daß diese – offenbar von der Erzeugung des Funktionenkörpers unabhängige – Topologie auf jedem endlich dimensionalen Teilvektorraum die Produkttopologie induziert (3.1) und daß jede Funktion $f \in F$ eine Umgebung besitzt, in der alle Funktionen gleichen Grades wie f den gleichen Poldivisor besitzen (3.11). Auf diese Weise wird in Kapitel 4 die Stetigkeit der Nullstellen für rationale Funktionen durch eine geeignete Wahl der Erzeugenden auf die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen zurückgeführt.

Ein Ergebnis dieser Einordnung von Polynomen in den Kontext rationaler Funktionenkörper ist eine naheliegende Verallgemeinerung der Stetigkeit der Nullstellen auf Polynome verschiedenen Grades (4.2):

Sei K ein bewerteter, algebraisch abgeschlossener Körper, $f \in K[X]$ vom Grad n mit verschiedenen Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ und den zugehörigen Vielfachheiten $t_1, \dots, t_d$. Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein und mit $|f - g|$ die Gaußnorm bezeichnet.

Dann gibt es zu offenen, paarweise disjunkten Umgebungen U_i^{ϵ} der α_i ein $\delta > 0$, so daß $\forall g \in K[X]$ vom Grad $m > n$ gilt:

Ist $|f - g| < \delta$, dann hat g genau t_i Nullstellen in U_i^{ϵ} und genau $(m - n)$ Nullstellen, deren Bewertung $> \frac{1}{\epsilon}$ ist.

In Kapitel 5 wird die Riemannsche Fläche eines algebraischen Funktionenkörpers in der üblichen Weise topologisiert: $S(F|K) = S(F)$ soll die größte Topologie tragen, so daß alle Funktionen aus F stetig sind. Wir zeigen in Satz 5.3:

Gilt für Polynome über K der Satz über die Stetigkeit der Nullstellen, vermittelt zu $P \in S(F)$ jedes Element $x \in F$ mit $vp(x) = 1$ einen Homöomorphismus zwischen einer Umgebung von P in $S(F)$ und einer Umgebung der Null in K . $S(F)$ trägt somit in gewissem Sinne die Struktur einer K - Mannigfaltigkeit. Dieser Sachverhalt rechtfertigt die aus der Funktionentheorie stammenden Bezeichnungen *Ortsuniformisierende* und *Riemannsche Fläche* auch in der von uns betrachteten, allgemeineren Situation.

In Abschnitt 5.3 wenden wir uns der Abbildung $\mathcal{E}$ zu, die bei einer (endlichen) Erweiterung $F|E$ von Funktionenkörpern jeder Stelle aus $S(F)$ ihre Einschränkung in $S(E)$ zuordnet. Während die Stetigkeit und Surjektivität von $\mathcal{E}$ für beliebige topologische Grundkörper leicht zu zeigen ist (5.6), wird in unserem Beweis der Offenheit von $\mathcal{E}$ (5.7) an entscheidender Stelle die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen über K benutzt. Zumindest im bewerteten Fall trägt $S(E)$ damit die "identifizierende Topologie" bezüglich $\mathcal{E}$, das heißt $S(E)$ ist zum Quotientenraum bezüglich der von $\mathcal{E}$ auf $S(F)$ induzierten Äquivalenzrelation homöomorph. Daraus folgt dann auch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{E}$ (5.11). Wir zeigen schließlich in (5.15): Wenn die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen über K gilt, dann ist $(S(F), \mathcal{E})$ für (endliche) Erweiterungen $F|E$ von Funktionenkörpern über algebraisch abgeschlossenenem Grundkörper K eine – im Sinne der Funktionentheorie – verzweigte, $[F : E]$ – blättrige Überlagerung von $S(E)$.

Sei nun $T \subset S(F)$ eine echte Teilmenge von $S(F)$, so daß $T = \mathcal{E}^{-1}(T_0)$ das volle Urbild einer Teilmenge T_0 von $S(E)$ ist. Es gilt nun folgendes (6.2): Ist $P \in T$ Nullstelle von $f \in \mathcal{O}_T = \cap_{P \in T} \mathcal{O}_P$, dann ist $P|E$ Nullstelle der Norm von f bezüglich $F|E$. Umgekehrt besitzt jede Nullstelle der Norm von f in $S(E)$ mindestens eine Fortsetzung nach $S(F)$, welche Nullstelle von f ist.

Mit Hilfe der Stetigkeit der Abbildung

$$\Phi : \mathcal{O}_T \times T \rightarrow K, (f, P) \mapsto fP \quad (6.3),$$

welche wir für beliebige Teilmengen T von $S(F)$ zeigen, können die Nullstellen der zu

f konjugierten Funktionen von den Nullstellen von f getrennt werden. Damit gelingt es, über die Normabbildung die *Steigigkeit der Nullstellen* in Funktionskörpern auf die *Steigigkeit der Nullstellen* von Polynomen zurückzuführen.

Die Arbeit basiert auf einer zwei – semestrigen Vorlesung über algebräische Funktionskörper und einem Lehrseminar bei Prof. Roquette, das die Bewertungstheoretischen Grundlagen der Vorlesung zum Inhalt hatte. Alle für das Verständnis notwendigen Vorkenntnisse in Bewertungstheorie, werden in dem gleichnamigen Buch von Endler [5] bereitgestellt. Die Grundlagen aus der Theorie der algebräischen Funktionskörper können z.B. den einführenden Werken von Chevalley [3] oder Deuring [4] entnommen werden. Der Übersichtlichkeit wegen wurden einige besondere Bezeichnungen und Schreibweisen auf der folgenden Seite zusammengestellt und erläutert.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die diese Arbeit durch ihre Anteilnahme unterstützten. Hervorzuheben sind hier Franz – Viktor Kuhlmann und Florian Pop, die sich stets Zeit für mich nahmen und denen ich zahlreiche Anregungen verdanke. Nicht zuletzt danke ich Professor Roquette für die Themenstellung und für sein Interesse am Fortgang der Arbeit.

Zu den Bezeichnungen

Alle Bezeichnungen aus dem Gebiet der algebraischen Funktionenkörper stammen aus der gleichnamigen Vorlesung von Professor Roquette.

Da stets über dem gleichen Grundkörper K gearbeitet wird, schreiben wir für einen Funktionenkörper F statt $F|K$ und $S(F)$ statt $S(F|K)$ für die zugehörige Riemannsche Fläche.

Weiterhin bezeichnen wir mit $\text{Aut}(F|K)$ die Automorphismengruppe von $F|K$, mit $\text{Div}(F|K)$ die Divisorengruppe und mit $\text{grad}_F(A)$ den Grad eines Divisors $A \in \text{Div}(F|K)$.

Insbesondere ist $(f)_0$ der Nullstellendivisor und $(f)_\infty$ der Poldivisor einer Funktion $f \in F$. Für einen Divisor A ist wie üblich

$$\mathcal{L}(A) := \{f \in F \mid \forall P \in S(F) : v_P(f) \geq -v_P(A)\}$$

der zu A gehörende *Viefachenmodul* und $\dim A$ seine Dimension als K -Vektorraum. Um die Urbilder einer Abbildung φ von den Bildern ihrer Umkehrabbildung unterscheiden zu können, schreiben wir einer Konvention Bourbakis folgend

$$\varphi^{-1}(U)$$

für das Urbild von U unter φ und

$$\varphi^{-1}(U)$$

für das Bild von U unter der Umkehrabbildung φ^{-1} . Wird der Definitionsbereich einer Abbildung φ auf X eingeschränkt, schreiben wir dafür $\varphi|_X$.

Die auftretenden Topologien werden durchgängig, mit dem Buchstaben τ abgekürzt. Dabei ist $\tau|_X$ die von τ auf X induzierte Teilraumtopologie.

Wenn es notwendig erscheint, zwischen verschiedenen topologischen Räumen zu unterscheiden, schreiben wir $\tau(X)$ für die Topologie τ auf X .

Für $N \subseteq F$ und $T \subseteq S(F)$ schreiben wir

$$\tau_N(T)$$

für die grösste Topologie auf T , in der alle Funktionen aus N stetig sind. Für zwei Topologien τ und τ' bedeutet

$$\tau \leq [\geq] \tau',$$

daß τ gröber [feiner] als τ' ist.

1 Grundlagen aus der topologischen Algebra

1.1 Topologische Körper

Trägt ein bewerteter Körper K die von seiner Bewertung induzierte Topologie, sind Addition, Multiplikation und Inversenbildung — soweit definiert — stetige Abbildungen. Die algebraische Struktur von K ist in diesem Sinne mit seiner topologischen Struktur verträglich. Man sagt: K ist ein *topologischer Körper*. Die folgende Definition stammt aus Pontrjagin [16; S.172], die Aussagen über die Trennungseigenschaften finden sich z.B. bei Kowalsky [9; S.242].

Definition 1.1 Eine Menge K heißt *topologischer Körper*, wenn gilt:

- i) K ist ein Körper.
- ii) K ist ein topologischer Raum.
- iii) Die in K geltenden algebraischen Operationen sind stetig.

Genauer besagt iii): $\forall a, b \in K$ und für beliebige Umgebungen W und W' der Elemente $a - b$ und $a \cdot b$ gibt es Umgebungen U und V der Elemente a und b derart, daß $U - V \subseteq W$ und $U \cdot V \subseteq W'$ gilt. Zu $a \neq 0$ und einer beliebigen Umgebung W von a^{-1} gibt es eine Umgebung U von a , so daß $U^{-1} \subseteq W$.

Ein Körper, der mit einer Topologie versehen ist, in der die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen gilt, ist ein *topologischer Körper*. Die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen der Form $ax - 1$ liefert die Stetigkeit der Inversenbildung in K . Die Stetigkeit von Addition und Multiplikation liefern die Polynome

$$bX^2 + aX + (-a^2b^3 - a^2b)$$

beziehungsweise

$$bX^2 + aX + (-b^3 + 2ab^2 + ab - a^2b - a^2),$$

wobei das erste ab und das zweite $a - b$ als Nullstelle besitzt.

Die obige Definition legt es nahe, was unter einer *topologischen Gruppe*, einem *topologischen Vektorraum* oder einem *topologischen Ring* zu verstehen ist. Die Topologie jeder topologischen Gruppe wird durch eine Umgebungsbasis des neutralen Elementes festgelegt.

Nimmt man zu einem topologischen Körper K das Symbol " ∞ " hinzu, das den üblichen algebraischen Regeln genügen soll, bleibt die Stetigkeit der Operationen — soweit sie definiert sind — erhalten, wenn man Umgebungen von ∞ wie folgt definiert: V ist genau dann offene Umgebung von ∞ , wenn es eine offene Umgebung U der Null gibt, so daß $V = \{x^{-1} | x \in U\}$. Auf diese Weise ist die Topologie von $K \cup \infty$ durch die Topologie von K eindeutig bestimmt.

Satz 1.2 *Topologische Körper tragen entweder die triviale Topologie oder sind hausdorffsch.*

Dies ergibt sich aus den beiden folgenden Lemmata:

Lemma 1.3 Ein topologischer Körper K trägt entweder die triviale Topologie oder ist ein T_1 -Raum.

Beweis: Um zu zeigen, daß jeder Punkt in K abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß die Null abgeschlossen ist. Wir zeigen, daß der Abschluß der Null: $\{0\}$ entweder die Null oder ganz K ist. Damit äquivalent ist: $\{0\}$ ist ein Ideal in K . Seien dazu $a, b \in \{0\}$. Wegen der Stetigkeit der Addition gibt es zu einer beliebigen Umgebung U von $a - b$ Umgebungen V_1, V_2 von a und b , so daß $V_1 - V_2 \subseteq U$. $a, b \in \{0\}$ bedeutet, daß jede Umgebung von a beziehungsweise b die Null enthält. $0 \in V_1, 0 \in V_2$ also auch $0 \in U$. Damit enthält jede Umgebung von $(a - b)$ die Null, das heißt: $(a - b) \in \{0\}$.
Für $\lambda \neq 0$ sind die Abbildungen $\lambda : a \mapsto \lambda a$ und $\lambda^{-1} : a \mapsto \lambda^{-1}a$ stetig. Es ist $\{0\} = \lambda \lambda^{-1} \{0\}$. Somit ist $\lambda^{-1} \{0\}$ abgeschlossen und enthält die Null, also gilt: $\{0\} \subseteq \lambda^{-1} \{0\}$. Multiplikation mit λ ergibt: $\lambda \{0\} \subseteq \{0\}$. Damit ist $\{0\}$ ein Ideal in K , was zu zeigen war. $\square$

Lemma 1.4 Jede T_1 -Gruppe ist hausdorffsch.

Beweis: In einer T_1 -Gruppe G ist die Null abgeschlossen. Als Urbild der Null unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto (x - y)$ ist die Diagonale in $G \times G$ abgeschlossen. G ist somit hausdorffsch. $\square$
Definiert man Summe, Produkt und Quotient zweier Funktionen in einem Körper punktweise, gilt bekanntlich:

Satz 1.5 Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen (soweit definiert) in einem topologischen Körper sind wieder stetig.

Wir führen exemplarisch den Beweis für das Produkt vor.
Beweis: Sei X ein topologischer Raum und seien g, h stetige Funktionen von X nach K . Sei $t \in X$ und $y := g(t) \cdot h(t)$. Zu einer gegebenen Umgebung U von y konstruieren wir eine Umgebung V von t , so daß $(g \cdot h)(V) \subseteq U$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation in K gibt es Umgebungen V_1, V_2 von $g(t)$ beziehungsweise $h(t)$, so daß $V_1 \cdot V_2 \subseteq U$. Die Stetigkeit von g und h liefert eine Umgebung V von t , so daß $g(V) \subseteq V_1$ und $h(V) \subseteq V_2$. Es folgt: $(g \cdot h)(V) \subseteq U$, was zu zeigen war. $\square$
Es bleibt noch zu bemerken, daß die Umgebungen von ∞ in $K \cup \infty$ gerade so eingerichtet sind, daß Summe, Produkt und Quotient stetiger Abbildungen, soweit sie definiert sind, stetig bleiben. Es ist nach obigem Beweis klar, welche Verknüpfungen von stetigen Abbildungen in topologischen Gruppen, Vektorräumen oder Ringen wieder stetige Abbildungen ergeben. Weitere Eigenschaften topologischer Körper werden in dieser Arbeit nicht verwendet.

1.2 Die Topologie bewerteter Körper

Sei (K, τ) ein topologischer Körper und $V(0)$ das System der Umgebungen der Null in τ . Eine Teilmenge A von K heißt beschränkt, wenn es zu jedem $U \in V(0)$ ein $V \in V(0)$ gibt, so daß $AV \subseteq U$.

Definition 1.6 τ heißt vom Typ V , wenn $\forall U \in V(0)$ die Menge $(K \setminus U)^{-1}$ beschränkt ist.

