Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Tief verzweigte Erweiterungen und perfektoide Körper

Masterarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik

Betreuung:
Prof. Dr. Peter Schneider

Eingereicht von:
Anna Verena Edenfeld

Münster, März 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Sei p eine fixierte Primzahl.
Ziel der Masterarbeit ist es, zu zeigen, dass die Vervollständigung einer tief verzweigten Erweiterung eines lokalen Körpers perfektoid ist, und dass umgekehrt eine separable Erweiterung eines lokalen Körpers, deren Vervollständigung perfektoid ist, tief verzweigt ist.
Ein perfektoider Körper ist ein nichtarchimedisch bewerteter vollständiger Körper K (mit Bewertungsring $\mathfrak{o}_K$), sodass die Bewertung nichtdiskret ist und $(\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K)^p = \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ gilt.
Unter tief verzweigten Erweiterungen verstehen wir in dieser Masterarbeit separable Erweiterungen $\mathcal{F}/F$ eines lokalen Körpers F, die "so sehr verzweigt" sind, dass sich endliche separable Erweiterungen $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ in gewisser Weise so verhalten wie unverzweigte endliche Erweiterungen lokaler Körper. Zum Beispiel gilt für die Spurabbildung $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ (wobei $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}$ beziehungsweise $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ das maximale Ideal von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ beziehungsweise $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ bezeichnet), und es gilt für den Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} = 0$.
Wenn wir $\mathcal{F}$ als abzählbare Vereinigung endlicher Teilerweiterungen F_n/F mit $F_n \subseteq F_{n+1}$ schreiben können (das ist zum Beispiel der Fall, wenn $F = \mathbb{Q}_p$ ist), dann finden wir ein n_0 und eine endliche Erweiterung F'_{n_0}/F_{n_0}, sodass $\mathcal{F}' = \mathcal{F}F'_{n_0}$ und, wenn wir $F'_n := F_nF_{n_0}$ für $n \geq n_0$ setzen, $[F'_n : F_n] = [\mathcal{F}' : \mathcal{F}]$ gilt. Wir können dann die Differente $\mathcal{D}_{F'_n/F_n}$ betrachten. Wenn nun $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt ist, dann wird die Bewertung der Differente $\nu(\mathcal{D}_{F'_n/F_n})$ mit wachsendem n beliebig klein. Die Verzweigung der F'_n wird sozusagen von den F_n "aufgegessen".
Tief verzweigte Erweiterungen wurden zuerst von Coates und Greenberg in [16] für $F = \mathbb{Q}_p$ (oder eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$) definiert, und in [8] von Fesenko auf separable Erweiterungen von beliebigen lokalen Körpern mit perfektem Restklassenkörper verallgemeinert. Noch allgemeiner ist die entsprechende Definition von Gabber und Ramero in [17], die einen nichtarchimedisch bewerteten Körper K tief verzweigt nennen, wenn für einen separabel-algebraischen Abschluss K^{sep} von K der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{\mathfrak{o}_{K^{sep}}/\mathfrak{o}_K} = 0$ ist. In dieser Masterarbeit betrachten wir separable Erweiterungen eines lokalen Körpers und halten uns an die Definition von Coates/Greenberg beziehungsweise Fesenko, zeigen aber im dritten Kapitel, dass diese mit der Definition von Gabber/Ramero im Fall einer separablen Erweiterung eines lokalen Körpers übereinstimmt.
Eine weitere in diesem Zusammenhang interessante Klasse von Körpererweiterungen sind arithmetisch proendliche Erweiterungen $\mathcal{F}/F$ eines lokalen Körpers. Sie wurden von Wintenberger in [21] definiert und beschreiben Erweiterungen, bei denen $G_F^u G_{\mathcal{F}}$ offen in G_F für alle $u \geq -1$ ist, wobei G_F beziehungsweise $G_{\mathcal{F}}$ die abso-

lute Galoisgruppe von F beziehungsweise $\mathcal{F}$ und G_F^u die u-te Verzweigungsgruppe von G_F bezeichnen. Arithmetisch proendliche Erweiterungen sind tief verzweigt, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Überblick

Im ersten Kapitel werden einige grundlegende Begriffe eingeführt und Sätze genannt beziehungsweise bewiesen, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Dabei geht es vor allem um Verzweigungstheorie; wir werden unter anderem die Differente und die Verzweigungsgruppen einer endlichen Erweiterung lokaler Körper definieren und einige damit zusammenhängende Sätze beweisen.

Im zweiten Kapitel werden tief verzweigte Erweiterungen eingeführt und einige ihrer Eigenschaften bewiesen. Wir werden das Verhalten einer unendlichen Erweiterung eines lokalen Körpers F oft durch endliche Teilerweiterungen beschreiben, sodass wir die verzweigungstheoretischen Resultate aus dem ersten Kapitel benutzen können. Die Beweise sind oft eher technischer Natur und laufen häufig darauf hinaus, das Verhalten von zyklischen Erweiterungen von Primzahlgrad zu betrachten und dann zu benutzen, dass die Trägheitsgruppe einer endlichen Erweiterung lokaler Körper auflösbar ist.

Im dritten Kapitel zeigen wir, dass die Vervollständigung einer tief verzweigten Erweiterung $\mathcal{F}/F$ perfektoid ist. Dazu orientieren wir uns am Vorgehen von Gabber und Ramero in [17]. Anstatt dabei wie in [17] in der Kategorie der Fast- $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Moduln zu arbeiten (das ist die Kategorie der $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Moduln lokalisiert an der vollen Unterkategorie der $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Moduln, die vom maximalen Ideal $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ annuliert werden), führen wir die Beweise mit konkreten Rechnungen in der Kategorie der $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Moduln, ohne viel Kategorientheorie zu benötigen. Wir werden sehen, dass für eine endliche separable Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ mit Spurabbildung $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'\mathcal{F}}$ der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}} : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}), \\ y &\mapsto (x \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(xy)) \end{aligned}$$

fast surjektiv ist, das heißt, der Kokern wird von $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ annuliert. Die Differente einer endlichen Erweiterung lokaler Körper L/K ist der Annulator des Kokerns des entsprechenden Homomorphismus' $\tau_{L/K}$. Wenn nun wie im obigen Beispiel die Bewertung der Differente $\nu(\mathcal{D}_{F_n'/F_n})$ beliebig klein, der Annulator des entsprechenden Kokerns also immer größer wird, erhalten wir "im Grenzwert", dass der Kokern von $\tau_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}$ fast null ist. Darauf aufbauend zeigen wir, dass die Vervollständigung $\widehat{\mathcal{F}}$ perfektoid ist.

Im vierten Kapitel zeigen wir, dass separable Erweiterungen eines lokalen Körpers $\mathcal{F}/F$, deren Vervollständigungen perfektoid sind, tief verzweigt sind. Dies erreichen wir, indem wir wie in [18] und [12] zeigen, dass es eine Kategorienäquivalenz zwischen perfektoiden Körpern von Charakteristik 0 und solchen von Charakteristik

p gibt. Wir definieren zunächst den *Tilt* eines perfektoiden Körpers von Charakteristik 0. Im Anschluss konstruieren wir den "Untilt" eines perfektoiden Körpers von Charakteristik p. Dabei benutzen wir Witt-Vektoren, die wir am Anfang des Kapitels kurz einführen. Wir zeigen, dass Tilten und Untilten invers zueinander sind und dass sich beides mit endlichen Erweiterungen verträgt.
Für einen perfektoiden Körper mit Charakteristik p erhalten wir dann unser gewünschtes Resultat durch eine einfache Rechnung, und durch die Kategorienäquivalenz erhalten wir dasselbe Ergebnis für Charakteristik 0.

Im fünften Kapitel gehen wir schließlich auf arithmetisch proendliche Körpererweiterungen ein und zeigen, dass diese tief verzweigt sind, die Umkehrung jedoch nicht gilt.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Peter Schneider für das interessante Thema und die hilfreiche und engagierte Betreuung bedanken.
Ein besonderer Dank geht an Ivan Fesenko für das Beantworten meiner Fragen zu seinem Paper [8].
Des Weiteren möchte ich Marten Bornmann sowohl für die Hilfe bei fachlichen Fragen als auch für sein offenes Ohr bei nicht-fachlichen Problemen, die eine Masterarbeit mit sich bringt, danken. Ebenso möchte ich meiner Mentorin Anna Weiß für ihre Unterstützung und ihre Ermutigungen danken. Marius Kley und Martin Lüdtke danke ich für das Korrekturlesen. Außerdem danke ich meinem Freund Tim, meinem Bruder Fabian und meinen Eltern für ihre Unterstützung.

1.1 Notation und grundlegende Voraussetzungen

Alle Ringe seien kommutativ und mit 1.
Unter einem lokalen Körper verstehen wir einen nichtarchimedisch diskret bewerteten Körper, der bezüglich der durch die Bewertung induzierten Topologie vollständig ist und dessen Restklassenkörper perfekt ist.
Wenn K ein nichtarchimedisch bewerteter Körper ist, dann bezeichnen wir den Bewertungsring von K mit $\mathfrak{o}_K$, das maximale Ideal mit $\mathfrak{m}_K$ und den Restklassenkörper von K mit $\bar{K}$.
Die Restklassenkörpercharakteristik aller bewerteten Körper sei grundsätzlich gleich der fixierten Primzahl p.

Sei im Folgenden F ein lokaler Körper (sofern nicht explizit anders definiert) und F^{alg} ein fixierter algebraischer Abschluss von F und $F^{sep} \subseteq F^{alg}$ der separabelalgebraische Abschluss von F in F^{alg}. Da F vollständig und damit henselsch ist, können wir die Bewertung auf F eindeutig zu einer Bewertung ν auf den algebraischen Abschluss F^{alg} von F fortsetzen.

Sei $\mathfrak{o}_F = \{x \in F \,|\, \nu(x) \geq 0\}$ der Bewertungsring von F mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_F = \{x \in F \,|\, \nu(x) > 0\}$ und π_F ein Primelement von $\mathfrak{o}_F$.
Alle betrachteten separablen Körpererweiterungen von F seien in F^{sep}.
Wenn L/F eine endliche Erweiterung ist, definieren wir $\nu_L := e(L/F) \cdot \nu$, wobei $e(L/F)$ den Verzweigungsindex von L/F bezeichne.
Wenn $I \subseteq \mathfrak{o}_L$ ein Ideal im diskreten Bewertunsgring $\mathfrak{o}_L$ ist, bezeichnen wir mit $\nu(I) = \nu(a)$ die Bewertung eines Erzeugers a von I. Weiterhin bezeichnen wir mit F_{un} beziehungsweise $L_{un} = LF_{un}$ die maximalen unverzweigten Teilerweiterungen von F^{sep}/F beziehungsweise F^{sep}/L. Die kanonische Fortsetzung von ν auf die Vervollständigung $\widehat{L}_{un}$ bezüglich ν bezeichnen wir ebenfalls mit ν.
Die Vervollständigung eines algebraischen Abschlusses von $\mathbb{Q}_p$ bezeichnen wir mit $\mathbb{C}_p$.

2 Verzweigungstheorie

In diesem Kapitel geht es um einige Grundlagen, die im weiteren Verlauf benutzt werden. Unter anderem definieren wir die Differente. Außerdem werden Verzweigungsgruppen und damit zusammenhängende Begriffe eingeführt.
Wir setzen in diesem Kapitel grundsätzlich voraus, dass alle betrachteten Körpererweiterungen separabel sind, es sei denn, es handelt sich um Vervollständigungen von Körpern, wobei diese durch das Symbol $\widehat{}$ gekennzeichnet werden.

2.1 Spur und Differente

Tief verzweigte Körpererweiterungen sind (in dieser Masterarbeit) unendliche Erweiterungen eines lokalen Körpers, die wir aber dennoch anhand endlicher Teilerweiterungen beschreiben wollen. Dafür benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1.1 (V, §4, Lemma 6 in [20])**.** *Seien $\mathcal{F}'/\mathcal{F}/F$ Körpererweiterungen, wobei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ endlich sei. Dann finden wir eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$, für die eine endliche, zu $\mathcal{F}$ über E linear disjunkte Erweiterung E'/E existiert, die ebenfalls separabel ist und denselben Grad wie $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ hat und sodass $\mathcal{F}' = \mathcal{F}E'$ gilt. Ist $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ galoissch, können wir E so wählen, dass E'/E galoissch ist.*

Beweis. Da $\mathcal{F}/F$ eine algebraische Erweiterung ist, können wir $\mathcal{F}$ als Vereinigung der endlichen Teilerweiterungen E/F von $\mathcal{F}/F$ schreiben. Sei $e_1, ..., e_d$ eine Basis von $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$, $[\mathcal{F}' : \mathcal{F}] = d$. Schreibe

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{d} x_{ijk} e_k \qquad \text{mit } x_{ijk} \in \mathcal{F}.$$

Sei E/F eine endliche Erweiterung, sodass die x_{ijk} in E liegen. Wir definieren $E' := E[e_1, ..., e_d]$. Dann erfüllt E' die geforderten Bedingungen, wobei die Separabilität daraus folgt, dass die Elemente $e_1, ..., e_d$, da $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ nach Voraussetzung separabel ist, separabel über $\mathcal{F}$ sind. Außerdem ist $\mathcal{F}/E$ separabel. Also ist $\mathcal{F}'/E$ separabel. Damit ist auch E'/E separabel.
Sei nun zusätzlich $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ galoissch. Sei $\sigma \in \mathrm{Hom}_E(E', F^{alg})$ ein Homomorphismus. Da $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ galoissch ist und wir σ $\mathcal{F}$-linear auf $\mathcal{F}'$ fortsetzen können, gilt $\sigma(E') \subseteq \mathcal{F}'$. Wir finden also Elemente $x_i \in \mathcal{F}$ mit $\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. Wenn wir $E_1 := E[x_1, ..., x_d]$ und $E_1' := E_1[e_1, ..., e_d]$ setzen und mit σ_1 die E_1-lineare Fortsetzung von σ auf E_1' bezeichnen, gilt $\sigma_1(E_1') = E_1'$. Wir finden also durch Vergrößern von E eine endliche Erweiterung E_2/E in $\mathcal{F}/F$, sodass $E_2' = E_2[e_1, ..., e_d]$ eine galoissche Erweiterung von E_2 ist, die ebenfalls die sonstigen Bedingungen aus dem Lemma erfüllt. $\square$

Bemerkung 2.1.2. Seien $\mathcal{F}'/\mathcal{F}/F$ Erweiterungen, wobei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ endlich sei, und E/F sei eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$. Wenn E die Bedingungen aus Lemma 2.1.1 erfüllt, sagen wir, dass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ *über* E *definiert* ist. In dieser Situation bezeichnen wir den Körper, der die geforderten Bedingungen aus dem obigen Lemma erfüllt, stets mit E'. Wenn $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ galoissch ist, gehen wir grundsätzlich davon aus, dass auch E'/E galoissch ist.

Bemerkung 2.1.3. Wenn $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist, dann auch über jeder endlichen Erweiterung L/E in $\mathcal{F}/F$, wobei wir von $L' = LE'$ ausgehen können.

Im Folgenden definieren wir die *Differente* einer endlichen Erweiterung lokaler Körper.
Sei dazu zunächst R ein Ring und M ein endlich erzeugter freier R-Modul.

Lemma 2.1.4. *Der Homomorphismus, der durch*

$$\omega_{M/R} : M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, R) \to \mathrm{Hom}_R(M, M),$$

$$x \otimes \varphi \mapsto (y \mapsto x \cdot \varphi(y)),$$

induziert wird, ist ein Isomorphismus von R-Moduln.

Beweis. Sei $m_1, ..., m_d$ eine Basis von M und sei $\sum_{j=1}^n (x_j \otimes \varphi_j) \in M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, R)$ ein Element im Kern von $\omega_{M/R}$, wobei $x_j = \sum_{i=1}^d r_{ij} m_i$ mit bestimmten Elementen $r_{ij} \in R$ sei. Dann gilt für alle $y \in M$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(y) \\ &= \sum_{j=1}^n ((\sum_{i=1}^d r_{ij} m_i) \cdot \varphi_j(y)) \\ &= \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^d (r_{ij} m_i \cdot \varphi_j(y))) \\ &= \sum_{i=1}^d m_i (\sum_{j=1}^n r_{ij} \varphi_j(y)). \end{aligned}$$

Damit folgt $\sum_{j=1}^n r_{ij}\varphi_j(y) = 0$ für alle $0 \leq i \leq d$, also $\sum_{j=1}^n (x_j \otimes \varphi_j) = \sum_i^d (m_i \otimes \sum_j^n r_{ij}\varphi_j) = 0$. Also ist $\omega_{M/R}$ injektiv.
Wenn $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$ ein beliebiges Element ist, dann ist $\sum_{i=1}^d \psi(m_i) \otimes \varphi_i$, wobei φ_i für $1 \leq i \leq d$ durch

$$\varphi_i(m_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird, ein Urbild von ψ, denn es gilt $\omega_{M/R}(\sum_{i=1}^d \psi(m_i) \otimes \varphi_i)(m_j) = \psi(m_j)$ für alle $1 \leq j \leq d$, und ein Element aus $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ wird durch die Bilder der m_i eindeutig bestimmt. $\square$

Definition (Evaluationsabbildung)**.** Die Evaluationsabbildung $\mathrm{ev}_{\mathrm{M/R}}$ wird definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{\mathrm{M/R}} : M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, R) &\to R, \\ x \otimes \varphi &\mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

Definition (Spur)**.** Wir definieren die *Spur* von M über R von einem Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$ durch

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{M/R}}(\varphi) := (\mathrm{ev}_{M/R} \circ \omega_{M/R}^{-1})(\varphi),$$

und die *Spur* von M über R eines Elements $x \in M$ durch

$$\mathrm{Tr}_{M/R}(x) := \mathrm{tr}(\mu_x),$$

wobei μ_x durch $M \ni y \mapsto x \cdot y \in M$ gegeben sei (μ_x ist die Multiplikation mit x).