Aus Wiesław [18; S.81] zitieren wir eine weitere Charakterisierung der "V - topologischen" Körper:

Satz 1.7 Sei (K, τ) ein topologischer Körper. Dann sind äquivalent:

- i) τ ist vom Typ V .
- ii) Zu jedem $U \in V(0)$ gibt es ein $V \in V(0)$, so daß für alle $a, b \in K$ gilt:

$$ab \in V \implies a \in U \text{ oder } b \in U.$$

Nach [10; S.150] sind die nichttrivialen Topologien vom Typ V gerade diejenigen, die von Bewertungen induziert werden. Die Bewertung ist dabei durch die Topologien nicht eindeutig bestimmt. Bekanntlich induzieren äquivalente Bewertungen die gleichen Topologien. Reelle Bewertungen, also Bewertungen vom Rang 1, korrespondieren mit denjenigen V - Topologien, bezüglich deren K ein analytisch nilpotentes Element besitzt, das heißt ein Element a , dessen Potenzen a^n ($n \in \mathbb{N}$) gegen Null konvergieren. Im folgenden werden oft die Begriffe V - topologisch und bewertet gleichwertig verwendet.

Der Durchschnitt zweier Körpertopologien, die von zwei unabhängigen Bewertungen induziert werden, ist eine Körpertopologie, welche im allgemeinen nicht von einer Bewertung induziert wird. Ein Beispiel dafür sind die rationalen Zahlen mit der sogenannten 6 - adischen Topologie, die der Durchschnitt der beiden Topologien ist, die von der 2 - und 3 - adischen Bewertung auf den rationalen Zahlen induziert werden. Hier konvergieren - im Widerspruch zu 1.6 - die Produkte $2^m \cdot 3^n$ ($m \in \mathbb{N}$) gegen Null, ohne daß einer der beiden Faktoren je durch 6 teilbar wäre.

V - Topologien sind die größten, nichttrivialen Körpertopologien mit denen ein Körper versehen werden kann [18; S.89]. Sie werden in diesem Sinne auch als "strikt minimal" bezeichnet. Die weitere Struktur des Verbandes der Körpertopologien, die ein gegebener Körper tragen kann, erweist sich laut Kowalsky [10; S.180] als "recht kompliziert". Nicht zuletzt deswegen muß die Frage, ob die Stetigkeit der Nullstellen auch für nicht V - topologische Körper gelten kann, in dieser Arbeit offen bleiben. Es wird am Ende von Kapitel 2 versucht darzustellen, an welcher Stelle des Beweises aus [1] eine V - Topologie charakterisierende Eigenschaft wesentlich benutzt wird.

1.3 Die Topologie endlich dimensionaler Vektorräume

Sei K ein topologischer Körper und V ein endlich dimensionaler K – Vektorraum. Sei $\dim V = n$. Jede Basis B von V vermittelt in natürlicher Weise einen Isomorphismus φ_B von V auf das topologische Produkt K^n . Wir versehen V mit der (eindeutig bestimmten) Topologie, in der φ_B ein Homöomorphismus ist, und bezeichnen diese Topologie als die *Produkttopologie* bezüglich B . Diese ist dann die grösste Topologie auf V , so daß die Koordinatenabbildungen – oder kurz die Projektionen – bezüglich B stetig sind.

Lemma 1.8 Seien V und B wie oben und V trage die Produkttopologie bezüglich B . Dann sind alle Linearformen von V stetig.

Beweis: Da V endlich dimensional ist, erzeugen die Projektionen bezüglich der gegebenen Basis den Dualraum von V . Eine Linearform q ist Linearkombination der nach Konstruktion stetigen Projektionen. Als endliche Summe von Produkten stetiger Abbildungen in einen topologischen Körper ist q stetig. $\square$

Da Projektionen bezüglich jeder Basis von V Linearformen sind, folgt:

Satz 1.9 Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem topologischen Körper. Dann ist die Produkttopologie auf V unabhängig von der Wahl der Basis.

Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem topologischen Körper, kann man also von der Produkttopologie auf V sprechen. Für unendlich dimensionale Vektorräume gilt dies nicht; bekanntlich hängt in diesem Fall die Produkttopologie von der Basiswahl ab. Charakterisiert wird die Produkttopologie durch eine universelle Eigenschaft: Eine Abbildung φ von einem topologischen Raum X in ein topologisches Produkt ist genau dann stetig, wenn $p \circ \varphi$ stetig ist, für jede der Produkttopologie induzierende Projektion p .

Wir bezeichnen die Produkttopologie eines endlich dimensionalen K – Vektorraumes V im folgenden mit $\tau(V)$. U, V, W seien im folgenden stets mit der Produkttopologie versehen, endlich dimensionale Vektorräume über dem gleichen topologischen Körper K .

Satz 1.10 Seien V und W wie oben und $V \subseteq W$. Dann induziert die Produkttopologie auf W die Produkttopologie auf V .

Beweis: Ergänzt man eine Basis von V zu einer Basis von W , sieht man, daß die Projektionen von V nach K in der Teilraumtopologie auf V stetig sind. Das bedeutet: $\tau(V) \leq \tau(W)|_V$. $\tau(W)|_V$ ist die grösste Topologie, in der die Inklusion von V nach W stetig ist.

$$\Phi(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j \Phi(v_i, w_j).$$

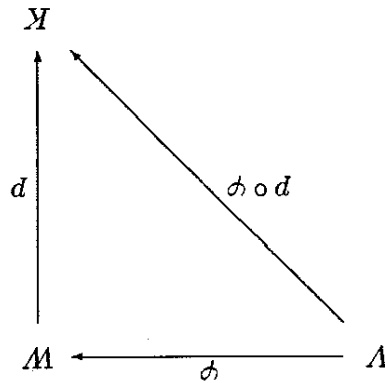
$$x = \sum_{i=1}^m x_i v_i, y = \sum_{j=1}^n y_j w_j \text{ ist:}$$

Beweis: Seien $(v_1, \dots, v_m)$ beziehungsweise $(w_1, \dots, w_n)$ Basen von V und W . Eine bilineare Abbildung ist durch die Bilder $\Phi(v_i, w_j)$ eindeutig bestimmt. Für

Lemma 1.12 In der Produkttopologie sind Bilinearformen $\Phi: V \times W \rightarrow K$ stetig.

□

$p \circ \varphi$ ist eine Linearform von V und nach 1.8 stetig.



sind.

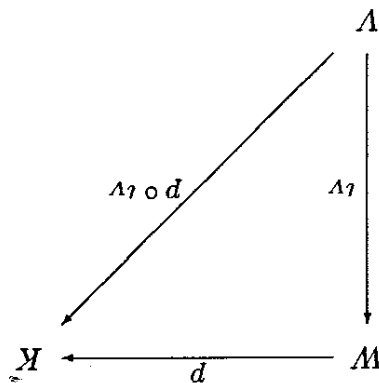
Beweis: Auf Grund der universellen Eigenschaft der Produkttopologie ist φ genau dann stetig, wenn für alle Projektionen p von W nach K die Abbildungen $p \circ \varphi$ stetig

Satz 1.11 In der Produkttopologie sind lineare Abbildungen $\varphi: V \rightarrow W$ stetig.

□

heißt: $\tau(V) \geq \tau(W)|_V$.

Aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie folgt, daß die Inklusion in der Produkttopologie stetig ist, weil die Projektionen von W nach K stetig sind. Das



Umgebungen der Koordinaten von x und y entsprechen in der Produkttopologie Umgebungen von (x, y) in $V \times W$. Φ ist somit stetig, weil Addition und Multiplikation im topologischen Körper K stetig sind. $\square$

Wieder folgt aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie:

Satz 1.13 In der Produkttopologie sind bilineare Abbildungen $\varphi : U \times V \rightarrow W$ stetig.

Addition und Skalarmultiplikation sind bilinear beziehungsweise lineare Abbildungen, deshalb folgt:

Korollar 1.14 Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem topologischen Körper K . Versieht man V mit der Produkttopologie, so ist V ein topologischer Vektorraum.

Wenn K nichttrivial ist, folgt mit 1.4, daß auch V hausdorffsch ist.

Ist K ein kompletter, nichtdiskreter bewerteter Körper und trägt K die von dieser Bewertung induzierte Topologie, vereinfacht sich die Situation erheblich. In diesem Falle ist die Produkttopologie die einzige Topologie bezüglich derer der endlich dimensionale K – Vektorraum V ein hausdorffscher topologischer Vektorraum ist. Zum Beweis siehe zum Beispiel Bourbaki ([2]; chap.1, Theorem 2). Satz 1.10 folgt dann sofort, weil jeder Teilraum eines hausdorffschen topologischen Vektorraumes trivialerweise wieder ein hausdorffscher topologischer Vektorraum ist.

Bislang wurde lediglich die Stetigkeit von Multiplikation und Addition in K benutzt. Alle Aussagen dieses Abschnitts gelten also auch dann, wenn der Körper bezüglich seiner Topologie nur ein topologischer Ring ist.

2 Die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen

Der folgende Beweis des Satzes über die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen über bewerteten – beziehungsweise V – topologischen – Körpern stammt im wesentlichen aus dem Buch von Bosch, Güntzert und Remmert [1; S.145]. Dort wird der Satz für Polynome über nichtarchimedisch und reell bewerteten, kompletten Körpern bewiesen. Der Beweis läßt sich durch einfaches Modifizieren der Abschätzungen auf archimedische Bewertungen übertragen. Die Komplettheit des Körpers wird in [1] lediglich dazu benutzt, um – auf Grund der Eindeutigkeit der Bewertungsfortsetzung reeller Bewertungen von kompletten Körpern auf ihren algebraischen Abschluß $\bar{K}$ – weiterhin von der Bewertung eines Elementes aus $\bar{K}$ sprechen zu können. Tatsächlich gelten die Abschätzungen im unten stehenden Beweis für jede Fortsetzung der Bewertung des Körpers auf seinen algebraischen Abschluß. Es ist deshalb sinnvoll, die Stetigkeit der Nullstellen gleich für algebraisch abgeschlossene Körper zu formulieren. Der Beweis funktioniert auch für beliebige Bewertungen, wenn man beachtet, daß im Falle nichteinstufiger Bewertungen der übliche Folgenbegriff für Konvergenzfragen nicht mehr ausreicht. Die Beschränkung in [1] auf normierte Polynome bedeutet keine Einschränkung, weil in topologischen Vektorräumen die Multiplikation mit von Null verschiedenen Skalaren einen Homöomorphismus vermittelt.

Im folgenden sei K ein algebraisch abgeschlossener, bewerteter Körper.

Wir schreiben die Bewertung des Körpers multiplikativ und mit Betragsschritten: Elemente in Betragsschritten sind also Elemente der zugehörigen Wertegruppe. Um später Werte auch addieren zu können, wird die Wertegruppe ordnungstreu in die multiplikative Gruppe der positiven Elemente eines geeigneten geordneten Körpers eingebettet (vgl. dazu [14]).

Definition 2.1 Sei $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x]$. $|f| := \max_{i=0, \dots, n} |a_i|$ heißt Gaußnorm von f .

Betrachtet man den endlich dimensionalen K – Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n und versteht diesen mit der durch die Gaußnorm induzierten Topologie τ , sind die Projektionen bezüglich der Basis $(1, x, \dots, x^n)$ stetig. Da jede in τ offene Menge eine in der Produkttopologie offene Menge enthält, sind die Topologien gleich. Die Gaußnorm induziert also auf jedem endlich dimensionalen K – Vektorraum die Produkttopologie.

$$f = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

sei im folgenden ein gegebenes Polynom n – ten Grades, welches der Einfachheit halber im Beweis als normiert vorausgesetzt wird.

Wir sagen ein Polynom habe „genau“ t Nullstellen, wenn die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen gleich t ist. Wir beweisen die Stetigkeit der Nullstellen in folgender Formulierung:

$$|\alpha - \beta| \leq n(n+1)^{\frac{n}{2}} |f| |f - g|^{\frac{n}{2}}. \quad (1)$$

Lemma 2.5 Seien f und g wie oben. Dann gibt es zu jeder Nullstelle α von f eine Nullstelle β von g , so daß:

Daraus folgt: $|g(\alpha)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |b_i - a_i| |\alpha|^i$. Nach obigem Lemma ist $|\alpha| \leq n|f|$ und aus $n|f| \geq 1$ folgt für $i = 0, \dots, n$: $|\alpha|^i \leq n^i |f|^i$. Nach Definition ist für alle i : $|b_i - a_i| \leq |f - g|$. Zusammengefasst ergibt dies die behauptete Ungleichung. $\square$

$$g(\alpha) = g(\alpha) - f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i - a_i) \alpha^i.$$

Dann gilt:

Beweis: Sei $f(x) = x^n + a_{n-1} \dots + a_0$ und $g(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$.

$$|g(\alpha)| \leq n^n (n+1) |f|^n |f - g|.$$

Lemma 2.4 Seien f und g nichtkonstante und normierte Polynome vom Grad n und $f(\alpha) = 0$. Dann gilt:

$\square$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^n = -a_{n-1} \alpha^{n-1} - \dots - a_0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{-a_0}{\alpha^{n-1}} - \dots - a_{n-1} \\ &\Leftrightarrow |\alpha| \leq |a_0| |\alpha|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| \\ &\Rightarrow |\alpha| \leq n \cdot |f|. \end{aligned}$$

Beweis: Für $|\alpha| \leq 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $|\alpha| > 1$. Es ist

$$|\alpha| \leq n \cdot |f|.$$

Dann gilt:

Lemma 2.3 Sei $f(x) = x^n + a_{n-1} \dots + a_0$, $n \geq 1$ und $\alpha \in K$, so daß $f(\alpha) = 0$.

Der Beweis des Satzes erfordert einige Hilfssätze:

Satz 2.2 Seien K und f wie oben, und $\alpha \in K$ eine Nullstelle von f der Vielfachheit t . Dann gibt es zu jedem $0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min_{\alpha_i \neq \alpha_j} |\alpha_i - \alpha_j|$ ein $\delta > 0$, so daß für alle Polynome $g \in K[X]$ vom Grad n mit $|f - g| < \delta$ gilt: g hat genau t Nullstellen in $U(\alpha, \epsilon) := \{x \in K \mid |x - \alpha| < \epsilon\}$.

eine Umgebungsbasis der Null in K . Eine Umgebungsbasis des Nullpolynoms erhält man analog über die Gaußnorm. Im allgemeinen – im Falle beliebiger Bewertungen – läßt sich diese nicht zu einer abzählbaren Basis verkleinern, so daß der übliche

$$U_\delta := \{y \in K \mid |y| < \delta\}$$

bilden die Mengen

Läßt man δ die von Null verschiedenen Elemente der Wertegruppe durchlaufen, den Vielfachheiten "richtig" auf die gegebenen Umgebungen verteilen.

Zu untersuchen bleibt nun noch, ob sich die Nullstellen dieser Polynome gemäß von g in den gegebenen Umgebungen liegen.

Zu gegebenen Umgebungen der Nullstellen von f gibt es damit eine Umgebung U von f , so daß für alle Polynome $g \in U$ gleiches Grad f gilt, daß alle Nullstellen

Ersetzt man (1) durch (2), gilt 2.5 symmetrisch in f und g .

$$|\alpha - \beta| \leq n(n+1)^{\frac{n}{2}}(|f - g| + \max(|f|, |g|))|f - g|^{\frac{n}{2}}. \quad (2)$$

Daraus folgt:

$$|g| = |g - f + f| \leq |f - g| + |f| \leq |f - g| + \max(|f|, |g|).$$

Es ist

$$|\alpha - \beta| \leq n(n+1)^{\frac{n}{2}}|g||f - g|^{\frac{n}{2}}.$$

so daß

Nach 2.5 gibt es umgekehrt zu jeder Nullstelle β von g eine Nullstelle α von f , fachen Nullstellen erreichen:

Durch eine Abänderung von (1) läßt sich ersteres auch für Polynome mit mehreren "richtig" verteilt.

und die Nullstellen von g sind gemäß den Vielfachheiten von f auf den Umgebungen Es gibt keine weiteren Nullstellen von g außerhalb der gegebenen Umgebungen,

stelle von g liegt – paarweise disjunkt. Aus Gradgründen folgt:

Umgebungen der Nullstellen von f – in denen nach 2.5 jeweils mindestens eine Null-Stetigkeit der Nullstellen gleichwertig. Denn ist $|f - g|$ hinreichend klein, sind die Für Polynome f ohne mehrfache Nullstellen ist Lemma 2.5 dem Satz über die

Dies steht im Widerspruch zum letzten Lemma. $\square$

$$\begin{aligned} |g(\alpha)| &= |\alpha - \beta_1| \cdots |\alpha - \beta_n| \\ &> (n(n+1)^{\frac{n}{2}}|f||f - g|^{\frac{n}{2}})^n \\ &= n^n(n+1)|f|^n|f - g|. \end{aligned}$$

Dann ist

$$|\alpha - \beta_i| > n(n+1)^{\frac{n}{2}}|f||f - g|^{\frac{n}{2}}.$$

Beweis: Sei $g(x) = b_n(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n)$. Angenommen für jedes i gelte

– definiert auf dem Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n – stetig. Ein Analogon zu Lemma 2.4 gilt also für beliebige topologische Körper. Wenn man auf die Bewertungsschreibweise verzichtet, bietet sich folgende Formulierung an:

$$(g, \delta) \mapsto g(\delta)$$

Für jeden topologischen Körper ist die Abbildung

eingehet, daß der Körper V – topologisch ist.

Wir zeigen nun, an welcher Stelle des Beweises notwendig die Voraussetzung Nullstellen in $U(\alpha, \epsilon_1)$. Damit ist Satz 2.2 vollständig bewiesen.

Grundgründen: Alle g_n mit $\delta_n \leq \delta_0$ besitzen im Widerspruch zur Annahme genau t Gradgründen: $U(\alpha, \epsilon_1)$. Da die Umgebungen der α_j paarweise disjunkt gewählt sind, folgt aus

Für alle Polynome g_n mit $\delta_n \leq \delta_0$ gilt somit: g hat mindestens t Wurzeln in $U(\alpha, \epsilon_1)$. Nach eventueller Umordnung sei $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = \alpha$.

len von f . Zu ϵ_1 gibt es daher ein δ_0 , so daß: $|\beta_{j\delta_n} - \alpha_j| < \epsilon_1$ für $j = 1, \dots, n$ und Die Grenzwerte der verschiedenen Teilfolgen liefern also die verschiedenen Nullstel-

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\delta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (x - \beta_{j\delta_n}) = \prod_{j=1}^t (x - \alpha_j) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=t+1}^n (x - \beta_{j\delta_n}) = \prod_{j=1}^t (x - \alpha_j).$$

Es folgt:

und so folgt nach n – maliger Anwendung dieses Argumentes, daß es für $j = 1, \dots, n$ eine Teilfolge $(\beta_{j\delta_n})$ gibt, die für jedes j gegen eine Nullstelle α_j von f konvergiert.

$$\lim_{\delta_1} |g_{\delta_1} - f| = 0$$

Nun ist

f – sagen wir α_1 – und eine Teilfolge $(\beta_{1\delta_1})$ von $(\beta_{1\delta})$, die gegen α konvergiert. Da es höchstens n verschiedene Nullstellen von f gibt, existiert eine Nullstelle von

$$|\beta_{1\delta} - \alpha(\delta)| \rightarrow 0 \text{ für } \delta \rightarrow 0.$$

Mit (2) gibt es zu jedem δ eine Nullstelle $\alpha(\delta)$, so daß

$$g_\delta = (x - \beta_{1\delta}) \cdots (x - \beta_{n\delta}).$$

so daß keines der g_δ genau t Wurzeln in $U(\alpha, \epsilon_1)$ besitzt. Sei

$$\forall \delta : |f - g_\delta| < \delta,$$

in $U(\alpha, \epsilon_1)$ besitzt. Es gibt daher eine Folge (g_δ) von Polynomen mit jedem $\delta > 0$ ein Polynom g_δ existiert mit $|f - g_\delta| < \delta$, welches nicht genau t Wurzeln

mit den Bezeichnungen aus 2.2 – ein $\epsilon_0 := \min_{\alpha_j \neq \alpha} |\alpha_j - \alpha| > 0$, so daß zu Angenommen die Stetigkeit der Nullstellen würde nicht gelten. Dann gibt es –

– Smith – Folgen gemeint.

einer Umgebungsbasis der Null besitzen. Im weiteren sind mit "Folgen" stets Moore sogenannte Moore – Smith – Folgen [17; S.57], deren Indexmengen die Mächtigkeit Folgenbegriff für Konvergenzfragen nicht mehr ausreicht. Wir betrachten deshalb

ist wohldefiniert, surjektiv und stetig. Sei S_n die n -te Symmetrische Gruppe und $(\mathcal{C}^2/\mathcal{C}^*)^n/S_n$ der zugehörige Quotientenraum. Aus der lokalen Kompaktheit von $\mathcal{C}$ in der üblichen Topologie folgt die Kompaktheit von $\mathcal{C} \cup \infty$. Mit $\mathcal{C}^2/\mathcal{C}^*$ ist dann auch $(\mathcal{C}^2/\mathcal{C}^*)^n/S_n$ kompakt. Da

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{C}^2/\mathcal{C}^*)^n &\longrightarrow \mathcal{C}^h[x, y]_n/\mathcal{C}^* \\ (a_i, b_i)_{i=1, \dots, n} &\longmapsto \prod_{i=1}^n (a_i x - b_i y) \end{aligned}$$

Die Abbildung

zugehörige Quotientenraum. torraum der homogenen Polynome in x und y vom Grad n und $\mathcal{C}^h[x, y]_n/\mathcal{C}^*$ der identifizieren. Sei weiterhin $\mathcal{C}^h[x, y]_n$ der mit der Produkttopologie versehene Vektorraum $\mathcal{C} \cup \infty$ mit der Sphäre im $\mathcal{C}^2$, also mit dem Quotientenraum $\mathcal{C}^2/\mathcal{C}^*$. Sei $\mathcal{C}^*$ die multiplikative Gruppe von $\mathcal{C}$. Mit Hilfe der stereographischen Projektion erhält man eine Isomorphie zwischen $\mathcal{C}^h[x, y]_n/\mathcal{C}^*$ und dem Quotientenraum $(\mathcal{C}^2/\mathcal{C}^*)^n/S_n$. Als weiteres Beispiel zitieren wir einen Beweis aus einer Vorlesung über Polynomgleichungen von Professor W. Böge:

etwa bei Henrici [7; S.281]. weise an den auf dem Satz von Rouché basierenden, funktionentheoretischen Beweis, dem Polynome über den komplexen Zahlen betrachtet werden. Man denke beispielsweise an den auf dem Satz von Rouché basierenden, funktionentheoretischen Beweis, Der Beweis der Stetigkeit der Nullstellen vereinfacht sich im klassischen Fall, in symmetrische Formulierung abzuheben.

Es fällt auf, daß es im Gegensatz zu 2.5 hier nicht leicht fällt, eine in f und g Somit besitzen alle $g \in W$ mindestens eine Nullstelle β mit $\alpha - \beta \in U$. □

Nach 2.6 gibt es zu V eine Umgebung W von f , so daß $\forall g \in W$ gilt, daß $g(\alpha) \in V$. Nach 2.6 gibt es zu U eine Umgebung V der Null, so daß:

$$g(\alpha) \in V \implies \exists i : \alpha - \beta_i \in U.$$

Beweis: Sei $g(x) = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n)$, dann ist $g(\alpha) = \prod_{i=1}^n (\alpha - \beta_i)$. Nach 1.6 iv) gibt es zu U eine Umgebung V der Null, so daß:

$$\text{so daß } g(\beta) = 0.$$

Satz 2.7 Sei K ein algebraisch abgeschlossener, V - topologischer Körper. Seien f und g wie oben und $f(\alpha) = 0$. Dann gibt es zu jeder Umgebung U der Null eine Umgebung W von f , so daß für alle $g \in W$ gilt: Es existiert ein β mit $\alpha - \beta \in U$.

Erst in Lemma 2.5 wird eine Eigenschaft verwendet, die V - topologische Körper kennzeichnet. Verzichtet man wieder auf die Bewertungsschreibweise und spricht nur noch von Umgebungen, erhält die Aussage von 2.5 folgende Form:

Korollar 2.6 Seien f und g wie oben und $f(\alpha) = 0$. Sei K ein topologischer Körper. Dann gibt es zu jeder Umgebung U der Null eine Umgebung W von f , so daß $\forall g \in W$ gilt: $g(\alpha) \in U$.

φ über $(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^*)^n/S_n$ faktorisiert, erhält man eine stetige, bijektive Abbildung von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum. Bekanntlich ist in diesem Fall die Umkehrabbildung stetig.

Nun wählt man aus jeder Klasse (a_i, b_i) aus $\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^*$ den Repräsentanten mit $a_i = 1$ (für $a_i = 0$ nimmt man den Repräsentanten $(0, 1)$) und setzt $y = 1$.
Damit haben wir eine stetige Abbildung der Polynome höchstens n -ten Grades auf ihre Nullstellen konstruiert.

Lokale Kompaktheit ist allerdings eine sehr starke Voraussetzung an einen topologischen Körper. Es folgt aus dem Satz von Pontrjagin [11], der lokal kompakte topologische Körper klassifiziert, daß $\mathbb{C}$ mit der üblichen Topologie der einzige (nichttriviale) topologische und algebratisch abgeschlossene Körper ist, für den dieser Beweis in Frage kommt.

Kittinen liefert in [8; S.6] ein Beispiel für einen nichttrivialen topologischen Körper, in dem der Satz über die Stetigkeit der Nullstellen nicht gilt. Seine Konstruktion liefert im Falle des Körpers der rationalen Zahlen den Durchschnitt über alle p -adischen Topologien. Kittinen zeigt, daß dort die Quadratwurzelfunktion in allen von Null verschiedenen Punkten unstetig ist. Damit kann für Polynome der Form $X^2 - a$ ($a \in K$) der Satz über die Stetigkeit der Nullstellen in dieser Topologie nicht gelten.

Die Suche nach einem Körper, der nicht V -topologisch ist und für dessen Polynome die Stetigkeit der Nullstellen dennoch gilt, blieb erfolglos. Es ist erstaunlich, daß auf die Frage, ob V -topologische Körper durch die Stetigkeit der Nullstellen charakterisiert sind, in der recht umfangreichen Literatur über topologische Körper nicht eingegangen wird.

3 Die Topologie des Funktionenkörpers

Die Topologie des Grundkörpers K sei fortan stets nichttrivial.

3.1 Die Topologie beliebig dimensionaler Vektorräume

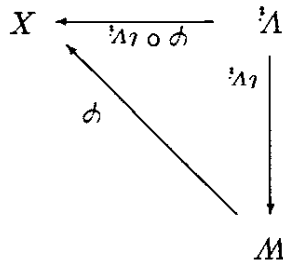
Jeder Funktionenkörper ist als unendlich dimensionaler K - Vektorraum Vereinigung seiner endlich dimensionalen Teilvektorräume, die – wie gesehen – in der Produkttopologie eine in vieler Hinsicht kanonische Topologie tragen. Wir konstruieren in diesem Abschnitt eine Topologie für Funktionenkörper, die auf jedem endlich dimensionalen Teilvektorraum die Produkttopologie induziert. Satz 3.2 rechtfertigt für diese Topologie die Bezeichnung *Lineartopologie*.

Sei W ein K - Vektorraum beliebiger Dimension über K , also zum Beispiel ein Funktionenkörper über K , und $(V_i)_{i \in I}$ die Familie aller endlich dimensionalen Teilvektorräume von W . Es ist $W = \bigcup_{i \in I} V_i$. Jeder endlich dimensionale Teilvektorraum V_i von W trage die Produkttopologie $\tau(V_i)$. Wir definieren die *Lineartopologie* τ auf W durch:

$$M \subseteq W \text{ offen in } \tau \iff \forall i \in I : M \cap V_i \text{ offen in } \tau(V_i).$$

Von der Wohldefiniertheit der Topologie überzeugt man sich leicht. Die Definition der Lineartopologie liefert für den Fall, daß W endlich dimensional ist, die Produkttopologie auf W . Jeder Teilvektorraum W_0 von W ist abgeschlossen in der Lineartopologie, denn für alle i ist $W_0 \cap V_i$ ein Teilvektorraum von V_i und damit abgeschlossen in der Produkttopologie auf V_i . Die Lineartopologie erhält man auch über die Konstruktion von W als induktiven Limes des induktiven Systems (V_i, ι_{V_i}) . Die Inklusionen $\iota_{V_i} : V_i \hookrightarrow W$ sind für alle i stetig in τ , und τ ist sogar die feinste Topologie, so daß die Inklusionen aller endlich dimensionalen Teilvektorräume stetig sind. Denn ist τ' eine echt feinere Topologie auf W mit dieser Eigenschaft, dann gibt es eine Teilmenge $M' \subseteq W$ offen in τ' , aber nicht offen in τ . Das heißt: $M' \cap V_{i_0}$ ist nicht offen in $\tau(V_{i_0})$ für ein $i_0 \in I$. Das bedeutet, daß $\iota_{V_{i_0}}$ nicht stetig in τ' ist.

τ besitzt damit eine universelle Eigenschaft: Ist X ein topologischer Raum und φ eine Abbildung von W nach X , dann ist φ genau dann stetig, wenn $\varphi \circ \iota_{V_i}$ stetig ist $\forall i \in I$:



Beweis: Sei zunächst $\varphi : W \rightarrow W'$ eine lineare Abbildung. $\forall i \in I$ ist $\varphi(V_i)$ ein endlich dimensionaler Teilvektorraum von W' . Zu jedem $i \in I$ gehört so ein kommutatives Diagramm:

Satz 3.2 Seien W, W', W'' mit der Lineartopologie versohene K - Vektorräume. Dann sind alle linearen und bilinearen Abbildungen von W nach W' beziehungsweise von $W \times W'$ nach W'' stetig.

Bei unendlich dimensionalen Vektorräumen hängt die Boxtopologie von der Basiswahl ab (vergleiche z.B. [13; S.19]). Die Lineartopologie ist somit echt feiner als jede Boxtopologie.

und es folgt die Gleichheit.