Sei nun L/F eine endliche Erweiterung von Grad $d = [L : F]$ und $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{L/F}$ die Spur von L/F.

Lemma 2.1.5. *Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(L, L)$ ein Homomorphismus. Sei $(e_i)_i$ eine Basis des F-Vektorraums L. Stelle φ bezüglich $(e_i)_i$ als Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ dar. Dann gilt $\mathrm{tr}_{L/F}(\varphi) = \sum a_{ii}$.*

Beweis. Es gilt $\omega_{L/F}^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^d \varphi(e_i) \otimes \varphi_i = \sum_{i=1}^d (\sum_{j=1}^d a_{ij} e_j) \otimes \varphi_i$, wobei φ_j durch

$$\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

definiert ist. Es gilt $\mathrm{ev}(\sum_{i=1}^d (\sum_{j=1}^d a_{ij} e_j) \otimes \varphi_i) = \sum_{i=1}^d (\sum_{j=1}^d a_{ij} \varphi_i(e_j)) = \sum_{i=1}^d a_{ii}$. $\square$

Lemma 2.1.6. Tr *ist nicht ausgeartet und wir haben einen Vektorraumisomorphismus*

$$T : L \to \mathrm{Hom}_F(L, F),$$

der durch $x \mapsto (y \mapsto \mathrm{Tr}(xy))$ definiert ist.

Beweis. Tr stimmt nach Lemma 2.1.5 mit der in [4] definierten Spur überein. Die Aussage des Lemmas stimmt nun mit Satz 7 in [4, Kapitel 4, Abschnitt 7] überein, wobei wir beachten, dass L/F nach Grundvoraussetzung separabel ist. $\square$

Sei $x \in \mathfrak{o}_L$ ein Element aus dem Bewertungsring von L. Es gilt, da F henselsch ist, $\nu(x) = \nu(\sigma(x))$ für alle $\sigma \in \mathrm{Hom}_F(L, F^{sep})$, und mit der strikten Dreiecksungleichung folgt $\mathrm{Tr}(x) \in \mathfrak{o}_F$. Wir erhalten einen Homomorphismus

$$\begin{aligned}\tau_{L/F} : \mathfrak{o}_L &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_F),\\ x &\mapsto (y \mapsto \mathrm{Tr}(xy)).\end{aligned}$$

Lemma 2.1.7. *$\tau_{L/F}$ ist injektiv.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathfrak{o}_L$, sodass $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{o}_L$ gilt, es aber ein $z \in L$ gibt, sodass $\mathrm{Tr}(xz) \neq 0$ ist. Dann wählen wir ein $w \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ mit $wz \in \mathfrak{o}_L$. Dann gilt $w \cdot \mathrm{Tr}(xz) = \mathrm{Tr}(wxz) = 0$, Widerspruch. Damit gilt $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ für alle $y \in L$. Da die Spur nicht ausgeartet ist, folgt $x = 0$. □

Bemerkung 2.1.8. Wir definieren

$$\mathfrak{o}_L^* := \{x \in L \mid \mathrm{Tr}(xy) \in \mathfrak{o}_F \text{ für alle } y \in \mathfrak{o}_L\}.$$

Sei $e_1, ..., e_n$ eine $\mathfrak{o}_F$-Basis von $\mathfrak{o}_L$ (und damit auch eine F-Basis von L). Sei $e_1^*, ..., e_n^*$ die duale Basis von L/F bezüglich $\mathrm{Tr}_{L/F}$. Es gilt $\mathfrak{o}_L^* = e_1^*\mathfrak{o}_F + ... + e_n^*\mathfrak{o}_F$. Wegen $\mathfrak{o}_L \subseteq \mathfrak{o}_L^*$ gilt $\min_i\{\nu(e_i^*)\} \leq 0$. Wir setzen wir $a := \pi_F^{-\min_i\{\nu(e_i^*)\}}$. Dies hängt nicht von der gewählten Basis ab.

Definition. Wir definieren die *Differente* von L/F als

$$\mathcal{D}_{L/F} = a \cdot \mathfrak{o}_L = \{x \in L : x\mathfrak{o}_L^* \subseteq \mathfrak{o}_L\}.$$

Lemma 2.1.9 (III, § 4, Proposition 8 in [20])**.** *Seien $L/E/F$ endliche Erweiterungen. Dann gilt*

$$\mathcal{D}_{L/F} = \mathcal{D}_{L/E} \cdot \mathcal{D}_{E/F}.$$

Lemma 2.1.10 (siehe Lemma 2.6 aus [16])**.** *Seien $\mathcal{F}'/\mathcal{F}/F$ Körpererweiterungen, wobei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ endlich sei. Sei E_1/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$, sodass $\mathcal{F}'/F$ über E_1 definiert ist. Dann gilt für alle endlichen Erweiterungen E_2/E_1 in $\mathcal{F}/F$*

$$\nu(\mathcal{D}_{E_2'/E_2}) \leq \nu(\mathcal{D}_{E_1'/E_1}).$$

Beweis. Sei $d := [\mathcal{F}' : \mathcal{F}]$. Jede E_1-Basis $a_1, ..., a_d$ von E_1' ist auch eine E_2-Basis von $E_2' = E_2E_1'$, denn da die $a_1, ..., a_d$ linear unabhängig über $\mathcal{F}$ sind, sind sie erst recht über E_2 linear unabhängig, und außerdem gilt $[E_2' : E_2] = [E_1' : E_1]$. Seien $x_1, ..., x_d$ eine Basis von $\mathfrak{o}_{E_1'}$ als $\mathfrak{o}_{E_1}$-Modul und $y_1, ..., y_d$ eine Basis von $\mathfrak{o}_{E_2'}$ als $\mathfrak{o}_{E_2}$-Modul. Die Diskriminante $\delta_{E_1'/E_1} := \mathrm{Norm}_{E_1'/E_1}(\mathcal{D}_{E_1'/E_1})$ ist gleich dem von $\det(\sigma_j(x_i))^2$ erzeugten Ideal in $\mathfrak{o}_{E_1}$[1], wobei $\sigma_1, ..., \sigma_d$ die verschiedenen Einbettungen von E_1' in F^{sep}, die E_1 festlassen, seien. Es gilt

$$\nu(\mathcal{D}_{E_1'/E_1}) = \frac{1}{d}\nu(\delta_{E_1'/E_1}). \tag{2.1}$$

[1]siehe z.B. [20, III, § 3].

Analoges gilt für E_2, wobei wir die E_2 linearen Fortsetzungen eines σ auf E_2' ebenfalls mit σ bezeichnen.
Wir definieren die $d \times d$-Matrix $A = (a_{ik})$, sodass $x_i = \sum_{k=1}^{d} a_{ik} y_k$ für $a_{ik} \in \mathfrak{o}_{E_2}$ gilt. Dann gilt

$$\det((\sigma_j(x_i)))^2 = \det(A)^2 \det((\sigma_j(y_i)))^2.$$

Da $a_{ik} \in \mathfrak{o}_{E_2}$ für alle i, k gilt, haben wir

$$\nu(\delta_{E_1'/E_1}) \geq \nu(\delta_{E_2'/E_2}).$$

Die Behauptung folgt nun aus (2.1). □

Lemma 2.1.11. *Die Abbildung*

$$T_{|\mathfrak{o}_L^*} : \mathfrak{o}_L^* \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_F),$$
$$y \mapsto (x \mapsto \mathrm{Tr}(xy))$$

ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{o}_L$-Moduln, wobei wir $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_F)$ via $a \cdot \varphi := (x \mapsto \varphi(ax))$ für $a, x \in \mathfrak{o}_L$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_F)$ als $\mathfrak{o}_L$-Modul betrachten.

Beweis. Die Injektivität folgt analog zum Beweis von Lemma 2.1.7.
Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_F)$. Da $\mathfrak{o}_L$ ein freier $\mathfrak{o}_F$-Modul vom Rang $[L : F]$ ist, können wir φ zu einer F-linearen Abbildung $\Phi : L \to F$ fortsetzen. Wegen Lemma 2.1.6 finden wir ein $y \in L$, sodass $\Phi(x) = \mathrm{Tr}(xy)$ für alle $x \in L$ gilt. Dann ist y ein Urbild von φ, und nach Definition von $\mathfrak{o}_L^*$ liegt y in $\mathfrak{o}_L^*$. □

Lemma 2.1.12 (Tag 0BW0 in [3])**.** *Sei L/F eine endliche Körpererweiterung und $\mathcal{D}_{L/F}$ die Differente. Dann gilt*

$$\mathcal{D}_{L/F} = \mathrm{Ann}_{\mathfrak{o}_L}(\mathrm{Coker}(\tau_{L/F})).$$

Beweis. Es gilt $\mathcal{D}_{L/F} = \{x \in \mathfrak{o}_L \mid x\mathfrak{o}_L^* \subseteq \mathfrak{o}_L\}$. Das Element $1 \in \mathfrak{o}_L$ wird unter dem Isomorphismus $T_{|\mathfrak{o}_L^*}$ aus Lemma 2.1.11 auf Tr geschickt, das heißt es gilt $T_{|\mathfrak{o}_L^*}(\mathfrak{o}_L) = \mathfrak{o}_L \cdot \mathrm{Tr}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{L/F} &= \{x \in L \mid x\mathfrak{o}_L^* \subseteq \mathfrak{o}_L\}\\ &= \{x \in \mathfrak{o}_L | x \cdot \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_L, \mathfrak{o}_F) \subseteq \mathfrak{o}_L \cdot \mathrm{Tr}\}\\ &= \mathrm{Ann}_{\mathfrak{o}_L}(\mathrm{Coker}(\tau_{L/F})).\end{aligned}$$

□

2.2 Verzweigungsgruppen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Resultate über Verzweigungsgruppen genannt und teilweise bewiesen. Diese stammen größtenteils aus [20, Kapitel IV und V], [15, Kapitel II, § 10], [9, Chapter III].
Sei L/F eine endliche Galois-Erweiterung und $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ die zugehörige Galoisgruppe. Die Gruppe G operiert auf $\mathfrak{o}_L$. Sei x ein Erzeuger von $\mathfrak{o}_L$ als $\mathfrak{o}_F$-Algebra (siehe [20, III, §6, Proposition 12]).

Lemma 2.2.1. *Sei $\sigma \in G$ und sei $i \geq -1$ eine ganze Zahl. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *σ operiert trivial auf dem Qotienten $\mathfrak{o}_L/\mathfrak{m}_L^{i+1}$;*

(ii) *$\nu_L(\sigma(a) - a) \geq i + 1$ für alle $a \in \mathfrak{o}_L$;*

(iii) *$\nu_L(\sigma(x) - x) \geq i + 1$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist klar. Andererseits wird $\mathfrak{o}_L/\mathfrak{m}_L^{i+1}$ als $\mathfrak{o}_F$-Algebra von dem Bild von x unter der Projektion $pr_i : \mathfrak{o}_L \to \mathfrak{o}_L/\mathfrak{m}_L^{i+1}$ erzeugt. Also operiert σ genau dann trivial auf $\mathfrak{o}_L/\mathfrak{m}_L^{i+1}$, wenn $\nu_L(\sigma(x) - x) \geq i + 1$ gilt, denn dann gilt $pr_i(x) = \sigma(pr_i(x))$. □

Definition (Verzweigungsgruppen in unterer Nummerierung)**.** Sei $i \geq -1$ eine ganze Zahl. Wir definieren die *i-te Verzweigungsgruppe in unterer Nummerierung* G_i als die Menge der $\sigma \in G$, die die äquivalenten Bedingungen von Lemma 2.2.1 erfüllen.

Lemma 2.2.2. *Die G_i bilden eine absteigende Sequenz von normalen Untergruppen von G. Es gilt $G_i = \{1\}$ für genügend großes i.*

Beweis. Es gilt für $\sigma \in G_i$ und $\tau \in G$

$$\nu_L(\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau(a) - a) = \nu_L(\tau^{-1} \circ (\sigma \circ \tau(a) - \tau(a))) = \nu_L(\sigma \circ \tau(a) - \tau(a)) \geq i + 1,$$

denn $\tau(a) \in \mathfrak{o}_L$ für alle $a \in \mathfrak{o}_L$. Also ist $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau \in G_i$ für alle $\tau \in G$ und $\sigma \in G$, das heißt G_i ist eine normale Untergruppe von G. Es ist klar, dass die Sequenz der G_i absteigend ist. Wenn $i \geq \sup\{\nu_L(\sigma(x)) - x)\}$ für $\sigma \neq \mathrm{id}$ gilt, ist G_i trivial nach Eigenschaft (iii) aus Lemma 2.2.1; deswegen gilt $G_i = \{1\}$ für genügend großes i. □

Sei $\sigma \in G$. Dann definieren wir eine Funktion auf G durch

$$i_G(\sigma) = \nu_L(\sigma(x) - x).$$

Es ist $i_G(\sigma)$ eine ganze Zahl ≥ 0, wenn $\sigma \neq \mathrm{id}$ gilt; für $\sigma = \mathrm{id}$ ist $i_G(\sigma) = \infty$. Es gilt

$$i_G(\sigma) \geq i + 1 \Leftrightarrow \sigma \in G_i.$$

Lemma 2.2.3. *Sei H eine Untergruppe von G. Dann gilt*

$$H_i = G_i \cap H.$$

Beweis. Das Lemma folgt direkt aus Bedingung (i) in Lemma 2.2.1. □

Satz 2.2.4 (IV, § 1, Proposition 3 in [20]). *Sei H eine normale Untergruppe von G. Dann gilt für jedes $\sigma \in G/H$*

$$i_{G/H}(\sigma) = \frac{1}{e(L/E)} \sum_{\tau H = \sigma} i_G(\tau),$$

wobei E der Fixkörper von H ist.

Korollar 2.2.0.1 (IV, § 2, Korollar zu Proposition 3 in [20]). *Sei $H = G_i$ für ein $i \geq -1$. Dann gilt*

$$(G/H)_u = \begin{cases} G_u/H, & u \leq i \\ = \{1\}, & u \geq i. \end{cases}$$

Bemerkung 2.2.5. Sei L/F eine endliche Erweiterung und sei F_{un} die maximale unverzweigte Teilerweiterung von F^{sep}/F. Dann ist $F_{un}L = L_{un}$ die maximale unverzweigte Teilerweiterung von F^{sep}/L (siehe [9, II, Proposition 3.4]). Es sind $\widehat{F}_{un}$ und $\widehat{L}_{un}$ wieder lokale Körper. Außerdem gilt $\widehat{L}_{un} = \widehat{F}_{un}L$, siehe [20, II, § 3, Theorem 1].

Lemma 2.2.6. *Sei L/F total verzweigt. Dann ist $\widehat{LF_{un}}/\widehat{F}_{un}$ galoissch und die Verzweigungsgruppen von L/F stimmen mit denen von $\widehat{LF_{un}}/\widehat{F}_{un}$ überein.*

Beweis. Da L/F total verzweigt ist, sind L und F_{un} linear disjunkt über F. Also ist L_{un}/F_{un} galoissch mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L_{un}/F_{un}) \cong \mathrm{Gal}(L/F)$. Nach [20, II, §3, Corollary 4] ist außerdem $\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un}$ galoissch und es gilt $\mathrm{Gal}(L_{un}/F_{un}) \cong \mathrm{Gal}(\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un})$. Wenn π_L ein Primelement von $\mathfrak{o}_L$ ist, dann ist π_L auch ein Primelement von $\mathfrak{o}_{L_{un}}$. Da $\mathfrak{m}_{L_{un}}$ dicht in $\mathfrak{m}_{\widehat{L}_{un}}$ liegt, ist π_L ebenfalls ein Primelement von $\mathfrak{o}_{\widehat{L}_{un}}$. Die Erweiterung $\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un}$ ist total verzweigt, also wird die $\mathfrak{o}_{\widehat{F}_{un}}$-Algebra $\mathfrak{o}_{\widehat{L}_{un}}$ von π_L erzeugt. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un})$ ein beliebiges Element und σ' ein Urbild von σ in $\mathrm{Gal}(L/F)$ unter dem Isomorphismus der Galoisgruppen. Dann gilt $\sigma_{|L} = \sigma'$ und damit $\sigma(\pi_L) = \sigma'(\pi_L)$, also

$$\begin{aligned} \nu_L(\sigma'(\pi_L) - \pi_L) &= e(L/F)\nu(\sigma'(\pi_L) - \pi_L) \\ &= e(\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un})\nu(\sigma(\pi_L) - \pi_L) \\ &= \nu_{\widehat{L}_{un}}(\sigma(\pi_L) - \pi_L). \end{aligned}$$

□

Für eine reelle Zahl $u \geq -1$ bezeichnen wir mit G_u die Verzweigungsgruppe G_i, wobei i die kleinste ganze Zahl $\geq u$ ist.

Lemma 2.2.7 (IV, § 2, Proposition 4 in [20]). *Es gilt*

$$\nu_L(\mathcal{D}_{L/F}) = \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} i_L(\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} (\#G_i - 1) = \int_{-1}^{\infty} (\#G_u - 1)\mathrm{d}u.$$

Bemerkung 2.2.8. Da $G_i = \{\mathrm{id}\}$ für genügend große i gilt, ist $\#G_i - 1 = 0$ beziehungsweise der Integrand in der obigen Formel ist null für genügend große u.

Beweis. Sei x ein Erzeuger von $\mathfrak{o}_L$ als $\mathfrak{o}_F$-Algebra und sei f das Minimalpolynom von x über F. Dann gilt nach [20, III, § 7, Proposition 14] $\mathcal{D}_{L/F} = (f'(x))$. Es gilt $f(X) = \Pi_{\sigma \in G}(X - \sigma(x))$ und

$$f'(x) = \Pi_{\sigma \neq \mathrm{id}}(x - \sigma(x))$$

und damit

$$\begin{aligned}
\nu_L(\mathcal{D}_{L/F}) = \nu_L(f'(x)) &= \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} \nu_L(\sigma(x) - x) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \#(G_{i-1} \setminus G_i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot ((\#G_{i-1} - 1) - (\#G_i - 1)) \\
&= (\#G_0 - 1) + (\#G_1 - 1) + (\#G_2 - 1) + \ldots
\end{aligned}$$

□

2.3 Die Funktionen φ und ψ

Sei zunächst wie im vorherigen Abschnitt L/F eine endliche Galois-Erweiterung und $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ die zugehörige Galoisgruppe. Die folgenden Resultate stammen größtenteils aus [20, IV, § 3].
Wir definieren

$$\varphi(u) := \varphi_{L/F}(u) = \begin{cases} \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{(G_0:G_t)}, & \text{wenn } u \geq 0, \\ u, & \text{wenn } -1 \leq u \leq 0. \end{cases}$$

Sei m eine positive ganze Zahl mit $m \leq u \leq m+1$. Dann gilt

$$\varphi(u) = \frac{1}{\#G_0}(\#G_1 + \ldots + \#G_m + (u-m)\#G_{m+1}).$$

Lemma 2.3.1 (IV, § 3, Proposition 12 in [20])**.** (i) *Die Funktion φ ist stetig, stückweise linear, streng monoton steigend und konkav.*

(ii) *Es gilt $\varphi(0) = 0$.*

(iii) *Seien φ'_r und φ'_l die Rechts- beziehungsweise Linksableitung von φ. Dann gilt $\varphi'_r(u) = \varphi'_l(u) = \frac{1}{(G_0:G_u)}$, falls u nicht ganzzahlig ist, und $\varphi'_l(u) = \frac{1}{(G_0:G_u)}$, $\varphi'_r(u) = \frac{1}{(G_0:G_{u+1})}$, falls u ganzzahlig ist.*

Die Funktion $\varphi : [-1, \infty) \to [-1, \infty)$ ist ein Homöomorphismus. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion von φ mit $\psi := \psi_{L/F}$.

Lemma 2.3.2 (IV, § 3, Proposition 13 in [20]). (i) *Die Funktion ψ ist stetig, stückweise linear, streng monoton steigend und konvex.*

(ii) *Es gilt $\psi(0) = 0$.*

(iii) *Wenn $v = \psi(u)$ gilt, dann gilt $\psi_l'(v) = \frac{1}{\varphi_l'(u)}$ und $\psi_r'(v) = \frac{1}{\varphi_r'(u)}$.*

(iv) *Wenn v ganzzahlig ist, dann auch $u = \psi(v)$.*

Definition (Verzweigungsgruppen in oberer Nummerierung). Sei L/F eine endliche galoissche Erweiterung lokaler Körper und $G := \mathrm{Gal}(L/F)$. Dann ist

$$G^v := G_{\psi(v)}$$

beziehungsweise für $v = \varphi(u)$

$$G^{\varphi(u)} := G_u$$

die v-te Verzweigungsgruppe in oberer Nummerierung.

Es gilt $G^{-1} = G$, $G^0 = G_0$ und $G^v = \{\mathrm{id}\}$ für genügend großes v. Die Kenntnis von G^v ist äquivalent zur Kenntnis von G_u, und es gilt

$$\psi(v) = \int_0^v (G^0 : G^w)\mathrm{d}w.$$

Lemma 2.3.3 (IV, §3, Lemma 3 in [20]). *Es gilt $\varphi(u) = \frac{1}{\#G_0} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Inf}(i_G(\sigma), u + 1) - 1$.*

Beweis. Sei $\theta(u) = \frac{1}{\#G_0} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Inf}(i_G(\sigma), u + 1) - 1$ die durch die rechte Seite der Gleichung definierte Funktion. Dann ist θ stetig und stückweise linear, und es gilt $\theta(0) = 0$.
Wenn $m < u < m + 1$ für eine ganze Zahl m gilt, dann ist $\theta'(u)$ gleich der Anzahl der $\sigma \in G$ mit $i_G(\sigma) \geq m + 2$ multipliziert mit $\frac{1}{\#G_0}$, also

$$\theta'(u) = \frac{\#G_{m+1}}{\#G_0} = \frac{1}{(G_0 : G_{m+1})}.$$

Damit gilt $\theta' = \varphi'$, also stimmen beide Funktionen überein. □

Sei nun H eine normale Untergruppe von G und $E \subseteq L$ der Fixkörper von H.

Lemma 2.3.4 (Herbrands Theorem). *Gilt $v = \varphi_{L/E}(u)$, so ist $G_u H/H = (G/H)_v$*

Satz 2.3.5 (III, § 3, Proposition 15 in [20]). *Die Funktionen φ und ψ erfüllen die folgenden Gleichungen:*

$$\varphi_{L/F} = \varphi_{E/F} \circ \varphi_{L/E}$$

und

$$\psi_{L/F} = \psi_{L/E} \circ \psi_{E/F}.$$

Beweis. Sei $u > -1$ keine ganze Zahl. Die Ableitung der Funktion $\varphi_{E/F} \circ \varphi_{L/E}$ an der Stelle u ist nach der Kettenregel

$$(\varphi_{E/F} \circ \varphi_{L/E})'(u) = \varphi'_{E/F}(v) \cdot \varphi'_{L/E}(u)$$

mit $v = \varphi_{L/E}(u)$. Damit gilt mit Lemma 2.3.4

$$\begin{aligned}(\varphi_{E/F} \circ \varphi_{L/E})'(u) &= (\#(G/H)_v/e_{E/F}) \cdot (\#H_u/e_{L/E}) \\ &= \#G_u/e_{L/F} = \varphi'_{L/F}(u).\end{aligned}$$

Die Formel für ψ folgt daraus. □

Satz 2.3.6. *Sei H eine normale Untergruppe von G. Dann gilt*

$$(G/H)^v = G^v H/H$$

für alle $v \geq -1$.

Beweis. Es gilt

$$(G/H)^v = (G/H)_x, \text{ wobei } x = \psi_{E/F}(v).$$

Nach Lemma 2.3.4 gilt $(G/H)_x = G_w H/H$, mit $w = \psi_{L/E}(x) = \psi_{L/F}(v)$ nach Satz 2.3.5. Damit gilt $G_w = G^v$. □

Bemerkung 2.3.7. Für eine unendliche Galoiserweiterung $\mathcal{F}/F$ mit Galoisgruppe G können wir nun aufgrund von Satz 2.3.6

$$G^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(E/F)^u$$

definieren, wobei E die Menge der endlichen Galoiserweiterungen in $\mathcal{F}/F$ durchläuft.
G^u ist eine abgeschlossene normale Untergruppe von G. Im Fall $\mathcal{F} = F^{sep}$ bezeichnen wir den Fixkörper von G^u mit $F^{(u)}$. Insbesondere ist $F^{(u)}/F$ galoissch.

Bemerkung 2.3.8. Sei E/F die maximale unverzweigte Teilerweiterung von L/F. Es gilt $\psi_{L/F} = \psi_{L/E} \circ \psi_{E/F} = \psi_{L/E}$. Mit Lemma 2.2.6 folgt $\psi_{L/F} = \psi_{\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un}}$.

Lemma 2.3.9 (Lemma 2.1 in [16]). *Sei L/F eine beliebige endliche Erweiterung. Dann gilt*

$$\nu_L(\mathcal{D}_{L/F}) = \int_{-1}^{\infty} 1 - \frac{1}{[L : L \cap F^{(i)}]} \mathrm{d}i. \tag{2.2}$$

Beweis. Sei M/F eine endliche galoissche Erweiterung mit $L \subseteq M$. Da die Differente multiplikativ ist, gilt $\mathcal{D}_{M/L} \cdot \mathcal{D}_{L/F} = \mathcal{D}_{M/F}$ und damit

$$\nu_M(\mathcal{D}_{L/F}) = \nu_M(\mathcal{D}_{M/F}) - \nu_M(\mathcal{D}_{M/L}). \tag{2.3}$$

Setze $G = \mathrm{Gal}(M/F)$ und sei H die Untergruppe von G, die L festlässt. Nach Lemma 2.2.7 gilt

$$\nu_M(\mathcal{D}_{M/F}) = \int_{-1}^{\infty}(\#G_i - 1)\mathrm{d}i, \quad \nu_M(\mathcal{D}_{M/L}) = \int_{-1}^{\infty}(\#H_i - 1)\mathrm{d}i,$$

und damit, nach (2.3),

$$\nu_L(\mathcal{D}_{L/F}) = \frac{1}{e(M/L)}\int_{-1}^{\infty}(\#G_i - \#H_i)\mathrm{d}i. \tag{2.4}$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite von (2.2) zu (2.3) äquivalent ist. Sei $i \geq -1$. Dann ist $L \cap F^{(i)}$ der Fixkörper von $G^i H$, und es gilt

$$[L : L \cap F^{(i)}] = \#(G^i H)/\#H = \#(G^i/(G^i \cap H)). \tag{2.5}$$

Sei $i = \varphi_{M/F}(t)$. Nach Lemma 2.3.1 gilt, wenn t nicht ganzzahlig ist, $\varphi_{M/F}(t) = \frac{\#G_t}{\#G_0}$. Außerdem gilt nach Lemma 2.2.3 $G_t \cap H = H_t$. Durch die Variablensubstitution $i = \varphi_{M/F}(t)$ erhalten wir somit aus (2.5), dass die rechte Seite von (2.2) gleich

$$e(L/F)\int_{-1}^{\infty}(1 - \frac{\#H_t}{\#G_t})\frac{\#G_t}{\#G_0}\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

ist. Wegen $\#G_0 = e(M/F) = e(M/L)\cdot e(L/F)$ ist (2.6) gleich (2.4). □

2.4 Zyklische total verzweigte Erweiterungen von Primzahlgrad

Sei L/F eine total verzweigte galoissche Erweiterung und $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ zyklisch von Primzahlgrad l. Sei π ein Primelement von L. Sei $\sigma \in G$ ein Erzeuger von G und setze $s = s(L/F) := i(\sigma) - 1$. Die Verzweigungsgruppen von L/F sehen dann folgendermaßen aus:

$$G = G_0 = ... = G_s,$$
$$\{1\} = G_{s+1} = ...$$

Es gilt $s \neq 0$ genau dann, wenn l gleich der Restklassenkörpercharakteristik p ist. Für die Funktion $\psi = \psi_{L/F}$ gilt

$$\psi(x) = \begin{cases} x & x \leq s, \\ s + l(x - s) & x \geq s. \end{cases} \tag{2.7}$$

Lemma 2.4.1 (V, §3, Lemma 3 in [20])**.** *Für die Differente $\mathcal{D}_{L/F}$ gilt $\nu_L(\mathcal{D}_{L/F}) = (s+1)(l-1)$*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 2.2.7. □

Lemma 2.4.2 (V, §3, Lemma 4 in [20]). *Es gilt* $\mathrm{Tr}_{L/F}(\mathfrak{m}_L) = \mathfrak{m}_F^r$, *wobei* $r = [(s+1)(l-1)/l + 1/l] = s + 1 + [-s/l]$ *gilt. (Hierbei bezeichnet* $[x]$ *die größte ganze Zahl* $\leq x$*.)*

Beweis. Da die Spur $\mathfrak{o}_F$-linear ist, ist $\mathrm{Tr}_{L/F}(\mathfrak{m}_L)$ ein Ideal in $\mathfrak{o}_F$. Sei $r \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Nach [20, Chapter III, Proposition 7] gilt $\mathrm{Tr}_{L/F}(\mathfrak{m}_L) \subseteq \mathfrak{m}_F^r$ genau dann, wenn

$$\mathfrak{m}_L \subseteq \mathfrak{m}_F^r \cdot \mathcal{D}_{L/F}^{-1} = \mathfrak{m}_L^{lr-(s+1)(l-1)}$$

gilt (wobei die Gleichheit aus Lemma 2.4.1 folgt), das heißt wenn $r \leq ((s+1)(l-1)+1)/l$ ist. □

Sei ab jetzt L/F eine beliebige endliche Erweiterung.

Lemma 2.4.3. *Wenn* L/F *galoissch ist, können wir* L/F *als Turm von Teilerweiterungen* $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_i \subseteq ... \subseteq F_n = L$ *schreiben, wobei* F_1/F *unverzweigt und* F_{i+1}/F_i *total verzweigt und zyklisch von Primzahlgrad für* $i \geq 1$ *ist.*

Beweis. Nach [15, Kapitel II, §7] finden wir einen Teilkörper F_1, sodass F_1/F unverzweigt und L/F_1 total verzweigt ist. Nach [20, Kapitel IV, §1, Korollar zu Proposition 2] ist die Galoisgruppe von L/F_1 die Trägheitsgruppe $G_0 = \mathrm{Gal}(L/F)_0$. Diese ist nach [20, Kapitel IV, §2, Korollar 5 zu Proposition 7] auflösbar. Damit besitzt G_0 eine Normalreihe $G_0 \supseteq G_{(1)} \supseteq ... \supseteq G_{(i)} \supseteq G_{(i+1)} \supseteq ... \supseteq \{1\}$, deren Faktoren zyklisch von Primzahlordnung sind[2], woraus das Lemma folgt. □

Bemerkung 2.4.4. Wir können die Funktion ψ, die wir bisher nur für eine galoissche Erweiterung definiert haben, auch für eine beliebige endliche Erweiterung (die allerdings nach Grundvoraussetzung separabel sein soll) definieren. Dazu sei L/F eine endliche Erweiterung und L'/F eine endliche Galois-Erweiterung mit $L \subseteq L'$. Dann definieren wir

$$\psi_{L/F} = \varphi_{L'/L} \circ \psi_{L'/F}.$$

Analog können wir $\varphi_{L/F} = \varphi_{L'/F} \circ \psi_{L'/L}$ definieren. Nach Satz 2.3.5 sind diese Definitionen unabhängig vom gewählten L' und $\psi_{L/F}$ und $\varphi_{L/F}$ erfüllen dieselben Transitivitätsformeln wie die entsprechenenden Funktionen im galoisschen Fall.

Bemerkung 2.4.5. Sei L/F eine endliche Erweiterung, wobei wir $F = \widehat{F}_{un}$ annehmen. Dann ist L/F total verzweigt. Sei L^n die normale Hülle von L über F. L^n/F ist ebenfalls total verzweigt. Seien $G = \mathrm{Gal}(L^n/F)$ und $H = \mathrm{Gal}(L^n/L)$. Dann erhalten wir wie im obigen Lemma eine Folge von Körpererweiterungen $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_i \subseteq ... \subseteq F_n = L^n$, wobei F_{i+1}/F_i total verzweigt und zyklisch von Primzahlgrad für $i \geq 0$ ist, da wir wie im obigen Lemma gesehen eine Normalreihe $G = G_0 \supseteq G_{(1)} \supseteq ... \supseteq G_{(i)} \supseteq G_{(i+1)} \supseteq ... \supseteq \{1\}$, deren Faktoren

[2] Siehe z.B. [4, 5.4, Satz 7].

zyklisch von Primzahlordnung sind, haben.
Der Index von $G_{(i+1)}H$ in $G_{(i)}H$ teilt $\#G_{(i)}/G_{(i+1)}$, was man wie folgt sieht: Es gilt

$$\#(G_{(i)}H/G_{(i+1)}H) = \frac{\#(G_{(i)}H/G_{(i)}) \cdot \#(G_{(i)}/G_{(i+1)})}{\#G_{(i+1)}H/G_{(i+1)}}.$$

Wir haben Isomorphismen $G_{(j)}H/G_{(j)} \cong H/H \cap G_{(j)}$, und außerdem einen surjektiven Homomorphismus $H/H \cap G_{(i+1)} \to H/H \cap G_{(i)}$. Damit ist $\#(G_{(i)}H/G_{(i)})$ ein Teiler von $\#(G_{(i+1)}H/G_{(i+1)})$.
Dann ist $GH \supseteq G_{(1)}H \supseteq ... \supseteq G_{(i)}H \supseteq G_{(i+1)}H \supseteq ... \supseteq H$ eine Reihe von Untergruppen von G, wobei der Index von $G_{(i+1)}H$ in $G_{(i)}H$ für $i \geq 0$ eine Primzahl oder gleich 1 ist. Wir erhalten damit einen Turm von Körpererweiterungen $F = F_0 \subseteq \tilde{F}_1 \subseteq ... \subseteq \tilde{F}_i \subseteq ... \subseteq \tilde{F}_n = L$, sodass $\tilde{F}_{i+1}/\tilde{F}_i$ total verzweigt von Primzahlgrad oder trivial ist.