□

$$\tau(V) = \tau_B|_V \leq \tau|_V$$

Somit gilt:

Die Inklusionen sind damit stetig in τ_B . Es folgt $\tau_B \leq \tau$.

$$\tau_B|_V = \tau_B|_{(B_{j_0})|_V} = \tau((B_{j_0}))|_V = \tau(V)$$

$j_0 \in J$, so daß $V \subseteq (B_{j_0})$. Mit Satz 1.10 folgt:
Ist $V \subset W$ ein endlich dimensionaler Teilvektorraum von W , dann gibt es ein $j_0 \in J$, so daß $V \subseteq (B_{j_0})$. Mit Satz 1.10 folgt:
wobei mit $\tau((B_j))$ die Produkttopologie auf dem von B_j erzeugten Vektorraum gemeint ist.

$$\forall j \in J : \tau_B|_{(B_j)} = \tau((B_j)),$$

Sei $(B_j)_{j \in J}$ die Familie aller endlichen Teilsysteme von B , dann ist

$$M = \sum_{\lambda \in A} M_{\lambda \in \lambda}, \text{ wobei } M_{\lambda} \subseteq K \text{ offen ist } \forall \lambda \in A.$$

Beweis: Sei B eine Basis von W und τ_B die "Boxtopologie" auf W bezüglich B , das heißt: ist $B = (e_{\lambda})_{\lambda \in A}$, dann ist eine Basismenge M bezüglich τ_B von der Form

$$\forall i \in I : \tau|_{V_i} = \tau(V_i).$$

Satz 3.1

Es gilt sogar die Gleichheit:

$$\forall i \in I : \tau|_{V_i} \leq \tau(V_i).$$

Die Lineartopologie ist nicht trivial, denn die Null ist abgeschlossen in τ und nicht offen. Sei $\tau|_{V_i}$ die auf V_i von τ induzierte Teilraumtopologie. Die Stetigkeit der $\tau|_{V_i}$ ($i \in I$) impliziert:

Die Produkttopologie auf $W \times W'$ besitzt somit eine universelle Eigenschaft. $\varphi(V_i \times V'_j)$ ist für alle $V(i, j) \in I \times J$ in einem endlich dimensionalen Teilvektorraum V'' von W'' enthalten. Man erhält das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 V_i & \xleftarrow{\varphi|_{V_i}} & \varphi(V_i) \\
 \downarrow \iota_{V_i} & & \downarrow \iota_{\varphi(V_i)} \\
 W & \xleftarrow{\varphi} & W'
 \end{array}$$

Wegen der universellen Eigenschaft von τ ist φ genau dann stetig, wenn $\varphi \circ \iota_{V_i}$ stetig ist $\forall i \in I$. $\varphi \circ \iota_{V_i} = \iota_{\varphi(V_i)} \circ \varphi|_{V_i}$ ist stetig $\forall i \in I$, denn $\iota_{\varphi(V_i)}$ ist stetig nach Konstruktion der Lineararttopologie, und $\varphi|_{V_i}$ ist als lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen nach 1.11 stetig in der Produkttopologie.

Sei nun $\varphi : W \times W' \rightarrow W''$ bilinear und $(V'_j)_{j \in J}$ die Familie aller endlich dimensionalen Teilvektorräume von W' . Sei τ_p die Produkttopologie auf $W \times W'$ und τ_p die feinste Topologie, so daß die Inklusionen

$$V(i, j) \in I \times J : \iota_{V_i V'_j} : V_i \times V'_j \hookrightarrow W \times W'$$

stetig sind. Dabei tragen die Produkte $V_i \times V'_j$ die eindeutig bestimmte Produkttopologie $\tau(V_i \times V'_j)$. Wir zeigen, daß $\tau_p = \tau_p$. Es gilt:

$$M = M_1 \times M_2 \text{ offen in } \tau_p$$

genau dann, wenn:

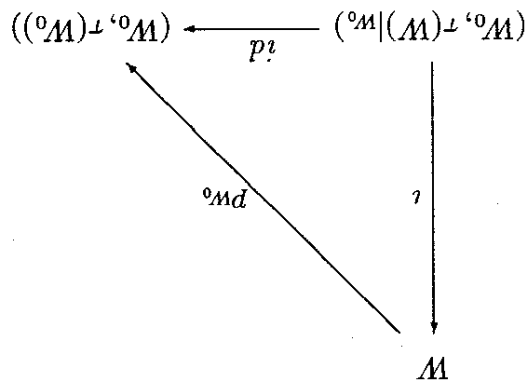
$$V(i, j) \in I \times J : M \cap (V_i \times V'_j) = (M_1 \cap V_i) \times (M_2 \cap V'_j) \text{ offen in } \tau(V_i \times V'_j).$$

Dies ist äquivalent mit:

$$V(i, j) \in I \times J : (M_1 \cap V_i) \text{ offen in } \tau(V_i) \text{ und } (M_2 \cap V'_j) \text{ offen in } \tau(V'_j).$$

Damit sind M_1 und M_2 offen in der Lineararttopologie. Genau dann aber ist

$$M_1 \times M_2 \text{ offen in } \tau_p.$$



$$\tau(W)|_{W_0} \geq \tau(W_0) \iff id : (W_0, \tau(W)|_{W_0}) \longrightarrow (W_0, \tau(W_0)) \text{ stetig.}$$

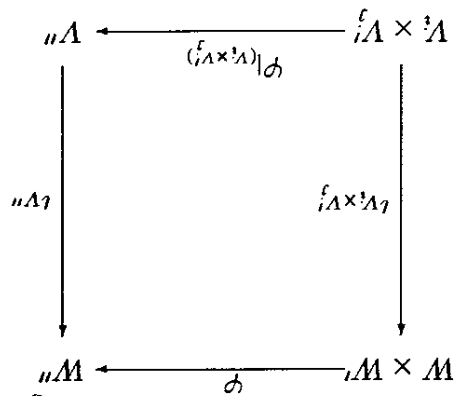
nach W_0 . Es gilt
zu einer Basis B von W . Sei pw_0 die zu dieser Basis gehörende Projektion von W
sind. Das heißt: $\tau(W)|_{W_0} \leq \tau(W_0)$. Sei nun B_{W_0} eine Basis von W_0 . Diese wird ergänzt
daß die Inklusionen der in W_0 enthaltenen, endlich dimensionalen Vektorräume stetig
Beweis: Trägt W_0 die Teilraumtopologie, folgt mit der universellen Eigenschaft,
 W_0 die Linearartopologie von W_0 .

Satz 3.4 W trage die Linearartopologie. Dann induziert W auf jedem Teilvektorraum
die Linearartopologie. Dann ist W ein topologischer Vektorraum.

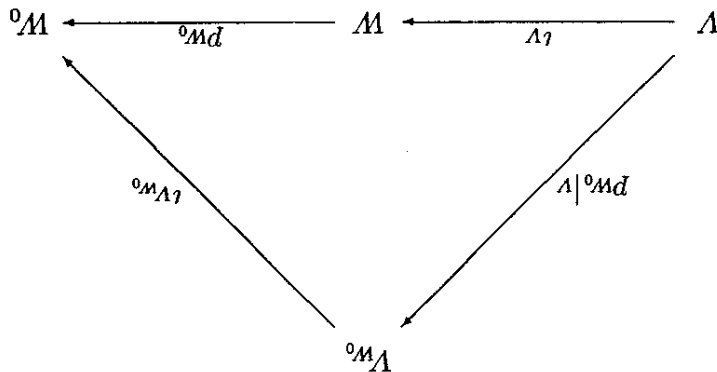
Korollar 3.3 Sei W ein Vektorraum über einem topologischen Körper K und trage

□

Wegen der universellen Eigenschaft ist φ genau dann stetig, wenn $V(i, j) \in I \times J$
 $\varphi \circ \iota(V_i \times V_j)$ stetig ist, wobei $\varphi \circ \iota(V_i \times V_j) = \iota_{V''} \circ \varphi|_{(V_i \times V_j)}$. $\iota_{V''}$ ist stetig nach Kon-
struktion, und $\varphi|_{(V_i \times V_j)}$ ist eine bilineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen
Vektorräumen in der Produkttopologie, also stetig nach 1.13. Damit ist φ stetig.



Zu zeigen bleibt, daß die Projektion stetig ist. Zu jedem V_i gibt es ein endliches Teilsystem von B , dessen Erzeugnis V_i enthält. Sei V_{w_0} der von B_{w_0} erzeugte Teilvektorraum von V .



Aus der universellen Eigenschaft der Topologie auf W folgt:

$$pw_0 \text{ stetig} \iff pw_0 \circ l_V = l_{V_{w_0}} \circ pw_0|_V \text{ stetig.}$$

$l_{V_{w_0}}$ ist stetig nach Konstruktion, $pw_0|_V$ ist eine lineare Abbildung und stetig in der Produkttopologie. Somit ist id stetig. $\square$

Die Teilraumtopologie eines Teilvektorraumes besitzt demnach die gleiche universelle Eigenschaft wie die Topologie von W .

Satz 3.5 (W, τ) ist hausdorffsch.

Beweis: Die Null ist abgeschlossen in $\tau(V_i)$ für alle $i \in I$. Aus 3.3 folgt, daß die Topologie von W durch eine Umgebungsbasis der Null eindeutig bestimmt ist. Das heißt: jeder Punkt in W ist abgeschlossen und W ist eine T_1 -Gruppe. Aus 1.4 folgt: W ist hausdorffsch. $\square$

Ist K ein kompletter, nichtdiskreter bewerteter Körper, folgt 3.1 direkt aus 3.3 und 3.5: Denn ist (W, τ) ein hausdorffscher topologischer Vektorraum, dann ist dies auch jeder Teilvektorraum. Also ist analog der Bemerkung am Ende von Abschnitt 1.3 die Teilraumtopologie der endlich dimensionalen Teilvektorräume von W die Produkttopologie.

3.2 Die Anwendung auf Funktionenkörper

Es sollen jetzt die bisher erhaltenen Ergebnisse auf den speziellen Fall, daß der K - Vektorraum W ein Funktionenkörper über topologischem Grundkörper K ist, übertragen werden.

Satz 3.6 Sei $F|K$ ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über einem topologischen Grundkörper K . Jeder endlich dimensionale Teilvektorraum V von F trage die Produkttopologie $\tau(V)$, und F trage die Lineararttopologie. Dann gilt:

- i) $\tau|_V = \tau(V)$ für jeden endlich dimensionalen Teilvektorraum V .
- ii) (F, τ) ist ein topologischer Ring.
- iii) (F, τ) ist hausdorffsch.

Offenbar hängt die Lineararttopologie nicht von der Erzeugung von F ab. Als Folgerung aus 3.2 notieren wir:

Korollar 3.7 K -Automorphismen von F sind topologische Abbildungen.

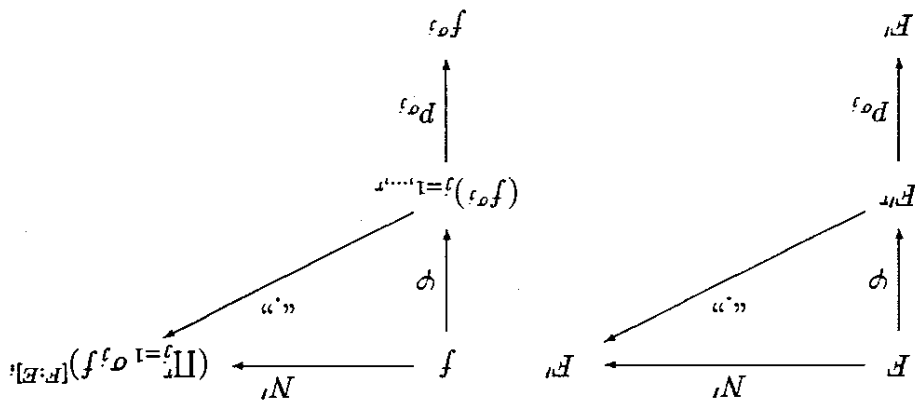
Aus 3.4 folgt, daß bei einer Erweiterung $F|E$ von Funktionenkörpern über dem gleichen Grundkörper, die von F auf E induzierte Teilraumtopologie die Lineararttopologie auf E ist. Erweiterungen von Funktionenkörpern sind in diesem Sinne topologische Erweiterungen.

Satz 3.8 Bei einer Erweiterung $F|E$ von Funktionenkörpern über dem gleichen Grundkörper ist die Norm von F nach E stetig.

Beweis: Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ die verschiedenen Einbettungen von F in die normale Hülle F' von $F|E$, und sei $[F : E]$ der Inseparabilitätsgrad von $F|E$. Wir schreiben $N(f)$ für die Norm einer Funktion $f \in F$. Dann ist

$$\forall f \in F : N(f) = \left(\prod_{j=1}^r \sigma_j f \right)_{[F:E]}.$$

Wir fassen die Normabbildung zunächst als Abbildung von F nach F' auf, und schreiben für diese N' . Man erhält das folgende kommutative Diagramm:



Es ist $f \notin \bigcup_{j=1}^r W_j$, und als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist auch $\bigcup_{j=1}^r W_j$ abgeschlossen. Es gibt somit eine Umgebung U von f , die $\bigcup_{j=1}^r W_j$ nicht schneidet.

Sei nun $h \in F$ mit $\text{div}(f)^\infty$ verschiedenem Poldivisor. Hat h den gleichen Grad wie f , gibt es mindestens einen Pol von f – etwa Q_{j_0} – an dem h einen größeren Wert als $v_{Q_{j_0}}(f)$ besitzt. Damit ist $h \in \bigcup_{j=1}^r W_j$. Also besitzen alle Funktionen aus U gleichen Grades wie f den gleichen Poldivisor wie f . $\square$

Die Beschränkung der Betrachtung auf Funktionen, deren Nullstellendivisoren den gleichen Grad besitzen, bedeutet für unsere Zwecke keine Einschränkung. Denn wie im Falle der Polynome interessiert man sich auch bei der Stetigkeit der Nullstellen in Funktionenkörpern nur für Funktionen mit gleicher "Anzahl" von Nullstellen – also für Funktionen gleichen Grades. Wir haben gezeigt: zu $f \in F$ gibt es eine Umgebung U von f , so daß alle Funktionen in U gleichen Grades wie f im endlich dimensionalen Vektorraum $\mathcal{L}(\text{div}(f)^\infty)$ liegen, auf dem nach 3.6 die induzierte Teilraumtopologie die Produkttopologie ist. Wählt man für $\mathcal{L}(\text{div}(f)^\infty)$ eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$, in der f die Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^n c_i v_i \quad (c_i \in K)$$

besitzt, dann gilt für alle Funktionen g gleichen Grades wie f , die in U liegen: g besitzt eine Darstellung der Form

$$g = \sum_{i=1}^n c'_i v_i \quad (c'_i \in K),$$

so daß für alle i gilt: $(c_i - c'_i)$ liegt "nahe bei 0" in der Topologie des Grundkörpers K .

Wie in Abschnitt 1.3 gelten auch hier alle Aussagen im Falle eines Grundkörpers, der lediglich mit einer nichttrivialen Ringtopologie versehen ist.