Bemerkung 2.4.6. Sei E/F die maximale unverzweigte Teilerweiterung von L/F. Es gilt nach Bemerkung 2.3.8 $\psi_{L/F} = \psi_{L/E} = \psi_{\widehat{L}_{un}/\widehat{E}_{un}} = \psi_{\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un}}$. Wegen Bemerkung 2.4.5 und Satz 2.3.5 wird es im Folgenden häufig ausreichen, das Verhalten der Funktion ψ für zahm verzweigte und wild verzweigte Erweiterungen von Primzahlgrad zu betrachten.

Bemerkung 2.4.7. Wenn der Restklassenkörper von F endlich ist, dann ist die Galoisgruppe einer endlichen galoisschen Erweiterung L/F auflösbar (siehe [20, IV, § 2, Corollary 5 zu Proposition 7]). In diesem Fall müssen wir nicht zu lokalen Körpern mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper übergehen, sondern erhalten mit analogem Beweis wie in Bemerkung 2.4.5 für eine endliche Erweiterung E/F einen Turm aus zyklischen Erweiterungen von Primzahlgrad.

Lemma 2.4.8 (siehe III, Proposition 3.3 in [9]). *Sei L/F eine endliche Erweiterung.*

(i) Wenn L/F unverzweigt ist, gilt $\psi_{L/F} = \mathrm{id}$.

(ii) Wenn L/F zahm verzweigt mit $e(L/F) := l$ ist, gilt

$$\psi_{L/F}(x) = \begin{cases} x & x \leq 0, \\ lx & x \geq 0. \end{cases}$$

(iii) Wenn L/F total verzweigt von Grad p ist, gilt

$$\psi_{L/F}(x) = \begin{cases} x & x \leq s(L^n/L^t)l^{-1}, \\ s(L^n/L^t)(1-p)l^{-1} + px & x \geq s(L^n/L^t)l^{-1}, \end{cases}$$

wobei L^n die normale Hülle von L/F, L^t die maximale zahm verzweigte Teilerweiterung von L^n/F und $l := e(L^n/L)$ den Verzweigungsindex von L^n/L bezeichne.

Beweis. Sei L/F unverzweigt und sei L^n die normale Hülle von L/F. Sie E/F die maximale unverzweigte Teilerweiterung von L^n/F. Dann gilt $\psi_{L^n/F} = \psi_{L^n/E} = \psi_{L^n/L}$, also $\psi_{L/F} = \varphi_{L^n/L} \circ \psi_{L^n/F} = \mathrm{id}$.
Sei zunächst L/F total verzweigt von Primzahlgrad $l \neq p$. Nach Bemerkung 2.4.6können wir o.B.d.A. $F = \widehat{F}_{un}$ und $L = \widehat{L}_{un}$ annehmen. Dann enthält F eine primitive l-te-Einheitswurzel ζ (siehe [20, IV, §4, Proposition 16]). Sei $a \in L$ ein Element mit $F(a) = L$. Dann gilt $a^l \in L$ und a ist Nullstelle des Polynoms $X^l - a^l \in F[X]$. Nach [4, 4.8, Satz 3] ist nun L/F galoissch, also insbesondere eine zyklische verzweigte Erweiterung von Primzahlgrad $l \neq p$, und die Behauptung folgt damit aus (2.7). Für eine beliebige zahm verzweigte Erweiterung L/F benutzen wir Bemerkung 2.4.5.
Wenn schließlich L/F total verzweigt von Grad p ist, dann ist $[L^n : L]$ teilerfremd zu p. In der Tat: Wenn $a \in L$ ein Element mit $F(a) = L$ ist, dann sei $f \in F[X]$ das Minimalpolynom von a. Die normale Hülle L^n von L/F ist der Zerfällungskörper von f über F. Wenn $f(X) = (X - a)g(X)$ ist, dann ist L^n der Zerfällungskörper von g über L. Da der Grad von g gleich $p-1$ ist, ist der Grad der Körpererweiterung $[L^n : L] \leq (p-1)!$, also teilerfremd zu p.
Damit ist L^n/L zahm verzweigt. Es gilt dann $l = e(L^n/L) = e(L^t/F)$. Wir berechnen für $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
\psi_{L/F}(x) &= \varphi_{L^n/L} \circ \psi_{L^n/F}(x) \\
&= 1/l \cdot \psi_{L^n/F}(x) \\
&= 1/l \cdot \psi_{L^n/L^t}(\psi_{L^t/F}(x) \\
&= 1/l \cdot \psi_{L^n/L^t}(l \cdot x),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung mit der Formel für den galoisschen Fall (2.7) folgt. □

Lemma 2.4.9. *Sei L/F eine endliche Erweiterung. Dann gilt*

(i) $\psi_{L/F}$ ist stetig, stückweise linear, streng monoton steigend und konvex.

(ii) Die Steigungen von $\psi'_{L/F}$ sind ganzzahlig.

(iii) Es gilt $\psi_{L/F}(x) \leq e(L/F)x$ für alle $x \geq -1$.

Beweis. Nach Definition gilt $\psi_{L/F} = \varphi_{L^n/L} \circ \psi_{L^n/F}$, wobei L^n die normale Hülle von L/F sei.
Da $\varphi_{L^n/L}$ und $\psi_{L^n/F}$ stetig, streng monoton steigend und stückweise linear sind, gilt selbiges auch für $\psi_{L/F}$. Die restlichen Aussagen folgen aus Lemma 2.4.8 zusammen mit Bemerkung 2.4.5. □

Bemerkung 2.4.10. Für eine endliche galoissche Erweiterung L/F mit Galoisgruppe G sagen wir, dass L/F einen *unteren Sprung* an der Stelle u für eine Zahl $u \geq -1$ hat, wenn $G_u \neq G_{u+1}$ gilt. Analog hat L/F einen *oberen Sprung* an der Stelle $u \geq -1$, wenn $G^u \neq G^{u+\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Lemma 2.4.11. *Sei F'/F eine zyklische total verzweigte Erweiterung von Grad p. Sei L/F eine zu F'/F linear disjunkte endliche Erweiterung. Dann gilt*

$$s(F'L/L) \leq \psi_{F'L/F'}(s(F'/F)).$$

(Dabei setzen wir, falls $F'L/L$ unverzweigt ist, $s(F'L/L) = 0$.)

Beweis. Zur Veranschaulichung:

$$\begin{array}{ccc} F' & \text{——} & F'L \\ | & & | \\ F & \text{——} & L \end{array}$$

Es gilt nach Lemma 2.3.5

$$\psi_{F'L/F} = \psi_{F'L/F'} \circ \psi_{F'/F} = \psi_{F'L/L} \circ \psi_{L/F}. \tag{2.8}$$

Wir nehmen zunächst an, dass L/F galoissch ist. Dann ist auch $F'L/F$ galoissch, und wir setzen $G = \mathrm{Gal}(F'L/F), H = \mathrm{Gal}(F'L/L)$ und $I = \mathrm{Gal}(F'L/F')$.

Fall 1

Wir nehmen an, dass L/F unverzweigt ist. Aufgrund der Multiplikativität des Verzweigungsindex' und da $[F'L : L] = p$ gilt, ist auch $F'L/F'$ unverzweigt. Dann ist $\psi_{L/F} = \psi_{F'L/F'} = \mathrm{id}$. Mit (2.8) folgt $\psi_{F'L/L} = \psi_{F'/F}$, und somit

$$s(F'L/L) = s(F'/F) = \psi_{F'L/F'}(s(F'/F))$$

Fall 2

Wir nehmen an, dass L/F total verzweigt von Primzahlgrad $l \neq p$ ist. Dann gilt $\psi_{L/F}(x) = l \cdot x$ nach Lemma 2.4.8 und ebenso $\psi_{F'L/F'}(x) = l \cdot x$ für $x \geq 0$, denn ähnlich wie oben sieht man, dass $F'L/F'$ total verzweigt von Grad l ist. Also gilt nach Lemma 2.3.5

$$l \cdot \psi_{F'/F}(x) = \psi_{F'L/F'}(\psi_{F'/F}(x)) = \psi_{F'L/F}(x) = \psi_{F'L/L}(lx) \qquad \text{für } x \geq 0.$$

Der Graph von $\psi_{F'L/L}(lx)$ hat also einen Knick an der Stelle $x = s(F'/F)$, das heißt

$$s(F'L/L) = l \cdot s(F'/F) = \psi_{F'L/F'}(s(F'/F)).$$

Fall 3

Wir nehmen an, dass L/F total verzweigt von Grad p ist.

Fall 3a[3]: Wir nehmen an, dass $s(L/F) < s(F'/F)$ gilt. Dann hat $F'L/F$ zwei verschiedene untere Sprünge $0 < s_1 < s_2$. In der Tat:

[3]Der Beweis stammt aus [11].

Es gilt $\mathrm{Gal}(L/F) = G/H$ und $\mathrm{Gal}(F'/F) = G/I$. Die Erweiterung $F'L/F$ hat mindestens einen unteren Sprung, da andernfalls $G_u = \{1\}$ für alle $u > 0$ gelten würde. Aber aus $s(L/F) < s(F'/F)$ (d.h. $s(F'/F) \geq 1$) folgt $\mathrm{Gal}(F'/F)^u = G^u I/I \neq \{1\}$ für $u \leq 1$, also auch $G^u \neq \{1\}$ und damit $G_u \neq \{1\}$. Also hat $F'L/F$ mindestens einen unteren Sprung.
Angenommen, $F'L/F$ hat genau einen unteren Sprung an der Stelle s. Da dann nach Lemma 2.3.6 der Sprung von L/F durch den Sprung von $F'L/F$ bestimmt wird, folgt $s(L/F) = s$. Analog hat F'/F einen Sprung bei $s(F'/F) = s$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $s(F'/F) < s(L/F)$ ist. Insbesondere sind $F'L/L$ und $F'L/F'$ wieder total verzweigt.
Wir setzen nun $H' = G_{s_1+1}$ und $K' = F'L^{H'}$. Dann gilt nach Korollar 2.2.0.1

$$\mathrm{Gal}(K'/F)_i = \begin{cases} \mathrm{Gal}(K'/F) & i \leq s_1, \\ \{1\} & i > s_1. \end{cases}$$

Sei K''/F eine von K'/F verschiedene Erweiterung in $F'L/F$ von Grad p. Dann sind K'' und K' linear disjunkt. Setze $H'' = \mathrm{Gal}(F'L/K'')$. Dann gilt $F'L = K'K''$ und G ist ein semidirektes Produkt von H' und H''. Für ein Element σ aus H' gilt

$$i_{H'}(\sigma) = i_G(\sigma) = s_2 + 1.$$

Sei $\sigma_0 \in G \setminus H''$. Wir können $\sigma_0 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ mit $\sigma_1 \in H'$ und $\sigma_2 \in H''$ schreiben, das heißt $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \sigma_2^{-1} \in \sigma_0 H'' \cap H'$. Damit ist $\sigma_0 H'' \cap H'$ nichtleer. Die Gruppe H' enthält, nach Definition und da LF'/F genau zwei untere Sprünge hat, sämtliche Elemente $\sigma \in G$ mit $i_G(\sigma) = s_2 + 1$. Also haben wir insgesamt p solcher Elemente. Der Index von H'' in G ist ebenfalls p. Da die Nebenklassen $\sigma H''$ disjunkt sind, enthält $\sigma_0 H'' \cap H'$ somit genau ein Element τ. Für die übrigen Elemente $\sigma \in \sigma_0 H''$ gilt $i_G(\sigma) = s_1 + 1$. Somit gilt nach Satz 2.2.4

$$i_{G/H''}(\sigma_{0|K''}) = \frac{1}{p}((p-1) \cdot (s_1 + 1) + (s_2 + 1)) = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{p} + 1.$$

Damit gilt $s(K''/F) = s_1 + \frac{s_2 + s_1}{p}$. Da F'/F und L/F Erweiterungen von Grad p in $F'L/F$ sind, folgt aufgrund von $s(L/F) < s(F'/F)$ somit $s_1 = s(L/F)$ und $s(F'/F) = s(L/F) + \frac{s_2 - s(L/F)}{p}$, also

$$s_2 = s(L/F) + p(s(F'/F) - s(L/F)) = \psi_{L/F}(s(F'/F)).$$

Damit können wir nun $s(F'L/L)$ und $s(F'L/F')$ berechnen: Es gilt aufgrund von Lemma 2.2.3 $\{s(F'L/L), s(F'L/F')\} = \{s_1, s_2\}$. Wäre $s(L/F) = s_1 = s(F'L/L)$, hätte wegen (2.8) $\psi_{F'L/F}$ nur einen Knick, also hätte LF'/F nur einen unteren Sprung, was aber nicht der Fall ist. Also gilt $s(F'L/L) = s_2$ und damit $s(F'L/F') =$

s_1. Es gilt schließlich

$$\begin{aligned} s(F'L/L) &= \psi_{F'L/L}(s(F'L/L)) \\ &= \psi_{F'L/L}(\psi_{L/F}(s(F'/F))) \\ &= \psi_{F'L/F'}(\psi_{F'/F}(s(F'/F)) \\ &= \psi_{F'L/F'}(s(F'/F)) \end{aligned}$$

und

$$s(F'L/F') = \psi_{F'L/L}(s(F'L/F')) = \psi_{F'L/L}(s(L/F)),$$

wobei die erste Gleichheit aus $s(F'L/F') \leq s(F'L/L)$ folgt.
Fall 3b
Wir nehmen an, dass $s(L/F) = s(F'/F)$ gilt. Dann gilt $\psi_{L/F} = \psi_{F'/F}$ und $\varphi_{L/F} = \varphi_{F'/F}$. Weiterhin können wir $s(F'/F) < s(F'L/L)$ annehmen, da die Behauptung andernfalls klar ist. Insbesondere können wir davon ausgehen, dass sowohl $F'L/L$ als auch $F'L/F'$ total verzweigt sind.
Es gilt

$$\begin{aligned} \psi_{F'L/F'}(s(F'/F)+1) &= \psi_{F'L/F}(\varphi_{F'/F}(s(F'/F)+1)) \\ &= \psi_{F'L/L}(\psi_{L/F}(\varphi_{F'/F}(s(F'/F)+1))) \\ &= \psi_{F'L/L}(s(F'/F)+1) \\ &= s(F'/F)+1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus $s(F'/F) < s(F'L/L)$ (d.h. $s(F'/F)+1 \leq s(F'L/L)$) folgt. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \psi_{F'L/F'}(s(F'/F))+1 &= \psi_{F'L/F'}(\psi_{F'/F}(s(F'/F))+1 \\ &= \psi_{F'L/F}(s(F'/F))+1 \\ &= \psi_{F'L/L}(\psi_{F/L}(s(F'/F)))+1 \\ &= \psi_{F'L/L}((s(F'/F))+1 \\ &= s(F'/F)+1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wieder aus der Annahme $s(F'/F) < s(F'L/L)$ folgt. Also gilt $\psi_{F'L/F'}(s(F'/F)+1) = \psi_{F'L/F'}(s(F'/F))+1$.
Weiterhin gilt

$$\{1\} = \mathrm{Gal}(F'/F)_{s(F'/F)+1} = (G/I)_{s(F'/F)+1} = G_{\psi_{F'L/F'}(s(F'/F)+1)}I/I,$$

das heißt

$$G_{\psi_{F'L/F'}(s(F'/F)+1)} = G_{\psi_{F'L/F'}(s(F'/F))+1} \subseteq I. \tag{2.9}$$

Wir zeigen nun, dass

$$H_{\psi_{F'L/F'}(s(F'/F))+1} = G_{\psi_{F'L/F'}(s(F'/F))+1} \cap H = \{1\}$$

gilt. Daraus folgt direkt $s(F'L/L) \leq \psi_{F'L/F'}(s(F'/F))$.
Sei also $\sigma \in G_{\psi_{F'L/F'}(s(F'/F))+1} \cap H$. Dann gilt nach (2.9) $\sigma \in H \cap I$. Aber da G ein semidirektes Produkt von H und I ist, folgt $\sigma = \mathrm{id}$.