4 Rationale Funktionenkörper

Sei F ein rationaler Funktionenkörper über einem algebraisch abgeschlossenen, topologischen Grundkörper K . F trage die Lineartopologie. Wir fassen die Elemente von F als Funktionen von der zugehörigen Riemannschen Fläche $S(F)$ nach $K \cup \infty$ auf, und versehen $S(F)$ mit der grössten Topologie τ , so daß alle Funktionen aus F stetig sind.

Sei nun $F = K(x)$ eine Erzeugung von F . Jede Stelle $P \in S(F)$ ist dann durch den Wert xP eindeutig bestimmt, und zu jedem $\alpha \in K \cup \infty$ gehört genau eine Stelle $P := P_\alpha$ mit $xP = \alpha$. Mit anderen Worten ist für eine Erzeugende x von F die Abbildung

$$x : S(F) \rightarrow K \cup \infty, P \mapsto xP$$

bijektiv. Wir betrachten nun die grösste Topologie τ_x auf $S(F)$, so daß die Abbildung x stetig ist. x ist dann in τ_x sogar topologisch.

Nach Konstruktion ist τ_x feiner als τ . Sei nun P_∞ der Pol der Erzeugenden x und $T := S(F) \setminus P_\infty$.

Jede Funktion aus $F = K(x)$ ist rationale Funktion in der auf T stetigen Funktion x . Aus 1.5 folgt, daß alle Funktionen aus F – aufgefaßt als Funktionen von T – in $\tau_x|_T$ stetig sind. τ_x und τ stimmen daher auf dem Teilraum T überein, und K ist zu T bezüglich τ homöomorph.

Die "Nullstellen" eines Polynoms in x in T entsprechen somit eindeutig und homöomorph den "Nullstellen" des Polynoms in K .

Jede rationale Funktion $f \in F$ besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung in Hauptteile. Sei

$$(3) \quad f = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x^i + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{(x - \alpha_j)^k}{b_{jk}}$$

wobei alle Koeffizienten aus K sind und $a_n \neq 0$ (vgl. unten), $b_{jm_j} \neq 0 \forall j$.

Die in (3) auftretenden Hauptteile entsprechen den Polen von f , das heisst: $fP_{\alpha_j} = \infty \ (\forall j)$; $\sum_{i=1}^n a_i x^i$ ist der – eventuell auftretende – Hauptteil zur Stelle $P_\infty, a_0 \in K$.

Es ist

$$n = \max(-v_{P_\infty}(f), 0) \text{ und } m_j = -v_{P_{\alpha_j}}(f).$$

$$\text{Es folgt } \text{grad}_F \text{div}_F(f)^\infty = \sum_{j=1}^r m_j + n. \text{ Aus (3) folgt:}$$

$$(1, x^i, \frac{1}{(x - \alpha_j)^k}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m_j)$$

ist eine Basis von $\mathcal{L}(\text{div}(f)^\infty)$. Eine Umgebung U von f in der Produkttopologie von $\mathcal{L}(\text{div}(f)^\infty)$, in der Funktionen aus U den gleichen Poldivisor wie f besitzen, läßt sich in Darstellung (3) sofort angeben.

Für $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $\deg(q) = m > n$, sind die Koordinaten von f bezüglich dieser Basis $(a_0, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$. Das heißt, in jeder Umgebung von f in der Produkttopologie

$$\left(\frac{1}{x^{\deg(q)}}, \dots, \frac{q}{x^{\deg(q)}} \right) \text{ eine Basis von } \mathcal{L}(\operatorname{div}(f)_\infty).$$

Situation ist

der Erzeugung ab. Gleiches gilt für die Topologien von $S(F)$ und F . In obiger Nullstelle bei ∞ . Wie gesehen hängen weder $\mathcal{L}(\operatorname{div}(f)_\infty)$ noch seine Topologie von $\deg(q)$, also $v_{p_\infty}(f) > 0$ gilt. Durch bloße Umparametrisierung besitzt nun f eine

Satz 4.1 Sei F ein rationaler Funktionenkörper über einem algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Grundkörper K . Sei $f \in F$ gegeben mit verschiedenen Nullstellen $P_1, \dots, P_d \in S(F)$. Dann gibt es zu beliebigem, paarweise disjunkten, offenen Umgebungen U_i der P_i ($i = 1, \dots, d$) eine Umgebung W von f , so daß $\forall g \in W$ gelten Grad g wie f gilt: g hat genau $v_{P_i}(f)$ Nullstellen in U_i .

Sei nun f nichtkonstant. Wir wählen nun die Erzeugende x so, daß $\deg(p) < \deg(q)$, also $v_{p_\infty}(f) > 0$ gilt. Durch bloße Umparametrisierung besitzt nun f eine Nullstelle bei ∞ . Wie gesehen hängen weder $\mathcal{L}(\operatorname{div}(f)_\infty)$ noch seine Topologie von $\deg(q)$, also $v_{p_\infty}(f) > 0$ gilt. Durch bloße Umparametrisierung besitzt nun f eine

einige Basis mit der Eigenschaft, daß die Koordinaten von f gerade die Koeffizienten von p sind. Wegen $(p, q) = 1$ und K hausdorffsch, lassen sich vorgegebene Umgebungen der Nullstellen von f beziehungsweise p so verkleinern, daß sie keine Pole von f enthalten. Da die Stetigkeit der Nullstellen für p gilt, gilt sie auch für f .

Wie bei Polynomen sagen wir, eine Funktion habe "genau" t Nullstellen, wenn die Summe der Vielfachheiten ihrer Nullstellen gleich t ist. Wir haben damit gezeigt: f hat dann keine "Nullstelle bei ∞ ", und die Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählerpolynoms p . Ist $\deg(p) = n$, besitzt $\mathcal{L}(\operatorname{div}(f)_\infty)$ in

$$\left(\frac{1}{x^n}, \frac{q(x)}{x}, \dots, \frac{q(x)}{x^n} \right)$$

mit anderen Worten $v_{p_\infty}(f) \leq 0$ gilt. Sei nun $f = \frac{p}{q}$ gemäß (4), und die Erzeugende von F so gewählt, daß $\deg(p) \geq \deg(q)$, f hat dann keine "Nullstelle bei ∞ ", und die Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählerpolynoms p . Ist $\deg(p) = n$, besitzt $\mathcal{L}(\operatorname{div}(f)_\infty)$ in

$$\operatorname{grad}_p \operatorname{div}_F(f)_\infty = \max(\deg(p), \deg(q)).$$

Hier ist

$$(4) \quad f = \frac{p}{q}; p, q \in K[X], (p, q) = 1 \text{ und } q \text{ normiert.}$$

ebenfalls eindeutigen – Darstellung

Bringt man die Summanden aus (3) auf den Hauptnenner, gelangt man zur – Funktionen mit höchstens einem Pol übertragen.

Ist die Topologie des Körpers vom Typ V , lassen sich Formulierung und Beweis des Satzes über die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen direkt auf rationale Funktionenkörper auftragen. Es folgt:

Aus 3.11 folgt, daß sich eine Umgebung des Polynoms f in der Produkttopologie des Vektorraums der Polynome vom Grade höchstens n , zusammen mit der Grad- n -Umgebung von f in der Lineararttopologie des zugehörigen rationalen

gibt es Funktionen, deren Zählerpolynome den Grad m , also keine Nullstelle bei ∞ mehr besitzen. Wir halten fest:

Korollar 4.2 Sei K ein bewerteter, algebraisch abgeschlossener Körper, $f \in K[X]$ vom Grad n mit verschiedenen Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ und zugehörigen Vielfachheiten $t_1, \dots, t_d$. Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein.

Dann gibt es zu offenen, paarweise disjunkten Umgebungen U_i^ϵ der α_i -ein $\delta > 0$, so daß $\forall g \in K[X]$ vom Grad $m > n$ gilt:

Ist $|f-g| < \delta$, dann hat g genau t_i Nullstellen in U_i^ϵ und genau $(m-n)$ Nullstellen, deren Bewertung $> \frac{\epsilon}{2}$ ist.

$|f-g|$ bezeichnet dabei wieder die Gaußnorm.

5 Die Topologie der Riemannschen Fläche

5.1 Definition und einige Eigenschaften

Die folgende Definition, Satz 5.1 und weitere Eigenschaften der Riemannschen Fläche als topologischer Raum finden sich z.B. bei Lang [15] oder Chevalley [3]. Von den in der Literatur üblichen Voraussetzungen an den Grundkörper (K lokal kompakt oder $K = \mathbb{C}$) wollen wir uns hier lösen, um eine allgemeinere Situation zu betrachten:

Sei $F|K$ ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über algebraisch abgeschlossenen, topologischen Grundkörper K und $S(F|K) = S(F)$ die zugehörige Riemannsche Fläche. Wir versehen $S(F)$ mit der größten Topologie τ_F , so daß alle Funktionen aus F stetig sind.

Die Basismengen M von τ_F haben dann die Form

$$M = \bigcup_{j=1}^m f_j(U_j); f_j \in F, U_j \subseteq K \cup \infty \text{ offen } \forall j. \quad (5)$$

Satz 5.1 $(S(F), \tau_F)$ ist hausdorffsch.

Beweis: Seien P und Q zwei verschiedene Stellen in $S(F)$. Dann gibt es ein $f \in F$, so daß $fP \neq fQ$. Da $K \cup \infty$ hausdorffsch ist, gibt es disjunkte Umgebungen U_1 von fP und U_2 von fQ . Wegen der Stetigkeit von f besitzen ihre Urbilder unter f die erforderlichen Trennungseigenschaften.

Sei nun T eine co – endliche Teilmenge von $S(F)$. Dann ist T wegen 5.1 offen in $S(F)$ bezüglich τ_F . Sei $\mathcal{O}_T = \bigcap^{P \in T} \mathcal{O}_P$ der zu T gehörende Holomorphiering, $\tau_{\mathcal{O}_T}$ die größte Topologie auf $S(F)$ und $\tau_{\mathcal{O}_T}(T)$ die größte Topologie auf T , so daß alle Funktionen aus $\mathcal{O}_T$ – aufgefasst als Abbildungen nach $K \cup \infty$ beziehungsweise K – stetig sind.

Satz 5.2 Sei $\tau_F|_T$ die von τ_F induzierte Teilraumtopologie auf T . Dann ist $\tau_F|_T$ die größte Topologie auf T , so daß alle Funktionen aus $\mathcal{O}_T$ stetig sind.

Beweis: Zu beweisen ist $\tau_F|_T = \tau_{\mathcal{O}_T}(T)$. Wir zeigen: (1) $\tau_F|_T = \tau_{\mathcal{O}_T}|_T$ und (2) Wegen $\mathcal{O}_T \subset F$ ist $\tau_F \geq \tau_{\mathcal{O}_T}$. Deshalb gilt auch für die zugehörigen Teilraumtopologien $\tau_F|_T \geq \tau_{\mathcal{O}_T}|_T$. Für $P \in T$ folgt aus dem Approximationssatz

$$\mathcal{O}_P = \left\{ \frac{h}{g} \mid g, h \in \mathcal{O}_T; hP \neq 0 \right\}.$$

Für $f \in \mathcal{O}_P$ folgt die Stetigkeit in P bezüglich $\tau_{\mathcal{O}_T}|_T$ aus 1.5. Für $f \notin \mathcal{O}_P$ ist $f^{-1} \in \mathcal{M}_P$, die Stetigkeit von f in P bezüglich $\tau_{\mathcal{O}_T}|_T$ folgt aus der Stetigkeit der Inverseabbildung. Somit gilt $\forall f \in F : f|_T$ ist stetig in $\tau_{\mathcal{O}_T}|_T$. Es folgt, daß $\tau_F|_T \leq \tau_{\mathcal{O}_T}|_T$, und (1) ist gezeigt.

Sei nun $P_0 \in S(F)$ und x eine Ortsuniformisierende von P_0 . Gemäß dem lokalen Uniformisierungssatz sei $K(x, y)$ eine Erzeugung von F , so daß $y \in \mathcal{O}_{P_0}$ und der zu P_0 gehörende Kurvenpunkt $(0, yP_0)$ einfach ist. Sei Γ die Menge aller einfachen

einfach ist.

Sei umgekehrt $x \in F$ eine Ortsuniformisierende einer Stelle $P \in S(F)$. Dann existiert ein $y \in \mathcal{O}_P$, so daß $F = K(x, y)$ und der zugehörige Punkt auf der Kurve dann eine Ortsuniformisierende von P .

Satz 5.3 Sei $F = K(x, y)$ und $f(x, y)$ wie oben. Dann gibt es zu jedem einfachen Punkt (a, b) eine eindeutig bestimmte Stelle P mit $xP = a$ und $yP = b$. $x - a$ ist

S.31] für algebraisch abgeschlossene Grundkörper:

Wir zitieren den lokalen Uniformisierungssatz in der Formulierung Langs [15; Jedes $t \in F$ mit $v_P(t) = 1$ heißt Ortsuniformisierende von P .

Für $P \in S(F)$ bezeichnet v_P die zu P gehörende, normierte Bewertung von F . nichteinfache, sogenannte singuläre Punkte.

$\frac{df}{dy}(x, y)$. Ein Kurvenpunkt (a, b) heißt einfach, wenn $f'(a, b) \neq 0$. Da das Element mindestens eine, höchstens aber endlich viele Stellen. Wir schreiben $f'(x, y)$ statt zeugenden auf einen Kurvenpunkt ab. Umgekehrt gehört zu jedem Kurvenpunkt Alle Stellen aus $S(F)$, an denen weder x noch y einen Pol haben, bilden die Er-

$$\Gamma := \{(a, b) \in K \times K \mid f(a, b) = 0\}.$$

betrachten die zu dieser Erzeugung gehörende Kurve $F = K(x, y)$ und $f(x, y)$ die definierende Gleichung für x und y über K . Wir einem vollkommenen Grundkörper schon durch zwei Elemente erzeugen. Sei nun Als Folge des Satzes vom primitiven Element läßt sich jeder Funktionenkörper über

5.2 Die Riemannsche Fläche als K – Mannigfaltigkeit

denn die Pole von Funktionen aus $\mathcal{O}_T$ liegen alle in $S(F) \setminus T$. Es folgt die Offenheit von M in $\tau_{\mathcal{O}_T}(T)$. $\square$

$$M = \bigcup_{j=1}^m f_j^{-1}(U_j) \cap T = \bigcup_{j=1}^m f_j^{-1}(U_j \cap K),$$

Dann ist

$$M' = \bigcup_{j=1}^m f_j^{-1}(U_j); f_j \in \mathcal{O}_T, U_j \subseteq K \cup \infty \text{ offen } \forall j.$$

Zu (2): Wegen der Stetigkeit der Funktionen aus $\mathcal{O}_T$ in $\tau_{\mathcal{O}_T}|_T$ ist $\tau_{\mathcal{O}_T}|_T \geq \tau_{\mathcal{O}_T}(T)$. Eine Basismenge M der Teilraumtopologie $\tau_{\mathcal{O}_T}|_T$ ist der Schnitt einer Basismenge M' in $\tau_{\mathcal{O}_T}$ mit T . M' besitzt analog zu (5) eine Darstellung der Form

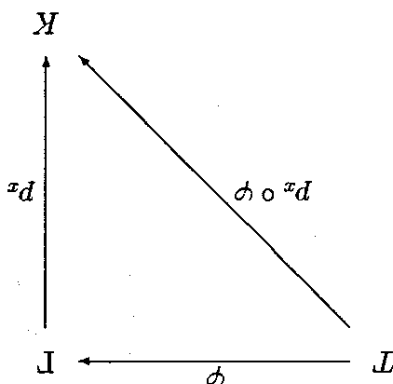
Kurvenpunkte und T die Menge derjenigen Stellen $P \in S(F)$, welche weder Pole von x oder y noch Nullstelle von $f'(x, y)$ sind. T ist co – endlich in $S(F)$ und somit offen, außerdem ist $P_0 \in T$.

$$\forall P \in T \text{ sei } \varphi(P) := (x_P, y_P).$$

Nach Definition eines einfachen Punktes gilt $\varphi(T) = T$. Aus dem lokalen-Uniformisierungsatz folgt, daß φ als Abbildung von T nach T bijektiv ist.