Für eine beliebige endliche galoissche Erweiterung L/F folgt das Lemma schließlich per Induktion mit Lemma 2.4.3 und der Transitivität von ψ.
Sei nun L/F eine beliebige endliche Erweiterung. Nach Bemerkung 2.4.5 und 2.4.6 und da ψ transitiv ist, reicht es wieder aus, unverzweigte Erweiterungen, Erweiterungen von Primzahlgrad $l \neq p$ und Erweiterungen von Grad p zu betrachten (wenn $\widehat{F}'_{un}$ und $\widehat{L}_{un}$ nicht mehr über $\widehat{F}_{un}$ linear disjunkt sind, gilt, da $\widehat{F}'_{un}/\widehat{F}_{un}$ galoissch ist, $\widehat{F}'_{un} \subseteq \widehat{L}_{un}$ und die Behauptung ist klar).
Für unverzweigte Erweiterungen können wir genauso wie im galoisschen Fall argumentieren. Für eine verzweigte Erweiterung L/F von Primzahlgrad $l \neq p$ können wir aufgrund von Lemma 2.4.8 ebenfalls wie im galoisschen Fall argumentieren. Wenn letztendlich L/F verzweigt von Grad p ist, dann betrachten wir die normale Hülle L^n von L/F. Dann gilt $[L^n : L] = d$ für ein d mit $p \nmid d$, d.h. L^n/L ist zahm verzweigt. Sei $l := e(L^n/L)$. Dann gilt, indem wir das Lemma auf die Erweiterungen $F'L/L$ und L^n/L anwenden, $s(F'L/L) = 1/l \cdot s(F'L^n/L^n)$, und außerdem ist $\psi_{F'L/F'} = 1/l \cdot \psi_{F'L^n/F'}$. Damit folgt die Behauptung durch Anwenden des Lemmas auf die Erweiterung L^n/F. □

Bemerkung 2.4.12. Seien F'/F und L/F wie in Lemma 2.4.11, wobei wir zusätzlich vorraussetzen, dass wir L/F als Turm $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_i \subseteq ... \subseteq L$ schreiben können, wobei die F_{i+1}/F_i zyklische total verzweigte Erweiterungen von Grad p seien. Wir fordern zusätzlich, dass $s(F'/F) > s(F_{i+1}/F_i)$ für alle $i \geq 0$ gilt. Dann gilt $s(F'L/L) = \psi_{F'L/F'}(s(F'/F))$.

Beweis. Wir benutzen Fall $3a$ aus dem Beweis von Lemma 2.4.11 und Induktion nach i zusammen mit der Transitivität von ψ (Lemma 2.3.5). □

Bemerkung 2.4.13. In der Situation von Lemma 2.4.11 gilt

$$e(F'L/F') \leq e(L/F).$$

Beweis. Wenn L/F unverzweigt ist, dann gilt aufgrund der Multiplikativität des Verzweigungsindex' und da $[F'L : L] = p$ ist, $e(F'L/L) = p$ und $e(F'L/F') = 1 < p$. Wenn L/F total verzweigt von Primzahlgrad $l \neq p$ ist, folgt $e(F'L/F') = l = e(L/F)$. Wenn L/F total verzweigt von Grad p ist, dann gilt, da dann $[F'L : F] = p^2$ gilt, $e(F'L/F') \in \{1, p\}$, also ebenfalls $e(F'L/F') \leq e(L/F)$.
Sei L/F eine beliebige endliche Erweiterung. Nach Bemerkung 2.4.5 können wir $\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un}$ als Turm von zyklischen Erweiterungen von Primzahlgrad $\widehat{F}_{un} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq ... \subseteq L_i \subseteq ... \subseteq \widehat{L}_{un}$ schreiben, wobei $\widehat{F}'_{un} L_{i-1}$ entweder linear disjunkt zu

L_i über L_{i-1} oder in L_i enthalten ist (denn $\widehat{F}'_{un}L_{i-1}/L_{i-1}$ ist galoissch). Es gilt $e(\widehat{L}_{un}/\widehat{F}_{un}) = e(L/F)$ und ebenso für $e(F'L/F')$. Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.4.14. Wenn F ein lokaler Körper von Charakteristik 0 ist, dann ist F eine Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ von endlichem Verzweigungsindex. Da die Restklassenkörpercharakteristik von F nach Voraussetzung gleich p ist, gilt $\nu(p) > 0$, die Einschränkung von ν auf $\mathbb{Q}$ ist also zur p-adischen Bewertung äquivalent. Der Abschluss von $\mathbb{Q}$ in F ist also $\mathbb{Q}_p$. Der Verweigungsindex von $F/\mathbb{Q}_p$ ist endlich, da die Bewertung auf F diskret ist.

Satz 2.4.15 (siehe Chapter III, Section 2, Proposition 2.5 in [9])**.** *Sei* $f(X) = X^p - X - \alpha \in F[X]$ *ein Polynom mit* $\alpha \notin \mathfrak{o}_F$ *und* $p \nmid \nu_F(\alpha)$*. Außerdem sei* $\nu_F(\alpha) > -pe(F/\mathbb{Q}_p)/(p-1)$*, falls* $\mathrm{char}(F) = 0$*. Dann hat* $f(X)$ *eine Nullstelle* λ*, sodass* $L = F(\lambda)$ *eine zyklische verzweigte Erweiterung von Grad* p *über* F *ist. Außerdem gilt* $s(L/F) = -\nu_F(\alpha)$*.*

Beweis. Das Polynom $f(X)$ zerfällt nicht vollständig über F in Linearfaktoren, denn wäre $\lambda \in F$ eine Nullstelle von $f(X)$, dann wäre $\nu_F(\alpha) = \nu_F(\lambda^p - \lambda) = \min\{p\nu_F(\lambda), \nu_F(\lambda)\} = p\nu_F(\lambda)$ mit $\nu_F(\lambda) \in \mathbb{Z}$, was der Voraussetzung $p \nmid \nu_F(\alpha)$ widerspricht.
Sei λ eine Nullstelle von $f(X)$ in F^{sep} (da $f(X)$ separabel ist, finden wir eine solche). Setze $L = F(\lambda)$ und

$$g(Y) = (\lambda + Y)^p - (\lambda + Y) - \alpha = Y^p + \binom{p}{1}\lambda Y^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1}\lambda^{p-1}Y - Y.$$

Wenn $\mathrm{char}(F) = p$ ist, dann ist L/F eine zyklische Erweiterung von Grad p (siehe 4.8, Theorem 5 in [4]).
Wenn $\mathrm{char}(F) = 0$ ist, dann gilt aufgrund der Voraussetzung $-pe(F/\mathbb{Q}_p)/(p-1) < \nu_F(\alpha) = \nu_F(\lambda^p - \lambda) = p\nu_F(\lambda)$ und damit für $0 < i \leq p-1$

$$\begin{aligned}\nu_L(\binom{p}{i}\lambda^i) &= e(L/F)(\nu_F(\binom{p}{i}) + \nu_F(\lambda^i)) \\ &\geq e(L/F)(e(F/\mathbb{Q}_p) + \nu_F(\lambda^i)) \\ &> e(L/F)(e(F/\mathbb{Q}_p) - ie(F/\mathbb{Q}_p)/(p-1)) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Also gilt $g(Y) \in \mathfrak{o}_F[Y]$. Es ist $\bar{g}(Y) = Y^p - Y$ über $\bar{L}$. Da $\bar{g}(Y) = Y^p - Y = Y(Y-\bar{1})\cdot\ldots\cdot(Y-\bar{p}-\bar{1})$ über $\bar{L}$ vollständig in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, zerfällt $g(Y)$ aufgrund des Henselschen Lemmas über $\mathfrak{o}_L$ vollständig in Linearfaktoren. Damit zerfällt $f(X)$ über L vollständig in Linearfaktoren. Da $f(X)$ nicht über F in Linearfaktoren zerfällt, ist L/F also eine zyklische Erweiterung von Grad p.
Sei nun $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$ ein Erzeuger von $\mathrm{Gal}(L/F)$, sodass $\sigma(\lambda) - \lambda$ eine Nullstelle von $g(Y)$ ist, die kongruent zu 1 modulo (π_L) ist. Dann gilt $\nu_L(\sigma(\lambda) - \lambda) = 0$.

Wenn $p \nmid \nu_F(\alpha)$, dann folgt aus $p\nu_L(\lambda) = \nu_L(\lambda^p - \lambda) = \nu_L(\alpha) = e(L/F)\nu_F(\alpha)$, dass $e(L/F) = p$ gilt, also ist L/F total verzweigt. Schließlich gilt $s(L/F) = \nu_L(\sigma(\lambda)/\lambda - 1) = \nu_L(\sigma(\lambda) - \lambda) - \nu_L(\lambda) = -\nu_L(\lambda) = -\nu_L(\alpha)/p = -\nu_F(\alpha)$. $\square$

3 Tief verzweigte Körpererweiterungen

Wir setzen auch in diesem Kapitel grundsätzlich voraus, dass alle betrachteten Körpererweiterungen separabel sind, es sei denn, es handelt sich um Vervollständigungen von Körpern, wobei diese durch das Symbol $\hat{}$ gekennzeichnet werden.

3.1 Definition und einige Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden wir tief verzweigte Erweiterungen definieren und einige äquivalente Charakterisierungen nennen und beweisen. Dabei orientieren wir uns an [8]. Die folgenden Resultate stammen urpünglich für den Fall $F = \mathbb{Q}_p$ aus [16].

Satz 3.1.1 (siehe Theorem 1.1 in [8]). *Für eine Erweiterung $\mathcal{F}/F$ sind äquivalent:*

(i) Für jedes $m \geq -1$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}$, sodass $\psi_{E/F}(m)/e(E/F) < \varepsilon$ gilt.

(ii) Für jede zyklische total verzweigte Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ von Primzahlgrad und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilerweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist und $s(E'/E)/e(E/F) < \varepsilon$ gilt.

(iii) Für jede endliche Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist und $\nu(\mathcal{D}_{E'/E}) < \varepsilon$ gilt.

(iv) Für jede endliche Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ gilt $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$.

Bemerkung 3.1.2. Wenn (i) für eine Erweiterung $\mathcal{F}/F$ gilt, dann auch für $\mathcal{F}'/F$ und $\mathcal{F}/M$, wobei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine Erweiterung und M/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$ seien. Wenn $L/E/F$ endliche Erweiterungen sind und $\psi_{E/F}(m)/e(E/F) < \varepsilon$ gilt, dann gilt auch $\psi_{L/F}(m)/e(L/F) < \varepsilon$.

Beweis der Bemerkung. Die erste Aussage ist klar.
Sei M/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$ und seien $n \geq -1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden ein $m \geq -1$ mit $n = \psi_{M/F}(m)$. Sei E/F eine endliche Erweiterung mit

$\psi_{E/F}(m)/e(E/F) < \varepsilon$, dann gilt mit Lemma 2.3.5

$$\begin{aligned}\psi_{ME/M}(n)/e(ME/M) &= \psi_{ME/M}(\psi_{M/F}(m))/e(ME/M)\\ &= e(M/F)\cdot\psi_{ME/F}(m)/e(ME/F)\\ &= e(M/F)\cdot\psi_{ME/E}(\psi_{E/F}(m))/e(ME/F)\\ &\leq e(M/F)\cdot e(ME/E)\cdot\psi_{E/F}(m)/e(ME/F)\\ &< e(M/F)\cdot e(ME/E)\cdot\varepsilon\cdot e(E/F)/e(ME/F)\\ &= e(M/F)\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

Das zeigt die zweite Aussage.
Seien $L/E/F$ endliche Erweiterungen. Dann gilt nach Lemma 2.3.5 und Lemma 2.4.9

$$\psi_{L/F} = \psi_{L/E}\circ\psi_{E/F} \leq e(L/E)\psi_{E/F}.$$

Gilt also $\psi_{E/F}(m)/e(E/F) < \varepsilon$ für ein $m \geq -1$ und ein $\varepsilon > 0$, dann gilt, da der Verzweigungsindex multiplikativ ist, auch

$$\begin{aligned}\psi_{L/F}(m)/e(L/F) &\leq e(L/E)/e(L/F)\cdot\psi_{E/F}(m)\\ &= \psi_{E/F}(m)/e(E/F)\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1.3. Seien E/F eine endliche Erweiterung, E'/E eine zyklische verzweigte Erweiterung von Primzahlgrad und L/E eine zu E'/E linear disjunkte endliche Erweiterung:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & E'L \arrow[d, dash] \\ E \arrow[r, dash] & L \end{tikzcd}$$

Es gelte $s(E'/E)/e(E/F) < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}s(E'L/L)/e(L/F) &\leq \psi_{E'L/E'}(s(E'/E))/e(L/F)\\ &\leq e(E'L/E')s(E'/E)/e(L/F)\\ &\leq e(L/E)s(E'/E)/e(L/F)\\ &< e(L/F)\varepsilon/e(L/F)\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung aus Lemma 2.4.11 und die dritte Ungleichung aus Bemerkung 2.4.13 folgt. Es gilt $s(E'L/L)/e(L/F) \leq s(E'/E)/e(E/F)$ ist. Daraus folgt, dass, wenn $\mathcal{F}/F$ Eigenschaft (ii) erfüllt und F_1/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$ ist, $\mathcal{F}/F_1$ ebenfalls (ii) erfüllt.

Bemerkung 3.1.4. Wenn $\mathcal{F}/F$ Eigenschaft (i) erfüllt, dann gilt $e(\mathcal{F}/F) \to \infty$, das heißt es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$, sodass $e(E/F) \geq n$ gilt. In der Tat: Angenommen, es gäbe ein n, sodass $e(E/F) \leq n$ für alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$ gilt. Dann wäre, da $\psi_{E/F}(m) \geq m$ für alle $m \geq -1$ gilt,

$$\psi_{E/F}(m)/e(E/F) \geq m/n$$

für alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$ und alle $m \geq -1$, was Eigenschaft (i) widerspricht.
Eigenschaft (ii) impliziert ebenfalls $e(\mathcal{F}/F) \to \infty$. Angenommen, es gäbe ein n wie oben, dann sei E/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$ mit

$$e(E/F) = \max\{e(L/F) \mid L/F \text{ endliche Erweiterung in } \mathcal{F}/F\}.$$

Dann gilt für alle endlichen Erweiterungen L/E in $\mathcal{F}/F$ aufgrund der Multiplikativität des Verzweigungsindex' $e(L/E) = 1$. Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine zyklische verzweigte Erweiterung von Primzahlgrad und seien $L_2/L/E$ beliebige endliche Erweiterungen in $\mathcal{F}/E$, wobei wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E und damit auch über L und L_2 definiert ist. Dann gilt $s(L'/L)/e(L/F) = s(L_2'/L_2)/e(L_2/F) = s(E'/E)/e(E/F)$ (siehe Lemma 2.4.11, Fall 1). Wegen Bemerkung 3.1.3 kann nun (ii) nicht gelten.
Insbesondere ist $\mathcal{F}$ nichtdiskret bewertet.

Bemerkung 3.1.5 (siehe Lemma 2.12 in [16]). Wenn $\mathcal{F}/F$ Eigenschaft (ii) erfüllt, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Erweiterung E/F, sodass $p^n | e(E/F)$ gilt. In diesem Sinn ist $\mathcal{F}/F$ unendlich wild verzweigt.

Beweis der Bemerkung. Angenommen, es existiert ein n, sodass p^n die maximale p-Potenz ist, die $e(E/F)$ für eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$ teilt. Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine endliche Erweiterung und E/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$, sodass $p^n | e(E/F)$ gilt und $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E/F definiert ist. Dann sind alle endlichen Erweiterungen L/E in $\mathcal{F}/F$ zahm verzweigt, und wie im Beweis von Lemma 2.4.11 sieht man, dass $s(E'L/L)/e(L/F) = s(E'/E)/e(E/F)$ gilt. Das ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (ii). □

Bemerkung 3.1.6. Wenn (ii) für eine Erweiterung $\mathcal{F}/F$ gilt und $\mathcal{L}/\mathcal{F}$ eine zyklische verzweigte Erweiterung von Grad p ist, dann gilt (ii) auch für $\mathcal{L}/F$.