Satz 5.4 T trage die von der Produkttopologie des $K \times K$ induzierte Teilraumtopologie. Dann ist φ ein Homöomorphismus.

Beweis: Bezeichnet man mit p_x die Projektion der Kurve auf die erste Koordinate, ist das folgende Diagramm kommutativ:



$\forall P \in T$ gilt: $p_x \circ \varphi(P) = x_P$. Das Entsprechende gilt dann für die Projektion p_y auf die zweite Koordinate. Da sich die universelle Eigenschaft der Produkttopologie des $K \times K$ auf die Teilraumtopologie der Kurve überträgt, ist φ genau dann stetig, wenn es x und y sind. Dies gilt nach Konstruktion der Topologie auf T . Nach Satz 5.2 trägt T die größte Topologie in der alle Funktionen aus $\mathcal{O}_T$ stetig sind. Da nach Voraussetzung x und y an den Stellen aus T keine Pole besitzen, gilt $x, y \in \mathcal{O}_T$. Die Topologie auf T ist somit feiner als die größte Topologie auf T in der x und y stetig sind. Weil P_0 ein einfacher Punkt ist, ist der zu P_0 gehörende lokale Ring gleich dem Bewertungsring der Stelle P_0 in F . Wegen $\mathcal{O}_T \subseteq \mathcal{O}_{P_0}$ ist jedes Element aus $\mathcal{O}_T$ rationale Funktion in x und y . Als Funktion in einem topologischen Körper ist damit jede Funktion aus $\mathcal{O}_T$ stetig, falls die Funktionen x und y stetig sind. Die Topologie auf T ist also die größte Topologie, in der x und y stetig sind. Wir betrachten das zu φ^{-1} und x gehörende universelle Diagramm:

Denn zu einer gegebenen offenen Umgebung $(U' \times V') \cap \Gamma$ eines Punktes $p_x^{-1}(a')$ aus $p_x^{-1}(U)$ gibt es eine Umgebung $U'' \subseteq U'$ von a' in K , so daß $\forall t \in U''$ gilt: $f(t, Y)$

$$p_x^{-1}: U \xrightarrow{p_x^{-1}} (U \times V) \cap \Gamma, a' \mapsto (a', b).$$

Polynomen liefert nun auch die Stetigkeit der auf U definierten Umkehrabbildung ist nach Konstruktion der Topologie auf Γ stetig. Die Stetigkeit der Nullstellen von p_x einfach. Hieraus folgt die Injektivität von p_x auf den Kurvenpunkten aus $U \times V$. $\forall t \in U$ gilt: das Polynom $f(t, Y)$ besitzt genau eine Nullstelle in V , und diese ist die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen eine Umgebung U von a in K , so daß b in V liegt, hinreichend kleinen Umgebung V von b in K existiert nach dem Satz über die Koeffizienten von $f(a, Y)$ hängen stetig von a ab. Zu einer gegebenen $(a, b) \in \Gamma$ gilt definitionsgemäß, daß b eine einfache Nullstelle des Polynoms $S(F)$ genau dann lokal topologisch, wenn es p_x ist. Dies wird im folgenden gezeigt. Da φ topologisch und T eine offene Teilmenge von $S(F)$ ist, ist x als Abbildung von T nach K stetig. Wie im Beweis von 5.4 gesehen, gilt für alle Stellen $P \in T$, daß $p_x(\varphi(P)) = xP$.

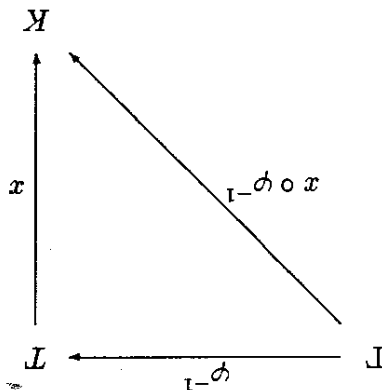
$(0, yP_0)$ einfach ist.

Beweis: Wie oben sei $F = K(x, y)$ so erzeugt, daß $y \in \mathcal{O}_{P_0}$ und der Kurvenpunkt

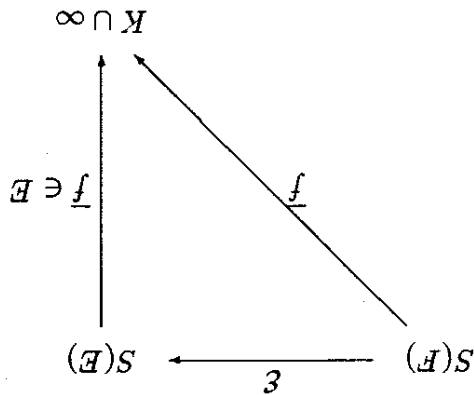
P_0 in $S(F)$ auf eine Umgebung der Null in K . Dann liefert die Abbildung $P \mapsto xP$ einen Homöomorphismus einer Umgebung von P_0 in $S(F)$ auf eine Umgebung der Null in K . **Satz 5.5** Sei $P_0 \in S(F)$ und $x \in F$ eine Ortsuniformisierende von P_0 . K trage eine Topologie, in der der Satz über die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen gilt.

von φ^{-1} aus der Stetigkeit der Projektionen in der Produkttopologie des $K \times K$. $\square$ $\forall (a, b) \in \Gamma$ ist $x \circ \varphi^{-1}((a, b)) = a$ und $y \circ \varphi^{-1}((a, b)) = b$. Somit folgt die Stetigkeit von φ^{-1} aus der Stetigkeit der Projektionen in der Produkttopologie des $K \times K$. $\square$

Ein entsprechendes Diagramm gilt dann auch für y . Mit dem über die Topologie auf T gesagten folgt, daß φ^{-1} genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $x \circ \varphi^{-1}$ und



□



Satz 5.6 Im Falle eines topologischen Grundkörpers ist $\mathcal{E}$ stetig und surjektiv. **Beweis:** Die Abbildung ist surjektiv, denn jede Stelle aus $S(E)$ besitzt mindestens eine Fortsetzung in $S(F)$. Die Stetigkeit der Abbildung folgt aus der universellen Eigenschaft der Topologie auf $S(E)$:

Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}_{FE} := \mathcal{E}$ die Abbildung, die jeder Stelle aus $S(F)$ ihre Einschränkung auf E zuordnet. Im weiteren sei $F|E$ eine Erweiterung von Funktionenkörpern über dem gleichen

5.3 Riemannsche Flächen von Körpererweiterungen

Zusammen mit 5.1 folgt aus 5.5, daß – unter der genannten Voraussetzung an die Topologie des Grundkörpers – die Riemannsche Fläche eines Funktionenkörpers $F|K$ eine K – Mannigfaltigkeit im obigen Sinne, also lokal homöomorph zum Grundkörper ist. Dieser Satz ist für den Fall $K = \mathbb{C}$ aus der klassischen Funktionentheorie geläufig; er motiviert die aus der Funktionentheorie stammenden Bezeichnungen Ortsuniformisierende und Riemannsche Fläche auch in der von uns betrachteten, allgemeineren Situation. Dabei resultiert die Bezeichnung Fläche für eine über dem Grundkörper ein – dimensionale Mannigfaltigkeit aus der im klassischen Fall geometrisch motivierten Sichtweise von $\mathbb{C}$ als Ebene über den reellen Zahlen.

In Anlehnung an die Definition bei Forster [6; S.2] verstehen wir unter einer K – Mannigfaltigkeit einen Hausdorffraum X mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt in X eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von K homöomorph ist. und damit ist p_x^{-1} stetig.

□

besitzt genau eine Nullstelle in V' , und diese ist einfach. Somit gilt, daß

$$p_x^{-1}(U'') \subseteq (U' \times V) \cap \Gamma,$$

$$x_E : x_E^{-1}(V) \longrightarrow V, \quad x_F : x_F^{-1}(V) \longrightarrow V$$

Abbildungen

Nach Satz 5.3 gibt es eine offene Umgebung V der Null, so daß die von x induzierten statt x , wenn x als Abbildung von $S(E)$ nach $K \cup \infty$ aufgefasst werden soll. jede Ortsuniformisierende von $x \in E$ für Q_0 auch eine für P_0 . Wir schreiben $x_E [x_F]$

Beweis: Sei $P_0 \in S(F)$ unverzweigt über E und $Q_0 = \mathcal{E}(P_0) \in S(E)$. Dann ist

$$\mathcal{E} : S(F) \longrightarrow S(E)$$

ist außerhalb der Verzweigungspunkte lokal homöomorph.

Satz 5.8 Die Abbildung

der von $\mathcal{E}$ auf $S(F)$ induzierten Äquivalenzrelation.

bezüglich $\mathcal{E}$. Mit anderen Worten ist $S(E)$ der Quotientenraum von $S(F)$ bezüglich

Da $\mathcal{E}$ stetig, surjektiv und offen ist, trägt $S(E)$ die Identifizierungstopologie

Damit ist $\mathcal{E}$ eine offene Abbildung.

□

$$U \subseteq \mathcal{E}(W).$$

$S(E)$ gibt, so daß

hinreichend kleine Umgebung W von P_0 in $S(F)$ eine Umgebung U von $\mathcal{E}(P_0)$ in Homöomorphie von x in P_0 folgt $P \in W$. Wir haben somit gezeigt, daß es für jede $Q \in U$ mindestens eine Fortsetzung P in $S(F)$ mit $xP \in x(W)$. Aus der lokalen das Polynom $f_Q(X)$ mindestens eine Nullstelle in $x(W)$ besitzt. Damit hat jedes Umgebung W von P_0 in $S(F)$ eine Umgebung U von Q_0 in $S(E)$, so daß für alle $Q \in U$ Homöomorphie der Ortsuniformisierenden x in P_0 zu einer hinreichend kleinen Umgebung U der Nullstellen von Polynomen liefert nun mittels der lokalen bezüglich Q .

sind alle b_i für alle Stellen Q in einer hinreichend kleinen Umgebung von Q_0 ganz Die Koeffizienten der Polynome $f_Q(X)$ hängen deshalb stetig von Q ab. Insbesondere Die Koeffizienten b_i von $f(X)$ sind als Funktionen von $S(E)$ nach $K \cup \infty$ stetig. α von $f_Q(X)$ mindestens eine Stelle $P \in S(F)$, die Q fortsetzt mit $xP = \alpha$.

Nullstelle von $f_Q(X)$, und wegen $F = E(x)$ gehört auch umgekehrt zu jeder Nullstelle Es ist also $f_Q(xP_0) = f_{Q_0}(0) = 0$. Für jede Fortsetzung $P \in S(F)$ von Q ist xP eine

$$f_Q(X) := X^n + b_{n-1}(Q)X^{n-1} + \dots + b_0(Q).$$

Für $Q \in S(E)$ mit $b_i Q \neq \infty$ für $i = 1, \dots, n$ definieren wir

das Minimalpolynom von x über E .

$$f(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathcal{O}_{Q_0}[X]$$

Bewertungsring jeder Fortsetzung von Q_0 nach $S(F)$ liegt. Sei

welches Ortsuniformisierende von P_0 und Q_0 – ganz ist. Das bedeutet, daß x im Element der (ohne Einschränkung der Allgemeinheit separablen) Erweiterung $F|E$, **Beweis:** Sei $P_0 \in S(F)$ gegeben und $\mathcal{E}(P_0) := Q_0$. Sei ferner x ein primitives

folgt die Abgeschlossenheit von f .

□

$$f^{-1}(f(A)) = f(\cup_{\sigma \in G} \sigma A) = \cup_{\sigma \in G} \sigma A$$

Aus

X/G ist in der Quotiententopologie genau dann abgeschlossen, wenn $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X ist. Deshalb ist f genau dann abgeschlossen, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ die Menge $f^{-1}(f(A))$ abgeschlossen ist. Mit $x \mapsto \sigma x$ ist auch $x \mapsto \sigma^{-1}x$ stetig. Da G endlich ist, ist mit A auch $\cup_{\sigma \in G} \sigma A$ abgeschlossen in X .

Lemma 5.10 Sei G eine auf dem topologischen Raum X stetig operierende, endliche Gruppe und X/G der zugehörige Quotientenraum. Dann ist die natürliche Abbildung $f : X \rightarrow X/G$ abgeschlossen.