Beweis der Bemerkung. Wenn S ein lokaler Körper ist und T/S sowie R/S linear disjunkte zyklische verzweigte Erweiterungen von Grad p sind, dann folgt aus $s(R/S) < s(T/S)$ aus Lemma 2.4.11, Fall 3a, $s(RT/R) = ps(T/S) - (p-1)s(R/S)$ sowie $s(RT/T) = s(R/S)$. Wenn $s(R/S) = s(T/S)$ ist, gilt unter Benutzung von

Lemma 2.4.11

$$
\begin{aligned}
s(RT/R) &\leq \psi_{RT/T}(s(T/S)) \\
&= \psi_{RT/S}(s(T/S)) \\
&= \psi_{RT/R}(\psi_{R/S}(s(T/S)) \\
&= \psi_{RT/R}(s(T/S),
\end{aligned}
$$

und durch Anwenden von $\varphi_{RT/R}$ folgt, da $\varphi_{RT/R}(s(RT/R)) = s(RT/R)$ gilt und $\varphi_{RT/R}$ monoton steigend ist, $s(RT/R) \leq s(T/S)$.
Sei nun $\delta \in (0, (2p(p-1))^{-1})$. Sei E/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{L}/F$ nicht (ii) erfüllt. Dann gibt es eine zyklische verzweigte Erweiterung $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ von Grad p und ein $\varepsilon' > 0$, sodass für jede endliche Erweiterung P/F in $\mathcal{L}/F$, sodass $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ über P definiert ist, $s(P'/P)/e(P/F) \geq \varepsilon'$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ das Infimum aller $s(QP'/Q)/e(Q/F)$, wobei Q/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{L}/F$ ist. Indem wir P falls nötig vergrößern, können wir annehmen, dass für alle solche Q die Gleichung $\varepsilon \leq s(QP'/Q)/e(Q/F) < c\varepsilon$ gilt, wobei c eine reelle Zahl mit $1 < c < p$ und $(c-1)\varepsilon < p^{-1} - p^{-2}$ ist. Außerdem können wir annehmen, dass P/E eine zyklische total verzweigte Erweiterung ist, die zu $\mathcal{F}/E$ linear disjunkt ist.
Sei R/E eine zyklische total verzweigte Erweiterung von Grad p mit $s(R/E) > pe(E/F)/(p-1)$ und $s(R/E) \neq s(P/E)$. Eine solche finden wir mit Satz 2.4.15 und indem wir in Charakteristik 0 falls nötig F durch eine geeignete endliche Erweiterung F_1/F in $\mathcal{F}/F$ ersetzen, sodass $e(F_1/\mathbb{Q}_p)$ hinreichend groß wird, also sodass die Differenz $pe(E/\mathbb{Q}_p)/(p-1) - pe(E/F_1)(p-1)$ mindestens 5 beträgt und wir somit eine ganze Zahl $pe(E/F_1)(/p-1) < s < pe(E/\mathbb{Q}_p)/(p-1)$ finden, die ungleich $s(PEF_1/EF_1)$ ist und nicht von p geteilt wird. $\mathcal{F}/F$ erfüllt (ii) genau dann, wenn $\mathcal{F}/F_1$ dies tut.[1]
Dann sind R/E und P/E linear disjunkt. Es gilt außerdem $s(RP/P) \geq s(R/E)$. Wir nehmen an, dass R/E eine Teilerweiterung von $\mathcal{F}/E$ ist. Falls dann $s(RP/P) \geq s(P'/P)$ gilt, ist $s(RP'/RP)/e(RP/F) \leq p^{-1}s(P'/P)/e(P/F)$, was ein Widerspruch zu $c < p$ ist. Andererseits folgt aus $s(RP/P) < s(P'/P)$ aber

$$
\begin{aligned}
(c-1)\varepsilon &> s(P'/P)/e(P/F) - s(RP'/RP)/e(RP/F) \\
&= (1-p^{-1})s(RP/P)/e(P/F) \\
&> (1-p^{-1}) \cdot p^{-1} \\
&= p^{-1} - p^{-2},
\end{aligned}
$$

was der Wahl von c widerspricht. Dabei folgt die letzte Ungleichung aus

$$\frac{s(RP/P)}{e(P/F)} \geq \frac{s(R/E)}{e(P/F)} > \frac{pe(E/F)}{(p-1)e(P/F)} = \frac{1}{p-1} > \frac{1}{p}.$$

Also ist R/E zu $\mathcal{F}/E$ linear disjunkt.
Wir finden eine endliche Erweiterung K/E in $\mathcal{F}/F$, sodass $s(KR/K)/e(K/F) < \delta$

[1] Im Folgenden schreiben wir weiterhin E und F anstatt EF_1 und F_1.

gilt, indem wir (ii) auf $\mathcal{F}R/\mathcal{F}$ anwenden. Setze $V := KP$. Durch Übergang zu lokalen Körpern mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper (siehe Lemma 2.2.6) können wir die Erweiterung V/P mit Lemma 2.4.5 als Turm von verzweigten Erweiterungen $P_{i+1}/P_i, 1 \le i \le n$, von Primzahlgrad schreiben (dabei ist $P = P_1$ und $P_n = V$). Wir können dabei o.B.d.A. davon ausgehen, dass alle diese Erweiterungen von Grad p sind. Außerdem gehen wir davon aus, dass eine verzweigte Erweiterung K_1/K in $\mathcal{F}/K$ von Grad p existiert, und setzen $P_{n+1} = PK_1$. Wir können beide Annahmen machen, da Eigenschaft (ii) für $\mathcal{F}/F$ gilt und indem wir E falls nötig durch eine endliche zahm verzweigte Erweiterung von E in $\mathcal{F}/F$ ersetzen (nach Lemma 2.4.11, Fall 2, sind die Voraussetzungen an $S(R/E)$ und $s(P/E)$ dann weiterhin erfüllt).
Wir bezeichnen mit P_{i+1}^n die normale Hülle von P_{i+1}/P_i und mit P_{i+1}^t die maximale zahm verzweigte Teilerweiterung von P_{i+1}^n/P_i. Wir setzen $l_i = e(P_{i+1}^t/P_i) = e(P_{i+1}^n/P_{i+1})$, $s_i := s(P_{i+1}^n/P_{i+1}^t)$ und $s_i' = s(RP_i/P_i)$ (falls $RP_i = P_i$ ist, setzen wir $s_i' = 0$). Es ist l_i teilerfremd zu p und es gilt nach Lemma 2.4.11, Fall 2, $s(RP_{i+1}^t/P_{i+1}^t) = l_i \cdot s_i'$ und $s_{i+1}' = s(RP_{i+1}^n/P_{i+1}^n)/l_i$.

$$\begin{tikzcd}
P_2^n \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & RP_2^n \arrow[d, dash] \\
P_2^t \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & RP_2^t \arrow[d, dash] \\
P = P_1 \arrow[r, dash] & RP
\end{tikzcd}$$

Falls nun $s_1 \ge l_1 \cdot s_1' = l_1 \cdot s(RP/P)$ gilt, ist

$$\begin{aligned}
s_1/e(P/F) &\ge l_1 \cdot s_1'/e(P/F) \\
&\ge l_1 \cdot s(R/E)/e(P/F) \\
&> l_1 \cdot pe(E/F)/((p-1)e(P/F)) \\
&> l_1/p,
\end{aligned}$$

also $s_1/(l_1 e(P/F)) > 1/p$.
Wenn hingegen $s_1 < l_1 s_1'$ ist, gilt $l_1 s_2' = s(RP_2^n/P_2^n) = pl_1 s_1' - (p-1)s_1$, also $s_2' = ps_1' - (p-1)/l_1 \cdot s_1$. Wenn nun ein $2 \le m < n$ existiert, sodass $s_i < l_i s_i'$ für $i \le m-1$ und $s_m \ge l_m s_m'$ gilt, dann ist

$$s_m' = p^{m-1} s_1' - (p-1) \sum_{i=0}^{m-2} \frac{p^i \cdot s_{m-1-i}}{l_i}.$$

Dann berechnen wir

$$
\begin{aligned}
s_1' &= s_m'/p^{m-1} + (p-1)/p^{m-1} \cdot \sum_{i=0}^{m-2} \frac{p^i \cdot s_{m-1-i}}{l_i} \\
\Leftrightarrow s_1'/e(P/F) &= (s_m'/p^{m-1} + (p-1)/p^{m-1} \cdot \sum_{i=0}^{m-2} \frac{p^i \cdot s_{m-1-i}}{l_i}) \cdot \frac{1}{e(P/F)} \\
\Leftrightarrow s_1'/e(P/F) &= s_m'/e(P_m/F) + (p-1)/p \cdot \sum_{i=0}^{m-2} \frac{s_{m-1-i}}{l_i \cdot e(P_{m-1-i}/F)} \\
&= s_m'/e(P_m/F) + (1-p^{-1}) \cdot \sum_{i=0}^{m-2} \frac{s_{m-1-i}}{l_i \cdot e(P_{m-1-i}/F)}.
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
(1-p^{-1}) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{s_i}{l_i e(P_i/F)} + \frac{s_m}{l_m \cdot e(P_m/F)} \geq \frac{s(R/E)}{p \cdot e(E/F)},
$$

also

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{l_i \cdot e(P_i/F)} &\geq \frac{s(R/E)}{p \cdot e(E/F)} + p^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i}{l_i \cdot e(P_i/F)} \\
&= p^{-1}(\frac{s(R/E)}{e(E/F)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i}{l_i \cdot e(P_i/F)}) \\
&> p^{-1}(\frac{pe(E/F)}{(p-1)e(E/F)}) \\
&= p^{-1} \cdot \frac{p}{p-1} \\
&> \frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

Wenn andererseits $s_i < l_i s_i'$ für alle $i \leq n$ gilt, dann ist

$$
s_n' = p^{n-1}s_1' - (p-1)\sum_{i=0}^{n-2} p^i/l_i s_{n-1-i} < e(P_n/F) \cdot \delta,
$$

wobei die Ungleichung aus

$$
s_n'/e(P_n/F) = s(VR/V)/e(P_n/F) \leq s(KR/K)/e(K/F) < \delta
$$

folgt. Wir haben $s_1' = s_n'/p^{n-1} + (p-1)/p^{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} p^i/l_i \cdot s_{n-1-i}$. Wir erhalten

$$
(1-p^{-1}) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i}{l_i \cdot e(P_i/F)} + \delta \geq \frac{s_1'}{p \cdot e(E/F)}
$$

und wegen $\delta < (2p(p-1))^{-1}$ gilt

$$(1-p^{-1})\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s_i}{l_i e(P_i/F)} + (2p(p-1))^{-1} \geq \frac{s(R/E)}{p\cdot e(E/F)},$$

also

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s_i}{l_i e(P_i/F)} &\geq p^{-1}(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s_i}{l_i e(P_i/F)} + \frac{s(R/E)}{e(E/F)}) - (2p(p-1))^{-1}\\ &> p^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s_i}{l_i e(P_i/F)} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2p(p-1)}\\ &> \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{2p-1}{2p(p-1)}\\ &= \frac{1}{p}\cdot\frac{2p-1}{2(p-1)} > \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{l_i e(P_i/F)} > p^{-1}.$$

Nun setzen wir $P_i' = P_iP'$ und $r_i = s(P_i'/P_i)$. Wenn $s_i \geq l_i r_i$ für ein $1 \leq i \leq n$ ist, dann gilt $s(P_{i+1}^n P'/P_{i+1}^n) \leq l_i r_i$, also $r_{i+1} \leq r_i$.

$$\begin{array}{ccc} P_{i+1}^n & — & P_{i+1}^n P' \\ | & & | \\ P_{i+1}^t & — & P_{i+1}^t P' \\ | & & | \\ P_i & — & P_i P' \end{array}$$

Daraus folgt $r_{i+1}/e(P_{i+1}/F) \leq p^{-1} r_i/e(P_i/F)$. Das ist ein Widerspruch zu $c < p$. Wenn andererseits $s_i < l_i r_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, haben wir $r_{i+1}/e(P_{i+1}/F) = r_i/e(P_i/F) - (1-p^{-1})s_i/(l_i e(P_i/F)$ für alle i. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(c-1)\varepsilon &> s(P'/P)/e(P/F) - s(P_{n+1}'/P_{n+1})/e(P_{n+1}/F)\\ &= (1-p^{-1})\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{l_i\cdot e(P_i/F)}\\ &> (p-1)p^{-2} = p^{-1} - p^{-2}.\end{aligned}$$

Das ist ebenfalls ein Widerspruch zur Wahl von c. Also muss Eigenschaft (ii) für $\mathcal{L}/F$ gelten. □

Bemerkung 3.1.7. Unter der Annahme, dass (i) nicht gilt, finden wir eine endliche Erweiterung M/F in $\mathcal{F}/F$ und ein $m \geq -1$, sodass $\psi'_{E/M}(x) = e(E/M)$ für alle endlichen Erweiterungen E/M mit $E \subseteq \mathcal{F}$ und $x \geq \psi_{M/F}(m)$ gilt.

Beweis der Bemerkung. Wenn (i) nicht gilt, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $m > -1$, sodass

$$\psi_{E/F}(m)/e(E/F) \geq \varepsilon$$

für jede endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$ gilt. Da $\psi_{E/F}(x) \leq 0$ für $x \leq 0$ ist, gilt $m > 0$.
Sei o.B.d.A. $\varepsilon = \inf\{\delta \,|\, \psi_{E/F}(m) = \delta e(E/F)$ und E/F endlich$\}$. Sei M/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$ mit $\psi_{M/F}(m) = \varepsilon' e(M/F)$ für ein $\varepsilon' \geq \varepsilon$. Für eine endliche Erweiterung L/M gilt

$$\begin{aligned}\psi_{L/F}(m) &= \psi_{L/M}(\psi_{M/F}(m)) \\ &\leq e(L/M) \cdot \psi_{M/F}(m) \\ &= e(L/M) \cdot \varepsilon' \cdot e(M/F) \\ &= e(L/F) \cdot \varepsilon,\end{aligned}$$

das heißt es gilt $\psi_{L/F} = \varepsilon'' e(L/F)$ mit einem $\varepsilon \leq \varepsilon'' \leq \varepsilon'$. Wir wählen M nun so groß, dass $\varepsilon'/\varepsilon < p$ gilt.
Da für zahm verzweigte endliche Erweiterungen E/M nach Lemma 2.4.9 sowieso $\psi'_{E/M}(x) = e(E/M)$ für $x > 0$ gilt, betrachten wir verzweigte Erweiterungen von Grad p.
Sei also E/M eine verzweigte Erweiterung von Grad p mit $E \subseteq \mathcal{F}$. Wenn E^n die normale Hülle von E/M und E^t die maximale zahm verzweigte Teilerweiterung von E^n/M bezeichnen und $l := e(E^t/M)$ ist, gilt nach Lemma 2.4.8 $\psi_{E/M}(x) = 1/l \cdot \psi_{E^n/E^t}(lx)$. Falls $s := s(E^n/E^t) < \psi_{M/F}(m) \cdot l$ ist, ist $\psi_{E/M}$ bei $\psi_{M/F}(m)$ differenzierbar und es gilt $\psi'_{E/M}(\psi_{M/F}(m)) = p$. Andernfalls gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon \cdot e(E/F) &\leq \psi_{E/F}(m) \\ &= \psi_{E/M}(\psi_{M/F}(m)) \\ &= 1/l \cdot \psi_{E^n/E^t}(l \cdot \psi_{M/F}(m)) \\ &= 1/l \cdot l \cdot \psi_{M/F}(m) \\ &= \varepsilon' \cdot e(M/F),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\varepsilon \cdot e(E/F) &\leq e(M/F)\varepsilon' \\ \Leftrightarrow e(E/M) &\leq \varepsilon'/\varepsilon \\ \Leftrightarrow p &\leq \varepsilon'/\varepsilon.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt $\psi'_{E/M}(\psi_{M/F}(m)) = p$.
Sei dann E_1/E eine verzweigte Erweiterung von Grad p mit $E_1 \subseteq \mathcal{F}$. Wir erhalten mit analoger Argumentation wie oben, dass $\psi'_{E_1/E}(x) = e(E_1/E)$ für $x \geq \psi_{E/F}(m) = \psi_{E/M}(\psi_{M/F}(m))$ gilt. Mit der Kettenregel für Ableitungen erhalten wir $\psi_{E_1/M}(x) = e(E_1/M)$ für $x \geq \psi_{M/F}(m)$.
Für eine beliebige endliche Erweiterung E/M in $\mathcal{F}/F$ benutzen wir Lemma 2.4.5 und Bemerkung 2.4.6. Dabei beachten wir, dass, wenn

$$\psi_{\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}}(m)/e(\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}) \geq \varepsilon$$

gilt, selbiges auch für Zwischenkörper von $\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}$ gilt. In der Tat: Wenn L ein Zwischenkörper von $\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\psi_{\widehat{E}_{un}/L} \circ \psi_{L/\widehat{F}_{un}}(m) &= \psi_{\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}}(m)\\ &\geq \varepsilon \cdot e(\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}).\end{aligned}$$

Wäre nun $\psi_{L/\widehat{F}_{un}}(m) < \varepsilon e(L/\widehat{F}_{un})$, dann wäre

$$\begin{aligned}\psi_{\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}}(m) &= \psi_{\widehat{E}_{un}/L} \circ \psi_{L/\widehat{F}_{un}}(m)\\ &\leq e(\widehat{E}_{un}/L) \cdot \psi_{L/\widehat{F}_{un}}(m)\\ &< \varepsilon \cdot e(\widehat{E}_{un}/L) \cdot e(L/\widehat{F}_{un})\\ &= \varepsilon \cdot e(\widehat{E}_{un}/\widehat{F}_{un}).\end{aligned}$$

Wir können also zu $\widehat{E}_{un}/\widehat{M}_{un}$ übergehen und erhalten mit analoger Argumentation wie oben (und Induktion)

$$\begin{aligned}\psi'_{E/M}(x) &= \psi'_{\widehat{E}_{un}/\widehat{M}_{un}}\\ &= e(\widehat{E}_{un}/\widehat{M}_{un})\\ &= e(E/M)\end{aligned}$$

für alle endlichen Erweiterungen E/M mit $E \subseteq \mathcal{F}$ und $x \geq \psi_{\widehat{M}_{un}/\widehat{F}_{un}}(m) = \psi_{M/F}(m)$. Wir können dabei M auch durch eine beliebige endliche Erweiterung M_1/M in $\mathcal{F}/F$ ersetzen.