G operiert somit stetig auf $S(F)$.

ein Homöomorphismus.

$$\sigma : S(F) \rightarrow S(F), P \mapsto \sigma P$$

Satz 5.9 Sei $\sigma \in \text{Aut}(F|K)$. Dann ist die Abbildung

G induziert damit auf $S(F)$ die gleiche Äquivalenzrelation wie $\mathcal{E}_{F|F^G}$. Eine direkte Folge der universellen Eigenschaft der Topologie der Riemannschen Fläche ist:

Ist G eine endliche Untergruppe von $\text{Aut}(F|K)$, stimmen die unter G konjugierten Stellen auf dem zu G gehörenden Fixkörper F^G überein. Unter G konjugierte Stellen sind also Fortsetzungen der gleichen Stelle aus $S(F^G)$. Bekanntlich erhält man sogar alle Fortsetzungen einer Stelle $Q \in S(F^G)$, indem man zu einer Fortsetzung von Q alle unter G konjugierten Stellen hinzunimmt.

$$\forall f \in F : f(\sigma P) := f^\sigma(P).$$

Die Automorphismen eines Funktionenkörpers $F|K$ operieren durch Konjugation auf der zugehörigen Riemannschen Fläche. Dabei ist für $\sigma \in \text{Aut}(F|K)$ die zu $P \in S(F)$ konjugierte Stelle σP definiert durch:

□

und $\mathcal{E}$ ist lokal topologisch in P_0 .

$$\forall P \in x_P^{-1}(V) : x_E^{-1}(x_F(P)) = \mathcal{E}(P),$$

Hieraus folgt

$$x_F(P) = x_P = x_Q = x_E(Q).$$

homöomorph. Sei nun $P \in x_P^{-1}(V)$ und $\mathcal{E}(P) = Q$. Wegen $x \in E$ gilt:

$$x_E^{-1} \circ x_F : x_P^{-1}(V) \rightarrow x_E^{-1}(V)$$

homöomorph sind. Somit ist auch

Sei U eine beliebige Umgebung von P , dann gibt es in jeder Umgebung $V \subseteq \mathcal{E}_{F|P}^{-1}(U)$ von P' verschiedene Stellen Q_1, Q_2 , so daß $\sigma Q_1 = Q_2$. Die Einschränkungen von Q_1 und Q_2 auf F liegen in U und sind verschieden, stimmen aber auf E überein. $\mathcal{E}$ ist somit auf keiner Umgebung von P injektiv. Daß Verzweigungspunkte einer

gilt. Sei nun $\sigma \in G \setminus G'$, so daß für die oben gewählte Fortsetzung P' von P $\sigma P' = P'$ gilt. P ist im algebraischen Sinn unverzweigt über $S(E) \Rightarrow G_T(P') = G'_T(P')$.

die Trägheitsgruppen von P' in G' beziehungsweise in G . Dann gilt:

$$G'_T(P') := \{\sigma \in G' | \sigma P' = P'\} \leq G_T(P') := \{\sigma \in G | \sigma P' = P'\}$$

Die über $S(E)$ im algebraischen Sinne unverzweigten Stellen P' aus $S(F')$ sind durch $\sigma P' \neq P' \forall \sigma \in G \setminus \{id\}$ charakterisiert. Sei P' eine Fortsetzung einer Stelle $P \in S(F)$ nach $S(F')$. Wir bezeichnen mit

$$G' := \text{Gal}(F'|F) \leq G := \text{Gal}(F|E).$$

Beweis: Sei wieder F' eine galoissche Erweiterung von $F|E$ mit

$S(F)$ im Sinne der Theorie der algebraischen Funktionenkörper. *Satz 5.13* Bei einer Erweiterung $F|E$ von Funktionenkörpern entsprechen die Verzweigungspunkte der Überlagerung $(S(F), \mathcal{E})$ von $S(E)$ den Verzweigungspunkten aus

Überlagerung. Ein Punkt $y \in Y$ heißt Verzweigungspunkt der Überlagerung p , wenn p in keiner Umgebung von y injektiv ist. Besitzt p Verzweigungspunkte, heißt p auch verzweigte Überlagerung.

Korollar 5.12 Sei $F|E$ eine Erweiterung von Funktionenkörpern über dem gleichen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper K . Dann ist $(S(F), \mathcal{E})$ eine Überlagerung von $S(E)$.

Wir bezeichnen nach Forster [6; S.18] eine Abbildung $p: Y \rightarrow X$ zwischen zwei topologischen Räumen als Überlagerung, falls sie stetig, offen und diskret ist. Dabei heißt eine Abbildung p diskret, wenn das Urbild $p^{-1}(x)$ jedes Punktes $x \in X$ eine diskrete Teilmenge von Y ist. Wir haben damit gezeigt:

eine abgeschlossene Abbildung.

$$\mathcal{E}: S(F) \rightarrow S(E)$$

kung

Korollar 5.11 Bei Erweiterungen $F|E$ von Funktionenkörpern ist die Einschränkung

Abgeschlossenheit von $\mathcal{E}_{FE}$ aus der Stetigkeit von $\mathcal{E}_{F'F}$. Wir notieren:

Für eine galoissche Erweiterung F' von $F|E$ folgt wegen $\mathcal{E}_{F'E} = \mathcal{E}_{FE} \circ \mathcal{E}_{F'F}$ die

Überlagerung Verzweigungspunkte im Sinne der Theorie der algebraischen Funktionenkörper sind, folgt direkt aus 5.8. $\square$

Nach [6; S.22] heißt eine Überlagerung $p: Y \rightarrow X$ *unbegrenzt*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so daß sich das Urbild $p^{-1}(U)$ darstellen läßt als

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

wobei die $V_j, j \in J$, paarweise disjunkte, offene Teilmengen von Y , und alle Abbildungen $p|_{V_j} \rightarrow U$ Homöomorphismen sind. Es folgt direkt aus 5.8 und 5.3, daß die unverzweigten Stellen bei einer Überlagerung von Riemannschen Flächen durch diese Eigenschaft charakterisiert sind. Wir bezeichnen im folgenden mit $P^{(1)}, \dots, P^{(r)}$ die verschiedenen Fortsetzungen einer Stelle $Q \in S(E)$ in $S(F)$. Dann gilt:

Lemma 5.14 Zu vorgegebenen Umgebungen $U^{(i)} \subseteq S(F)$ der $P^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) gibt es eine Umgebung $V \subseteq S(E)$ von Q derart, daß $\mathcal{E}^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^r U^{(i)}$.

Beweis: Für die über E unverzweigten Stellen aus $S(F)$ ist dies eine Folge aus 5.8. Sei nun $Q \in S(E)$ eine Stelle, die in F und damit auch in der galoisschen Hülle F' von $F|E$ verzweigt. Sei G die Galoisgruppe von $F'|E$ und $G^T(P')$ die Trägheitsgruppe einer Fortsetzung $P' \in S(F')$ in G . Sei $\tau_1 = id, \dots, \tau_s$ ein Repräsentantensystem von $G/G^T(P')$. Dann sind $P', \dots, \tau_s P'$ alle (verschiedenen) Fortsetzungen von Q und von $P^{(1)}, \dots, P^{(r)}$ in $S(F')$. Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{E}_{F'|F}$ sind die Urbilder unter $\mathcal{E}_{F'|F}$ der gegebenen Umgebungen $U^{(1)}, \dots, U^{(r)}$ Umgebungen der Fortsetzungen $P', \dots, \tau_s P'$ in $S(F')$. Die Automorphismen sind topologische Abbildungen von $S(F')$. Die Umgebungen in $\mathcal{E}_{F'|F}^{-1}(U^{(i)})$ der Fortsetzungen lassen sich daher derart zu Umgebungen $U, \tau_2 U, \dots, \tau_s U$ verkleinern, daß diese paarweise disjunkt und zueinander konjugiert sind. Nun bildet man

$$V := \bigcup_{\tau \in G^T(P')} \tau U.$$

$\forall \sigma \in G$ ist σV eine Umgebung von $\sigma P'$ und es gilt $\forall \sigma \in G^T(P') : \sigma V = V$. Da Trägheitsgruppen konjugierter Stellen konjugiert sind, folgt

$$\forall \sigma \in G \forall \tau \in G^T(\sigma P') : \tau(\sigma V) = \sigma V.$$

Sei nun

$$\forall \sigma \in G : \mathcal{E}_{F'E}(V) = \mathcal{E}_{F'E}(\sigma V) := \bar{V}.$$

$\bar{V}$ ist damit nach 5.7 eine offene Umgebung von Q mit der Eigenschaft

$$\mathcal{E}_{F'E}^{-1}(\bar{V}) = \bigcup_{\sigma \in G} \sigma V.$$

Unter einer *Deckbewegung* einer Überlagerung $p: Y \rightarrow X$ versteht man einen spurenen Homöomorphismus $f: Y \rightarrow Y$. Bei galoisschen Erweiterungen ist somit die Galoisgruppe eine Untergruppe der Gruppe der Deckbewegungen der Überlagerungen der zugehörigen Riemannschen Flächen. In [6; S.53] wird gezeigt, daß im Falle $K = \mathbb{C}$ die beiden Gruppen isomorph sind.

Induzierten Homöomorphismen.
oder, im Falle einer galoisschen Erweiterung $F|E$, die von der Galoisgruppe auf $S(F)$ $F'|F|E$ von Funktionenkörpern die Abbildungen $\mathcal{E}_{F'|F}$, denn es ist $\mathcal{E}_{F'|E} = \mathcal{E} \circ \mathcal{E}_{F'|F}$ ebenfalls über x liegt. Beispiele für spurene Abbildungen liefern bei Erweiterungen $y \in Y$, der über einem Punkt $x \in X$ liegt, auf einen Punkt $z \in Z$ abgebildet wird, der Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ spuren, wenn $p = q \circ f$. Dies bedeutet, daß ein Punkt $Sind p: Y \rightarrow X$ und $q: Z \rightarrow X$ zwei Überlagerungen von X , nennt man eine Falle eines bewerteten Grundkörpers zutreffen.

Es sei nochmals daran erinnert, daß die Aussagen dieses Abschnitts insbesondere im

In den unverzweigten Stellen ist sie außerdem unverzweigt und unbegrenzt.
tionentheorie – verzweigte, $[F: E]$ - blättrige Überlagerung von $S(E)$.
über die Stetigkeit der Nullstellen gilt, dann ist $(S(F), \mathcal{E})$ eine – im Sinne der Punk-
gebrauch abgeschlossenen Grundkörper K . Wenn für Polynome über K der Satz
Satz 5.15 Sei $F|E$ eine Erweiterung von Funktionenkörpern über dem gleichen al-

Wir fassen zusammen:

Fortsetzungen.

In der Theorie der Überlagerungen beweist man für bogenweise zusammenhängendes X , daß die Urbilder von in Y nicht verzweigenden Punkten die gleiche Mächtigkeit – die sogenannte *Blätterzahl* der Überlagerung – haben. Für Überlagerungen Riemannscher Flächen von algebraischen Funktionenkörpern folgt dies aus der fundamentalen Gleichung, denn nicht verzweigende Stellen besitzen $[F: E]$

□

$$\mathcal{E}^{-1}(\overline{V}) = \mathcal{E}_{F'|F}(\mathcal{E}_{F'|E}^{-1}(\overline{V})) = \mathcal{E}_{F'|F}(\bigcup_{\sigma \in G} \sigma V) \subseteq \bigcup_{i=1}^t U^{(i)}.$$

Aus $\mathcal{E}_{F'E} = \mathcal{E}_{F'F} \circ \mathcal{E}_{FE}$ und der Surjektivität von $\mathcal{E}_{F'F}$ folgt:

6 Die Stetigkeit der Nullstellen

6.1 Die Nullstellen der Norm einer Funktion

Sei $F|E$ eine Erweiterung von Funktionenkörpern über dem gleichen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper K und $T \subset S(F)$ eine echte Teilmenge von $S(F)$, so daß $T = \mathcal{E}^{-1}(T_0)$ das volle Urbild einer Teilmenge T_0 von $S(E)$ ist. Wir nehmen im folgenden wieder an, $F|E$ sei separabel und bezeichnen mit F' die galoissche Hülle von $F|E$ und mit G die zu $F'|E$ gehörende Galoisgruppe.

Es sei $T' := \mathcal{E}_{F'|F}^{-1}(T) = \mathcal{E}_{F'|E}^{-1}(T_0)$ und $O_{T'}$ der ganze Abschluß von O_T in F' . Da unter G konjugierte Funktionen das gleiche Minimalpolynom über E besitzen, folgt aus $f \in O_{T'}$, daß auch alle Konjugierten von f in $O_{T'}$ liegen. Insbesondere gilt dann für alle $\sigma \in G$ und alle $P' \in T'$, daß $f^\sigma P' \neq \infty$.

Im folgenden seien mit $N_{F'E}$ und N_{FE} die jeweiligen Normabbildungen bezeichnet. Es gilt dann:

$$\forall f \in F : N_{F'E}(f) = N_{FE}(f)^{[F':F]} \quad (6)$$

Wir zeigen:

Satz 6.1 Es sei $f \in O_T$ eine nichtkonstante Funktion, deren Nullstellen ausschließ-
lich in T liegen. Dann gilt:

$$\text{grad}_P(\text{div}_F(f)_0) = \text{grad}_E(\text{div}_E(N_{FE}(f))_0).$$

Beweis: Da sich nach Voraussetzung Nullstellen einer konjugierten nicht gegen Pole einer anderen wegheben können, gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G} \text{grad}_{P'}((f^\sigma)_0) &= \sum_{\sigma \in G} [F' : E] \text{grad}_{P'}(f)_0 \\ &= [F' : E] \text{grad}_{P'}(f)_0 \\ &= [F' : E] [F' : F] \text{grad}_P(f)_0, \end{aligned}$$

wobei der Index der Gradabbildung auch angibt, bezüglich welchen Körpers der Nullstellendivisor einer Funktion als Divisor aufzufassen ist. Diese Konvention wird im weiteren beibehalten.

Andererseits gilt wegen (6):

$$\begin{aligned} \text{grad}_{P'}(\text{div}_{F'}(N_{F'E}(f)_0)) &= [F' : F] \text{grad}_{P'}(\text{div}_{F'}(N_{FE}(f)_0)) \\ &= [F' : E] [F' : F] \text{grad}_E(\text{div}_E(N_{FE}(f)_0)), \end{aligned}$$

und es folgt die behauptete Gleichheit.

□

Seien nun $P_1, \dots, P_r$ die Fortsetzungen einer Stelle $Q \in T_0$ nach $S(F)$ und P' eine Fortsetzung von Q nach $S(F')$. Dann folgt aus der fundamentalen Gleichung und aus (6):

$$\sum_{\sigma \in G} v_{\sigma P'}(N_{F'E}(f)) = [F' : E][F' : F] v_Q(N_{FE}(f)).$$

Da sich Nullstellen gegen Pole nicht wegheben können, folgt:

$$\sum_{\sigma \in G} v_{\sigma P'}(N_{F'E}(f)) = \sum_{\sigma \in G} \sum_{\sigma \in G} v_{\sigma P'}(f)$$

$$= [F' : E] \sum_{\sigma \in G} v_{\sigma P'}(f).$$

Die $\sigma P'$ sind auch sämtliche Fortsetzungen der $P_1, \dots, P_r$. Die fundamentale Gleichung liefert deshalb:

$$\sum_{\sigma \in G} v_{\sigma P'}(f) = [F' : F] \sum_{i=1}^r v_{P_i}(f).$$

Man erhält somit:

$$\sum_{i=1}^r v_{P_i}(f) = v_Q(N_{FE}(f)).$$

Insbesondere gilt für jede Nullstelle $P \in T$ von f , daß $P|_E$ Nullstelle von $N_{FE}(f)$ in $S(E)$ ist. Umgekehrt besitzt jede Nullstelle von $N_{FE}(f)$ in $S(E)$ mindestens eine Fortsetzung nach $S(F)$, welche Nullstelle von f ist.

Wir halten dieses Ergebnis und eine direkte Folgerung davon im folgenden Satz fest:

Satz 6.2 Es sei $Q \in T_0$ mit den Fortsetzungen $P = P_1, \dots, P_r$ in $T \subset S(F)$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^r v_{P_i}(f) = v_Q(N_{FE}(f)).$$

Insbesondere folgt: wenn $f P_i \neq 0$ für $i = 2, \dots, r$, dann ist

$$v_P(f) = v_Q(N_{FE}(f)).$$

6.2 Die Stetigkeit der Nullstellen

Alles was über die Nullstellen einer Funktion mit Hilfe der Norm gesagt werden kann, gilt zunächst auch noch für die Nullstellen der konjugierten. Der folgende Satz versetzt uns in die Lage, die Nullstellen von Funktionen in einer Umgebung einer gegebenen Funktion von denen ihrer konjugierten im gewissen Sinne zu trennen.