□

Beweis von Satz 3.1.1. $(i) \Rightarrow (ii)$:
Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine zyklische total verzweigte Erweiterung von Primzahlgrad l und E_0/F eine endliche Erweiterung, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E_0 definiert ist. Da $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ verzweigt ist, ist auch E_0'/E_0 verzweigt. Nach Bemerkung 3.1.2 gilt (i) ebenfalls für die Erweiterung $\mathcal{F}/E_0$. Sei also E/E_0 eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/E_0$ mit

$\psi_{E/E_0}(m)/e(E/E_0) < \varepsilon$ für $m = s(E_0'/E_0)$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $E' = EE_0'$

$$\begin{aligned} s(E'/E)/e(E/F) &\leq \psi_{E'/E_0'}(s(E_0'/E_0))/e(E/F) \\ &= \psi_{E'/E_0'}(\psi_{E_0'/E_0}(s(E_0'/E_0)))/e(E/F) \\ &= \psi_{E'/E_0}(s(E_0'/E_0))/e(E/F) \\ &= \psi_{E'/E}(\psi_{E/E_0}(s(E_0'/E_0)))/e(E/F) \\ &\leq e(E'/E) \cdot \psi_{E/E_0}(s(E_0'/E_0))/e(E/F) \\ &< l \cdot \varepsilon/e(E_0/F), \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung aus Satz 2.4.11 folgt. Mit Bemerkung 3.1.4 folgt *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*:
Wir nehmen an, dass *(i)* nicht gilt. Dann gibt es ein $m > 0$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $\psi_{E/F}(m)/e(E/F) \geq \varepsilon$ für alle endlichen Erweiterungen E/F gilt. Nach Bemerkung 3.1.7 finden wir eine endliche Erweiterung M/F in $\mathcal{F}/F$, sodass $\psi'_{E/M}(x) = e(E/M)$ für alle endlichen Erweiterungen E/M mit $E \subseteq \mathcal{F}$ und alle $x \geq \psi_{M/F}(m)$ gilt.

Behauptung. Es existiert ein Turm von Erweiterungen $M = L_0 \subseteq L_1 \subseteq ... \subseteq L_{n-1} \subseteq L_n$ für $n \geq 1$, wobei die L_i/L_{i-1} zyklische, verzweigte Erweiterungen von Grad p sind und

$$s(L_n/L_{n-1}) > \psi_{L_{n-1}/F}(m)$$

gilt.

Beweis der Behauptung. Wir wählen in Charakteristik p eine geeignete Artin-Schreier-Erweiterung L_1/L_0 (siehe Satz 2.4.15).
In Charakteristik 0 wählen wir, wenn wir L_{i-1} bereits konstruiert haben, ein Element $\alpha \in L_{i-1}$, sodass $\nu_{L_{i-1}}(\alpha)$ nicht von p geteilt wird und das

$$pe(L_{i-1}/\mathbb{Q}_p)/(2p-2) \leq -\nu_{L_{i-1}}(\alpha) < p \cdot e(L_{i-1}/\mathbb{Q}_p)/(p-1)$$

erfüllt. Dabei vergrößern wir M falls nötig, um mithilfe von Bemerkung 3.1.4 die Existenz eines solchen Elements sicherzustellen. Sei λ eine Nullstelle von $X^p - X - \alpha$. Wir setzen $L_i = L_{i-1}(\lambda)$ Dann gilt nach Satz 2.4.15

$$s(L_i/L_{i-1}) = -\nu_{L_{i-1}}(\alpha) \geq p \cdot e(L_{i-1}/\mathbb{Q}_p)/(2p-2).$$

Siehe auch Abbildung (3.2).
Wenn nun $\psi_{L_{i-1}/F}(m) \geq s(L_i/L_{i-1})$ gilt, dann ist mit (2.7) aus Kapitel 1

$$\begin{aligned} \psi_{L_i/F}(m)/e(L_i/\mathbb{Q}_p) &= \psi_{L_i/L_{i-1}}(\psi_{L_{i-1}/F}(m))/e(L_i/\mathbb{Q}_p) \\ &= (s(L_i/L_{i-1}) + p(\psi_{L_{i-1}/F}(m) - s(L_i/L_{i-1})))/e(L_i/\mathbb{Q}_p) \\ &= ((1-p)s(L_i/L_{i-1}) + p\psi_{L_{i-1}/F}(m))/(pe(L_{i-1}/\mathbb{Q}_p)) \\ &= ((1-p)s(L_i/L_{i-1})/p + \psi_{L_{i-1}/F}(m))/e(L_{i-1}/\mathbb{Q}_p) \\ &\leq \psi_{L_{i-1}/F}(m)/e(L_{i-1}/\mathbb{Q}_p) - 1/2. \end{aligned}$$

Iterativ erhalten wir (falls es kein $j < i$ mit $\psi_{L_{j-1}/F}(m) < s(L_j/L_{j-1})$ gibt)

$$\begin{aligned}\psi_{L_i/F}(m)/e(L_i/\mathbb{Q}_p) &\leq \psi_{M/F}(m)/e(M/\mathbb{Q}_p) - i/2\\ &\Leftrightarrow \psi_{L_i/F}(m) \leq e(L_i/\mathbb{Q}_p)\cdot(\psi_{M/F}(m)/e(M/\mathbb{Q}_p) - i/2)\\ &\Leftrightarrow \psi_{L_i/F}(m) \leq p^i(\psi_{M/F}(m) - e(M/\mathbb{Q}_p)\cdot i/2).\end{aligned}$$

Wir wählen n so groß, dass

$$pe(M/\mathbb{Q}_p)/(2p-2) > \psi_{M/F}(m) - (n-1)e(M/\mathbb{Q}_p)/2$$

gilt. Dann ist (falls es kein $j < n$ mit $\psi_{L_{j-1}/F}(m) < s(L_j/L_{j-1})$ gibt)

$$\begin{aligned}s(L_n/L_{n-1}) &\geq pe(L_{n-1}/\mathbb{Q}_p)/(2p-2)\\ &= p^n e(M/\mathbb{Q}_p)/(2p-2)\\ &> p^{n-1}(\psi_{M/F}(m) - (n-1)e(M/\mathbb{Q}_p)/2)\\ &\geq \psi_{L_{n-1}/F}(m).\end{aligned}$$

□

Behauptung. Sei E/M eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$. Dann ist EL_n/EL_{n-1} total verzweigt von Grad p und es gilt

$$s(EL_n/EL_{n-1}) = \psi_{EL_{n-1}/L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1})). \tag{3.1}$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] E \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & EL_i \arrow[r] \arrow[d] & EL_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & EL_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & EL_n \arrow[d] \\ M = L_0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & L_i \arrow[r] & L_{i+1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & L_{n-1} \arrow[r] & L_n \\ F \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Beweis der Behauptung. Wenn E/M zahm verzweigt ist, ist auch EL_{n-1}/L_{n-1} zahm verzweigt und (3.1) folgt wie im Beweis von Lemma 2.4.11 (Fall 1 und 2).
Sei E/M eine verzweigte Erweiterung von Grad p.
Wir können davon ausgehen, dass EL_{n-1}/L_{n-1} (und damit auch EL_i/L_i für $i \leq n-1$) total verzweigt ist. Wenn das nicht der Fall ist, ist EL_{n-1}/L_{n-1} unverzweigt und die Behauptung ist klar. Wir können insbesondere annehmen, dass EL_i linear disjunkt zu L_{i+1} über L_i für alle $i < n-1$ ist, da andernfalls $EL_{n-1} = L_{n-1}$ und $EL_n = L_n$ gilt.
Sei E^n die normale Hülle von E über M und E^t/M die maximale zahm verzweigte Teilerweiterung von E^n/M. Der Grad $[E^n : E]$ ist teilerfremd zu p. Deswegen ist E^n/E^t eine zyklische verzweigte Erweiterung von Grad p. Da EL_i/L_i total verzweigt von Grad p ist, gilt selbiges, da der Verzweigungsindex multiplikativ ist

und weil E^tL_i/L_i zahm verzweigt ist, auch für L_iE^n/L_iE^t für $i \leq n-1$. Setze $l := e(E^t/M) = e(E^n/E)$. Nach Wahl von M gilt, wenn $x \geq \psi_{M/F}(m)$ ist,

$$\begin{aligned} e(E/M) &= \psi'_{E/M}(x) \\ &= (\varphi_{E^n/E} \circ \psi_{E^n/M})'(x) \\ &= \psi'_{E^n/M}(x)/l, \end{aligned}$$

wobei die Differenzierbarkeit von $\psi_{E^n/M}$ an der Stelle x folgt daraus, dass $\psi_{E/M} = \psi_{E^n/M} \cdot 1/l$ an der Stelle x differenzierbar ist. Es folgt

$$\begin{aligned} e(E^n/M) &= \psi'_{E^n/M}(x) \\ &= (\psi_{E^n/E^t} \circ \psi_{E^t/M})'(x) \\ &= \psi'_{E^n/E^t}(\psi_{E^t/M}(x)) \cdot l, \end{aligned}$$

wobei ψ_{E^n/E^t} an der Stelle $\psi_{E^t/M}(x) = lx$ differenzierbar ist, da $\psi_{E^n/M} = \psi_{E^n/E^t} \circ \psi_{E^t/M}$ an der Stelle x differenzierbar ist.
Also gilt $\psi'_{E^n/E^t}(\psi_{E^t/M}(x)) = e(E^n/E^t)$ und damit $s(E^n/E^t) \leq \psi_{E^t/F}(m)$.
Wir zeigen jetzt per Induktion nach i, dass $s(L_{n-1}E^n/L_{n-1}E^t) \leq \psi_{L_{n-1}E^t/F}(m)$ gilt:
Wenn wir Lemma 2.4.11 auf das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} E^n & \text{——} & L_1E^n \\ | & & | \\ E^t & \text{——} & L_1E^t \end{array}$$

anwenden, erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} s(L_1E^n/L_1E^t) &\leq \psi_{L_1E^n/E^n}(s(E^n/E^t)) \\ &= \psi_{L_1E^n/E^t}(s(E^n/E^t)) \\ &\leq \psi_{L_1E^n/E^t}(\psi_{E^t/F}(m)) \\ &= \psi_{L_1E^n/F}(m) \\ &= \psi_{L_1E^n/L_1E^t}(\psi_{L_1E^t/F}(m)). \end{aligned}$$

Anwenden von $\varphi_{L_1E^n/L_1E^t}$ auf beide Seiten ergibt, da $\varphi_{L_1E^n/L_1E^t}(x) = x$ für $x \leq s(L_1E^n/L_1E^t)$ gilt und da $\varphi_{L_1E^n/L_1E^t}$ monoton steigend ist, $s(L_1E^n/L_1E^t) \leq \psi_{L_1E^t/F}(m)$. Gelte $s(L_{i-1}E^n/L_{i-1}E^t) \leq \psi_{L_{i-1}E^t/F}(m)$ nun für ein $i \leq n-1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s(L_iE^n/L_iE^t) &\leq \psi_{L_iE^n/E^nL_{i-1}}(s(L_{i-1}E^n/L_{i-1}E^t)) \\ &= \psi_{L_iE^n/L_{i-1}E^n}(\psi_{L_{i-1}E^n/L_{i-1}E^t}(s(L_{i-1}E^n/L_{i-1}E^t))) \\ &= \psi_{L_iE^n/L_{i-1}E^t}(s(L_{i-1}E^n/L_{i-1}E^t)) \\ &\leq \psi_{L_iE^n/L_{i-1}E^t}(\psi_{L_{i-1}E^t/F}(m)) \\ &= \psi_{L_iE^n/F}(m) \\ &= \psi_{L_iE^n/L_iE^t}(\psi_{L_iE^t/F}(m)). \end{aligned}$$

Anwenden von $\varphi_{L_iE^n/L_iE^t}$ ergibt nun wieder $s(L_iE^n/L_iE^t) \leq \psi_{L_iE^t/F}(m)$. Das zeigt $s(L_{n-1}E^n/L_{n-1}E^t) \leq \psi_{L_{n-1}E^t/F}(m)$.

Dann gilt nach Konstruktion von L_n/L_{n-1}

$$\begin{aligned} s(L_{n-1}E^n/L_{n-1}E^t) &\leq \psi_{L_{n-1}E^t/F}(m) \\ &= \psi_{L_{n-1}E^t/L_{n-1}} \circ \psi_{L_{n-1}/F}(m) \\ &= l \cdot \psi_{L_{n-1}/F}(m) \\ &< l \cdot s(L_n/L_{n-1}) \\ &= s(L_nE^t/L_{n-1}E^t). \end{aligned}$$

Wir wenden Lemma 2.4.11, Fall $3a$ auf das Quadrat

$$\begin{tikzcd} L_nE^t \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L_nE^n \arrow[d, dash] \\ L_{n-1}E^t \arrow[r, dash] & L_{n-1}E^n \end{tikzcd}$$

an. Es folgt, dass $L_nE^n/L_{n-1}E^n$ total verzweigt von Grad p ist und dass

$$\begin{aligned} s(L_nE^n/L_{n-1}E^n) &= \psi_{L_nE^n/L_nE^t}(s(L_nE^t/L_{n-1}E^t)) \\ &= \psi_{L_nE^n/L_{n-1}E^t}(s(L_nE^t/L_{n-1}E^t)) \\ &= \psi_{L_nE^n/L_{n-1}E^n}(\psi_{L_{n-1}E^n/L_{n-1}E^t}(s(L_nE^t/L_{n-1}E^t)), \end{aligned}$$

gilt. Damit folgt durch Anwenden von $\varphi_{L_nE^n/L_{n-1}E^n}$,

$$s(E^nL_n/E^nL_{n-1}) = \psi_{E^nL_{n-1}/L_{n-1}E^t}(s(L_nE^t/L_{n-1}E^t)).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} l \cdot s(EL_n/EL_{n-1}) &= s(E^nL_n/E^nL_{n-1}) \\ &= \psi_{E^nL_{n-1}/L_{n-1}E^t}(s(L_nE^t/L_{n-1}E^t)) \\ &= \psi_{E^nL_{n-1}/L_{n-1}}(\varphi_{L_{n-1}E^t/L_{n-1}}(s(L_nE^t/L_{n-1}E^t))) \\ &= \psi_{E^nL_{n-1}/L_{n-1}}(s(L_nE^t/L_{n-1}E^t)/l) \\ &= \psi_{E^nL_{n-1}/L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1})) \\ &= l \cdot \psi_{EL_{n-1}/L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1})), \end{aligned}$$

also

$$s(EL_n/EL_{n-1}) = \psi_{EL_{n-1}/L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1})).$$

Sei E/M eine beliebige endliche Erweiterung wie in der Behauptung. Nach Bemerkung 2.4.5 finden wir einen Turm von Körpererweiterungen

$$\widehat{M}_{un} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq ... \subseteq M_k = \widehat{E}_{un},$$

sodass M_{i+1}/M_i total verzweigt von Primzahlgrad ist.