Satz 6.3 Sei K ein topologischer Körper. Dann ist für jede Teilmenge $T \subset S(F)$ die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{O}_T \times T \rightarrow K, (f, P) \mapsto fP$$

stetig.

Beweis: Die universelle Eigenschaft der Linearartopologie überträgt sich auf die Topologie des Produktraumes $\mathcal{O}_T \times T$, so daß die Stetigkeit von Φ nur auf den Teilräumen $V \times T$ zu zeigen ist, wobei V ein in $\mathcal{O}_T$ enthaltener, endlich dimensionaler Teilvektorraum ist.

Sei dazu $P_0 \in T$ gegeben und $(f_1, \dots, f_n)$ eine Basis von V . Die Funktionen aus $\mathcal{O}_T$ sind stetig auf T , deshalb gibt es zu jeder Umgebung der Null in K eine Umgebung $W \subset T$ von P_0 , so daß für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\forall P \in W : f_i P - f_i P_0 \in U.$$

Für $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$ ($a_i \in K$) gilt für alle $P \in T$:

$$fP = \sum_{i=1}^n a_i f_i P.$$

Umgebungen der Koeffizienten von f entsprechen Umgebungen von f in der Produkttopologie auf V . Die Stetigkeit von Φ folgt somit aus der Stetigkeit von Addition und Multiplikation im topologischen Körper K . $\square$

Ist $F = K(x)$ ein rationaler Funktionenkörper und P_∞ die Stelle, die die Erzeugende auf ∞ abbildet, läßt sich, wie in Kapitel 4 gezeigt, $T := S(F) \setminus \{P_\infty\}$ mit dem Grundkörper K identifizieren. In diesem Fall ist $\mathcal{O}_T = K[x]$, und Φ ist diejenige Abbildung, welche jedem Polynom $g \in K[x]$ und jedem $\alpha \in K$ die "Auswertung" $g(\alpha)$ zuordnet.

Korollar 6.4 Sei $f \in \mathcal{O}_T$ und $P \in T$, so daß $fP \neq 0$. Dann gibt es Umgebungen $\tilde{U} \subset F$ von f und $W \subset T$ von P , so daß für alle $g \in \tilde{U}$ gleichen Grades wie f gilt:

$$\forall Q \in W : gQ \neq 0.$$

Beweis: Nach 6.3 gibt es Umgebungen $W \subset T$ von $\tilde{P}$ und eine Umgebung U von f in $\mathcal{O}_T$ mit dieser Eigenschaft. Da die Topologie auf $\mathcal{O}_T$ nach 3.4 die Teilraumtopologie von F ist, gibt es eine Umgebung $\tilde{U}_1$ von f in F , so daß $\tilde{U}_1 \cap \mathcal{O}_T = U$. Nach Satz 3.11 gibt es eine Umgebung $\tilde{U}_2$ von f in F mit der Eigenschaft, daß alle Funktionen gleichen Grades wie f in $\tilde{U}_2$ den gleichen Poldivisor besitzen.

Die Umgebung $\tilde{U} := \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ von f besitzt die behaupteten Eigenschaften. $\square$

Wir sind nun in der Lage, die Stetigkeit der Nullstellen von Funktionen aus algebraischen Funktionenkörpern einer Variablen über abgeschlossenem, bewerteten Grundkörper zu beweisen.

Satz 6.5 Sei F ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über algebraisch abgeschlossenem Grundkörper K . K trage eine Topologie, in der der Satz über die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen gilt.

Gegeben sei eine nichtkonstante Funktion $f \in F$ mit verschiedenen Nullstellen $P_1, \dots, P_d$. Dann gibt es zu paarweise disjunkten Umgebungen U_i der P_i ($1 \leq i \leq d$) eine Umgebung W von f , so daß $\forall g \in W$ gleichen Grades wie f gilt: g hat genau $v_{P_i}(f)$ Nullstellen in U_i .

Zunächst soll die Idee des Beweises dargestellt werden:

Bezieht man sich auf den von f erzeugten rationalen Teilkörper, sind die Nullstellen $P_1, \dots, P_d$ von f in $S(F)$ die Fortsetzungen der Stelle $P_0 \in S(K(f))$, welche die Erzeugende f auf Null abbildet. Auf das Polynom

$$f_{[F:K(f)]}(f) = N_{F/K(f)}(f) \in K[f]$$

wird nun der Satz über die Stetigkeit der Nullstellen angewandt.

Zu einer Umgebung V von P_0 – also der Null in K – gibt es eine Umgebung $\tilde{W}$ von $f_{[F:K(f)]}$ in $K(f)$, so daß alle rationale Funktionen gleichen Grades wie $f_{[F:K(f)]}$ genau $[F:K(f)]$ Nullstellen in V besitzen.

Die Stetigkeit der Norm liefert eine Umgebung W von f in F , so daß die Norm aller Funktionen aus W in $\tilde{W}$ liegt. Es wird sich im folgenden Beweis zeigen, daß damit die Funktionen aus W gleichen Grades wie f genau $[F:K(f)]$ Nullstellen in $\mathcal{E}_{FK(f)}^{-1}(V)$ besitzen, doch ist es in dieser Situation nicht klar, wie sich die Nullstellen mit ihren Vielfachheiten auf die einzelnen Nullstellen von f verteilen. Dieses Problem wird durch eine geeignete Wahl des rationalen Teilkörpers, bezüglich dessen die Norm betrachtet wird, und durch die Anwendung von Korollar 6.4 gelöst.

$$N(f) = \prod_{i=1}^d (x - x_{P_i}(f)).$$

Nun folgt aus 6.1 und 6.2, daß

$$\mathcal{E}_1(V_i) \subseteq U_i \cup \bigcup_{j=2}^d W_j^i \quad (1 \leq i \leq d).$$

Well T in $S(F)$ co – endlich und somit eine offene Teilmenge von $S(F)$ ist, sind offene Mengen bezüglich der Teilraumtopologie auf T offen in $S(F)$. Nach 5.14 gibt es für $1 \leq i \leq d$ und $2 \leq j \leq r_i$ zu den Umgebungen U_i, W_j^i Umgebungen V_i der $P_i|_{K(x)}$, so daß

$$(7) \quad \forall g \in W \text{ gleichen Grades wie } f \quad \forall P \in W_j^i : gP \neq 0.$$

Nach 6.4 gibt es eine Umgebung $W \subset F$ von f und für $i = 1, \dots, d$; und $j = 2, \dots, r_i$ Umgebungen $W_j^i \subset T$ der P_j^i , so daß gilt:

$$v_{P_i|K(x)}(N(f)) = v_{P_i}(f).$$

Wir schreiben im folgenden N statt $N_{FK(x)}$. Nach Satz 6.2 gilt für $i = 1, \dots, d$:

$$f_{P_j^i} \neq 0 \quad \text{für } j = 2, \dots, r_i.$$

Für $i = 1, \dots, d$ gilt insbesondere für die Fortsetzungen $P_i = P_{(1)}^i, \dots, P_{(r_i)}^i$ von $P_i|_{K(x)} \in S(K(x))$ nach $S(F)$:

$$P_i|_{K(x)} \neq P_j|_{K(x)} \quad \text{falls } i \neq j.$$

$\mathcal{O}_T$ ist somit der ganze Abschluß von $K[x]$ in F , und es gilt:

Wählt man m hinreichend groß, besitzt x aus Gradgründen auch einen Pol bei Q_s .

$$\text{und } v_{Q_j}(x) = -1 \quad \text{für } j = 1, \dots, s-1.$$

$$v_{P_i}(x) = m, \quad v_{P_i}(x - \alpha_i) = 1 \quad \text{für } i = 2, \dots, d,$$

existiert ein $x \in \mathcal{O}_T$ mit:

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in K$ paarweise verschieden, so daß $\alpha_1 = 0$ und $m \in N$. Dann

Wir konstruieren nun mit Hilfe des starken Approximationssatzes einen rationalen Teilkörper von F , der die Nullstellen von f in obigem Sinne "trennt".

der ganze Abschluß von $K[f]$ in F .

$$\mathcal{O}_T = \bigcup_{v_P(f) \geq 0} \mathcal{O}_P$$

ist

Beweis: Sei $f \notin K$ und seien $\{Q_1, \dots, Q_s\} := S(F) \setminus T$ die Pole von f . Dann

ein topologischer Vektorraumisomorphismus. Wir identifizieren im folgenden $f(X)$ mit $\varphi_1^{-1}(f(X)) := f \in K[X]$. Wie in Kapitel 4 gezeigt, entsprechen Umgebungen der Nullstellen α_i von $f(X)$ homöomorph

$$\varphi_n : \mathcal{L}(nP_\infty) \rightarrow K[X]_n, \sum_{i=1}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i X^i$$

der Produkttopologie, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung
Sei $K[X]_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n , versehen mit

bezüglich F als auch F_0 trägt.
gehörige Vielfachenmodul, der in der Produkttopologie die Teilraumtopologie sowohl und $P_\infty \in S_0$ die Stelle, die x auf ∞ abbildet. $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{L}(nP_\infty) \subseteq F_0$ der zu-
gegeben und $x \in F$ ein separierendes Element. Sei $F_0 = K(x)$, $S_0 = S(K(x))$

$$f(X) = a_n X^n + \dots + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \in K[X]$$

Grundkörper, in dem die Stetigkeit der Nullstellen in obiger Formulierung gilt. Sei
Sei nun umgekehrt $F|K$ ein Funktionenkörper über algebraisch abgeschlossenem

wie f aus $W' \cap \tilde{W}$ ausschließlich in U_i ($1 \leq i \leq d$), was zu zeigen war. $\square$
Nach Konstruktion von $\tilde{W}$ liegen die Nullstellen aller Funktionen gleichen Grades
gleichen Grades wie f , die hinreichend nahe bei f liegen, zu bestimmen.

besitzt. Mit (7) gelingt es nun auch, die Verteilung der Nullstellen von Funktionen

$$\mathcal{E}_1^{-1}(V_i) \subseteq U_i \cup \bigcup_{r_i=2}^f W_i^{r_i} \quad (2 \leq j \leq r_i)$$

$v_{P_i}(f)$ Nullstellen in
 $\forall g \in W'$ gleichen Grades wie f gilt daher nach 6.2, daß g für $1 \leq i \leq d$ genau

$$\text{grad}_{K(x)}(N(g)_0) = \text{grad}_{K(x)}(N(f)_0).$$

Und somit ist

$$\text{grad}_{K(x)}(N(g)_0) = \text{grad}_F((g)_0).$$

für 6.1 erfüllt. $\forall g \in W' \subset F$ gleichen Grades wie f gilt daher:
insbesondere alle Nullstellen dieser Funktionen in T . Damit sind die Voraussetzungen
aus W' gleichen Grades wie f den gleichen Poldivisor wie f besitzen. Dann liegen
 f , so daß $N(W') \subseteq \underline{W}$. Wir verkleinern nun W' gemäß 3.11 so, daß alle Elemente
Aus der Stetigkeit der Norm (3.8) folgt die Existenz einer Umgebung $W' \subset F$ von
in V_i besitzt.

$\forall f \in \underline{W}$ mit $\text{grad}_{K(x)}((f)_0) = \text{grad}_{K(x)}(N(f)_0)$ gilt, daß f genau $v_{P_i}(f)$ Nullstellen
stellen von $N(f)$ in K (oder $S(K(x))$) eine Umgebung $\underline{W} \subset K(x)$ von $N(f)$, so daß
Die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen liefert zu den Umgebungen V_i der Null-

Umgebungen der Nullstellen P_{α_i} von f in S_0 . Wir verkleinern gegebene, paarweise disjunkte Umgebungen U_i der α_i so, daß

$$\mathcal{E}_1^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^{r_i} U_j,$$

wobei die U_j paarweise disjunkte Umgebungen der Fortsetzungen P_j^i ($1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq r_i$) der P_{α_i} sind.

Die P_j^i sind die Nullstellen von f in $S(F)$. Die Stetigkeit der Nullstellen in F liefert nun zu den U_j^i eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq F$, so daß $\forall g \in \tilde{U}$ gleichen Grades wie f gilt, daß g genau $v_{P_j^i}$ Nullstellen in U_j^i besitzt.

$\tilde{U} \cap \mathcal{L}(nP_\infty) := U$ ist eine Umgebung von f in der Produkttopologie in $\mathcal{L}(nP_\infty)$, die sich so verkleinern läßt, daß für alle Elemente aus U in der Darstellung bezüglich der Basis $1, x, \dots, x^n$ der höchste Koeffizient nicht verschwindet.

$\forall g \in U$ gilt nun, daß

$$N_{FK(x)}(g) = g_{[F:K(x)]}$$

und mit 6.2 folgt, daß g genau $v_{P_{\alpha_i}}(f)$ Nullstellen in

$$\mathcal{E}\left(\bigcup_{1 \leq j \leq r_i} (U_j^i)\right) = U_i \quad (i=1, \dots, n)$$

besitzt.

Wir haben damit gezeigt:

Satz 6.6 Für einen algebraisch abgeschlossenen, topologischen Körper gilt die Stetigkeit der Nullstellen von Polynomen über K genau dann, wenn sie in der obigen Formulierung in einem Funktionenkörper über K gilt.

Literaturverzeichnis

- [1] Bosch, Günzert, Remmert : Nonarchimedean Analysis, *Springer*, (1984).
- [2] Bourbaki N. : Topological Vector Spaces, *Springer*, (1987).
- [3] Chevalley, C. : Introduction to the theory of algebraic functions in one variable, *American math. Society*, (1951).
- [4] Deuring, M. : Lectures on the theory of Algebraic Functions of one variable, *Springer*, (1973).
- [5] Endler, K. : Valuation theory, *Springer*, (1972).
- [6] Forster, O. : Riemannsche Flächen, *Springer* (1977).
- [7] Henrici, P. : Applied and computational complex Analysis Vol.I, *John Wiley and sons*, (1974).
- [8] Kiltingen : Inverses of polynomial functions in topological fields, *Proc. Amer. Math. Soc.* 24, (1970), 9-17.
- [9] Kowalsky H.J. : Topologische Räume, *Birkhauser*, (1961)
- [10] Kowalsky H.J. : Beiträge zur topologischen Algebra, *Math. Nachrichten* Band 11, (1954).
- [11] Kowalsky - Dürbaum : Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien, *Crelle - Journal* 191, (1953), 135-162.
- [12] Kowalsky H.J. : Zur topologischen Kennzeichnung von topologischen Körpern, *Math. Nachrichten* 9, (1953), 261-268.
- [13] Kowalsky H.J. : Vektoranalysis I, *De Gruyter*, (1974).
- [14] Kuhlmann F. - V. : Einführung in die modelltheoretische Algebra, *Vorlesungsausarbeitung*, (WS 89/90 Universität Heidelberg).
- [15] Lang S. : Introduction to Algebraic and Abelian Functions, *Springer*, (2.Aufl.), (1982).
- [16] Pontrjagin : Topologische Gruppen I, *Teubner*, (1957).
- [17] Schubert H. : Topologie, *Teubner*, (1969).
- [18] Wiesław W. : Topological fields, *Acta Univ. Wratislaviensis* No 675, (1982).