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{E}_{un} \arrow[r, dash] \arrow[d, dotted, dash] & \ldots \arrow[r, dash] & \widehat{E}_{un}L_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dotted, dash] & \widehat{E}_{un}L_n \arrow[d, dotted, dash] \\
M_i \arrow[r, dash] \arrow[d, dotted, dash] & \ldots \arrow[r, dash] & M_iL_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dotted, dash] & M_iL_n \arrow[d, dotted, dash] \\
M_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \ldots \arrow[r, dash] & M_1L_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_1L_n \arrow[d, dash] \\
\widehat{M}_{un} = M_0 = L_0M_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \ldots \arrow[r, dash] & M_0L_{n-1} = \widehat{L}_{n-1,un} \arrow[r, dash] & M_0L_n = \widehat{L}_{n,un} \\
\widehat{F}_{un} & & &
\end{tikzcd}
$$

Nach Bemerkung 2.2.6 gilt $\psi_{E/M} = \psi_{\widehat{E}_{un}/\widehat{M}_{un}}$ und somit $\psi'_{\widehat{E}_{un}/\widehat{M}_{un}}(x) = e(E/M) = e(\widehat{E}_{un}/\widehat{M}_{un})$ für alle $x \geq \psi_{M/F}(m) = \psi_{\widehat{M}_{un}/\widehat{F}_{un}}(m)$. Insbesondere folgt mit der Kettenregel für Ableitungen $\psi'_{M_{i+1}/M_i}(x) = e(M_{i+1}/M_i)$ für $x \geq \psi_{M_i/\widehat{F}_{un}}(m)$. Außerdem gilt $s(L_n/L_{n-1}) = s(\widehat{L}_{n,un}/\widehat{L}_{n-1,un})$ und $\psi_{L_{n-1}/F} = \psi_{\widehat{L}_{n-1,un}/\widehat{F}_{un}}$. Wir können (zunächst im Fall $i = 1$) obige Argumentation wiederholen und erhalten

$$s(M_1L_n/M_1L_{n-1}) = \psi_{M_1L_{n-1}/\widehat{M}_{un}L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1})).$$

Gilt nun für ein i

$$s(M_iL_n/M_iL_{n-1}) = \psi_{M_iL_{n-1}/\widehat{M}_{un}L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1})),$$

dann ist

$$\begin{aligned}
s(M_iL_n/M_iL_{n-1}) &= \psi_{M_iL_{n-1}/\widehat{M}_{un}L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1}) \\
&> \psi_{M_iL_{n-1}/\widehat{M}_{un}L_{n-1}}(\psi_{L_{n-1}/F}(m)) \\
&= \psi_{M_iL_{n-1}/\widehat{M}_{un}L_{n-1}}(\psi_{\widehat{M}_{un}L_{n-1}/\widehat{F}_{un}}(m)) \\
&= \psi_{M_iL_{n-1}/\widehat{F}_{un}}(m).
\end{aligned}$$

Wir haben also einen Turm von Körpererweiterungen $M_i \subseteq M_iL_1 \subseteq \ldots \subseteq M_iL_{n-1} \subseteq M_iL_n$, sodass M_iL_n/M_iL_{n-1} zyklisch und verzweigt von Grad p mit $s(M_iL_n/M_iL_{n-1}) > \psi_{M_iL_{n-1}/\widehat{F}_{un}}(m)$ ist und M_iL_j/M_iL_{j-1} zyklisch und verzweigt von Grad p oder trivial ist für $j < n$.
Dann sehen wir analog wie oben und per Induktion nach i, dass $s(M_{i+1}L_{n-1}/M_iL_{n-1}) \neq$

$s(M_iL_n/M_iL_{n-1})$ für alle i gilt. Daraus folgt, dass $M_{i+1}L_n/M_{i+1}L_{n-1}$ total verzweigt (und nicht trivial) ist.
Es gilt außerdem mit analoger Argumentation wie oben und weil ψ transitiv ist

$$s(M_{i+1}L_n/M_{i+1}L_{n-1}) = \psi_{M_{i+1}L_{n-1}/\widehat{M}_{un}L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1}))$$

und insbesondere

$$s(\widehat{E}_{un}L_n/\widehat{E}_{un}L_{n-1}) = \psi_{\widehat{E}_{un}L_{n-1}/\widehat{L}_{n-1,un}}(s(L_n/L_{n-1})).$$

Damit folgt die Behauptung aus Bemerkung 2.4.6. $\square$

Mit (3.1) gilt nun

$$\begin{aligned} s(EL_n/EL_{n-1}) &= \psi_{EL_{n-1}/L_{n-1}}(s(L_n/L_{n-1}) \\ &> \psi_{EL_{n-1}/L_{n-1}}(\psi_{L_{n-1}/F}(m)) \\ &= \psi_{EL_{n-1}/F}(m) \\ &\geq \psi_{E/F}(m). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Insgesamt ist $\mathcal{L}' := \mathcal{F}L_n$ eine total verzweigte galoissche Erweiterung von Grad p über $\mathcal{L} := \mathcal{F}L_{n-1}$ (verzweigt, da für alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$ die Erweiterung EL_n/EL_{n-1} verzweigt ist). Es gilt

$$\begin{aligned} s(EL_n/EL_{n-1})/e(EL_{n-1}/F) &\geq \psi_{EL_{n-1}/F}(m)/e(EL_{n-1}/F) \\ &\geq \psi_{E/F}(m)/e(EL_{n-1}/F) \\ &\geq \varepsilon/e(EL_{n-1}/E) \\ &\geq \varepsilon/p^{n-1}. \end{aligned}$$

Damit gilt (ii) nicht für $\mathcal{L}/F$ nach Bemerkung 3.1.3. Aus Bemerkung 3.1.6 folgt, dass (ii) nicht für $\mathcal{F}/F$ gilt.

$(ii) \Rightarrow (iv)$:
Zunächst gehen wir von einer zyklischen total verzweigten Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ von Primzahlgrad l aus. Sei $x \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}$. Wir finden eine endliche Erweiterung E/F, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E/F definiert ist und $x \in E'$ gilt. Sei E_2/F eine endliche Erweiterung, über der $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ definiert ist und die

$$[(s(E_2'/E_2) + 1)(l-1) + 1))/l]/e(E_2/F) < \nu(x)$$

erfüllt. Eine solche existiert wegen (ii), Bemerkung 3.1.3 und da $e(\mathcal{F}/F) \to \infty$ gilt. Dann ist $\mathcal{F}/F$ auch über dem Kompositum EE_2 definiert mit $(EE_2)' = E'E_2$. Nach Bemerkung 3.1.3 und da der Verzweigungsindex multiplikativ ist, gilt

$$[(s(E'E_2)/EE_2) + 1)(l-1) + 1)/l]/e(EE_2/F) < \nu(x).$$

Aufgrund von Lemma 2.4.2 folgt nun $x \in \mathrm{Tr}_{(EE_2)'/EE_2}(\mathfrak{m}_{(EE_2)'})$ und damit $x \in \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'})$.
Sei nun $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine beliebige endliche galoissche Erweiterung. Falls eine endliche Erweiterung E/F, über der $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ definiert ist, existiert, sodass E'/E unverzweigt ist, ist auch E_2'/E_2 für alle endlichen Erweiterungen E_2/E unverzweigt, und da für eine unverzweigte Erweiterung E'/E und ein Primelement π_E von E' und E

$$\mathrm{Tr}_{E'/E}(\pi_E \mathfrak{o}_{E'}) = \pi_E \mathrm{Tr}_{E'/E}(\mathfrak{o}_{E'}) = \pi_E \mathfrak{o}_E = \mathfrak{m}_E$$

gilt, folgt $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$. Wir können also aufgrund der Transitivität der Spur o.B.d.A. davon ausgehen, dass E'/E total verzweigt ist.
Dann finden wir nach Lemma 2.4.3 eine Teilerweiterung E'/E_0' in E'/E, sodass E'/E_0' zyklisch von Primzahlgrad ist. Es ist $\mathcal{F}'/\mathcal{F}E_0'$ zyklisch von Primzahlgrad und verzweigt. Nach Bemerkung 3.1.2 gilt Eigenschaft (ii) für $\mathcal{F}E_0'/F$, also, wie gerade gesehen, auch (iv), das heißt $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}E_0'}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}E_0'}$. Im nächsten Schritt finden wir eine zyklische Erweiterung von Primzahlgrad E_0'/E_1' in E'/E. Dann ist auch $E_0'\mathcal{F}/E_1'\mathcal{F}$ zyklisch und total verzweigt von Primzahlgrad und es gilt $\mathrm{Tr}_{E_0'\mathcal{F}/E_1'\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{E_0'\mathcal{F}}) = \mathfrak{m}_{E_1'\mathcal{F}}$.
Iterativ und aufgrund der Transitivität der Spurabbildung erhalten wir $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$.
Für den Fall, dass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ nicht galoissch ist, betrachten wir die normale Hülle $\mathcal{F}^n$ von $\mathcal{F}'$ über $\mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{F}^n/\mathcal{F}'$ eine endliche Erweiterung und es gilt $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}^n/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}^n}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ und $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}^n/\mathcal{F}'}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}^n}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}$ nach Bemerkung 3.1.2 und dem oben Gezeigten. Da die Spurabbildung transitiv ist, folgt

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}^n/\mathcal{F}'}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}^n})) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}^n/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}.$$

$(iv) \Rightarrow (ii)$:
Angenommen, (ii) gilt nicht. Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine zyklische verzweigte Erweiterung von Primzahlgrad. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $s(E'/E)/e(E/F) \geq \varepsilon$ für alle endlichen Erweiterungen E/F, über denen $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ definiert ist, gilt. Es gilt $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \bigcup \mathrm{Tr}_{E'/E}(\mathfrak{m}_{E'})$, wobei die Vereinigung über alle endlichen Erweiterungen E/F, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E/F definiert ist, geht. Wir finden also für alle $x \in \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'})$ eine endliche Erweiterung E/F, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E/F definiert ist und $x \in \mathrm{Tr}_{E'/E}(\mathfrak{m}_{E'})$ gilt. Nach Lemma 2.4.2 gilt mit $s := s(E'/E)$ und $l := e(E'/E)$

$$\begin{aligned}
\nu(\mathrm{Tr}_{E'/E}(\mathfrak{m}_{E'})) &= (s(E'/E) + 1 + [-s/l])/e(E/F) \\
&\geq (s + 1 + (-s - l + 1)/l)/e(E/F) \\
&= (s(1 - 1/l) + 1/l))/e(E/F) \\
&\geq \varepsilon(1 - 1/l) + 1/(l \cdot e(E/F)) \\
&\geq \varepsilon(1 - 1/l).
\end{aligned}$$

Damit gilt $\nu(x) \geq \varepsilon(1 - 1/l)$ für alle $x \in \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'})$. Da die Bewertung auf $\mathcal{F}$ nichtdiskret ist, folgt $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) \neq \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$, Widerspruch zu (iv).

$(ii) \Rightarrow (iii)$:
Für eine zyklische verzweigte Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ von Primzahlgrad folgt (iii) ähnlich wie im Beweis für $(ii) \Rightarrow (iv)$ aus Lemma 2.4.1.
Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine galoissche endliche Erweiterung und gelte (ii). Sei E/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist. Sei $E = E_0 \subseteq ... \subseteq E_i \subseteq ... \subseteq E'$ ein Turm von Teilerweiterungen wie in Lemma 2.4.3, das heißt E_1/E ist unverzweigt und E_{i+1}/E_i ist total verzweigt von Primzahlgrad für $i \geq 1$. Setze $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}E_i$. Dann ist $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ zyklisch von Primzahlgrad für $i \geq 1$. Siehe Abbildung (3.4). Nach Bemerkung 3.1.2 gelten Bedingung (i) und damit Bedingung (ii) auch für $\mathcal{F}_1/F$. Wir finden also wie oben gesehen für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Erweiterung L in $\mathcal{F}_1/F$, sodass $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1$ über L definiert ist und $\nu(\mathcal{D}_{L'/L}) < \varepsilon$ gilt. (Dabei können wir davon ausgehen, dass $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1$ verzweigt ist, da wir andernfalls eine endliche Erweiterung L in $\mathcal{F}_1/F$ finden, sodass $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1$ über L definiert ist und L'/L unverzweigt ist. Aber die Bewertung der Differente einer unverzweigten Erweiterung ist sowieso gleich 0.)
Wir können dabei o.B.d.A. von $E \subseteq L$ und $L' = LE_2$ ausgehen (indem wir L, falls nötig, vergrößern, siehe Lemma 2.1.10). Setze $\tilde{L} = \mathcal{F} \cap L$. Dann ist $L/\tilde{L}$ unverzweigt und $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}$ ist über $\tilde{L}$ definiert mit $\tilde{L}E_2 = L'$. Aufgrund der Multiplikativität der Differente und da $\nu(\mathcal{D}_{L/\tilde{L}}) = 0$ ist, gilt $\nu(\mathcal{D}_{LE_2/\tilde{L}}) < \varepsilon$.
Iterativ und mit Lemma 2.1.10 erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilerweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$, über der $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ definiert ist und für die $\nu(\mathcal{D}_{E'/E}) < \varepsilon$ gilt. Für eine beliebige endliche Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ folgt die Behauptung aus dem Übergang zur normalen Hülle von $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ und der Multiplikativität der Differente.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{F}' \arrow[ddd, dash, dotted] \\
 & & \mathcal{F}_2 \arrow[ur, dash, dotted] & \\
 & \mathcal{F}_1 \arrow[ur, dash] & & \\
\mathcal{F} \arrow[ur, dash] \arrow[ddd, dash, dotted] & & & LE' \arrow[ddd, dash, dotted] \\
 & & LE_2 \arrow[ur, dash, dotted] & \\
 & L \arrow[ur, dash] & & \\
\tilde{L} \arrow[ur, dash] \arrow[ddd, dash, dotted] & & & E' \\
 & & E_2 \arrow[ur, dash, dotted] & \\
 & E_1 \arrow[ur, dash] & & \\
E \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & & & \\
F & & &
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$:
Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine zyklische verzweigte Erweiterung von Primzahlgrad l. Falls (ii) nicht gilt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$, über denen $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ definiert ist, $s(E'/E)/e(E/F) \geq \varepsilon$ gilt. Dann gilt für die Differente von E'/E nach Lemma 2.4.1

$$\begin{aligned}\nu(\mathcal{D}_{E'/E}) &= \nu_{E'}(\mathcal{D}_{E'/E})/e(E'/F) \\ &= (s(E'/E)+1)(l-1)/(e(E/F)l) \\ &= s(E'/E)/e/E/F) \cdot (1-1/l) + 1/e(E/F) \cdot (1-1/l) \\ &\geq \varepsilon \cdot (1-1/l) + 1/e(E/F) \cdot (1-1/l).\end{aligned}$$

Das ist das ein Widerspruch zu (iii).

□

Definition. Ein Erweiterung $\mathcal{F}/F$ heißt *tief verzweigt*, wenn sie die äquivalenten Bedingungen aus Satz 3.1.1 erfüllt. (Dabei setzen wir, den Voraussetzungen für dieses Kapitel entsprechend, selbstverständlich voraus, dass $\mathcal{F}/F$ separabel ist.)

Definition. Eine Erweiterung $\mathcal{F}/F$ hat *endlichen Führer*, wenn $\mathcal{F} \subseteq F^{(m)}$ für ein $m \geq -1$ gilt. (Dabei ist $F^{(m)}$ der Fixkörper der m-ten Verzweigungsgruppe G_F^m der absoluten Galoisgruppe von F.)

Bemerkung 3.1.8. $\mathcal{F}/F$ hat genau dann endlichen Führer, wenn $\mathcal{F}^n/F$ endlichen Führer hat, wobei $\mathcal{F}^n$ die normale Hülle von $\mathcal{F}/F$ sei. In der Tat: Wenn $\mathcal{F}^n \subseteq F^{(m)}$ gilt, dann ist sicherlich auch $\mathcal{F} \subseteq F^{(m)}$. Andersherum ist $F^{(m)}/F$ galoissch; wenn also $\mathcal{F} \subseteq F^{(m)}$ gilt, dann auch $\mathcal{F}^n \subseteq F^{(m)}$.

Lemma 3.1.9 (Lemma 2.8 in [16])**.** *Wenn $\mathcal{F}/F$ nicht endlichen Führer hat, finden wir für jedes $m \in [-1, \infty]$ und jede natürliche Zahl d eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$ mit $[E : E \cap F^{(m)}] \geq d$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F}/\mathcal{F} \cap F^{(m)}$ eine unendliche Erweiterung ist. Wenn dies nicht der Fall wäre, könnten wir $\mathcal{F}$ als Kompositum von $\mathcal{F} \cap F^{(m)}$ mit einer endlichen Erweiterung E/F schreiben. Es gilt aber $E \subseteq F^{(m')}$ für ein m', also wäre $\mathcal{F} \subseteq F^{(m'')}$ für ein m'', was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.
Wir finden also für jedes $d \in \mathbb{N}$ ein Element $x \in \mathcal{F}$, dessen Grad über $\mathcal{F} \cap F^{(m)}$ mindestens d beträgt. Dann gilt $[F(x) : F(x) \cap F^{(m)}] \geq d$. □

Lemma 3.1.10 (siehe Proposition 2.4 und 2.9 in [16])**.** *Sei $\mathcal{F}/F$ eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\mathcal{F}/F$ ist tief verzweigt.*

(ii) *$\mathcal{F}/F$ hat unendlichen Führer.*

(iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$ mit $\nu(\mathcal{D}_{E/F}) \geq \varepsilon$.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$:
Sei $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}/F$ endlichen Führer hat. Dann existiert ein $m \geq -1$, sodass $\mathcal{F} \subseteq F^{(m)}$ gilt. Seien E/F eine endliche Teilerweiterung von $\mathcal{F}/F$ und E^n die normale Hülle von E/F in $F^{(m)}$. Dann gilt $\mathrm{Gal}(E^n/F)^m = \{\mathrm{id}\}$, und damit ist, wenn wir m falls nötig etwas vergrößern, um Differenzierbarkeit sicherzustellen, $\psi'_{E^n/F}(m) = e(E^n/F)$ und $\psi'_{E/F}(m) = \varphi'_{E^n/E}(\psi_{E^n/F}(m)) \cdot \psi'_{E^n/F}(m) = e(E/F)$. Das ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (i) aus Satz 3.1.1, denn dann gilt für alle $n \geq m$, da der höchste obere Sprung von E/F kleiner oder gleich m ist,

$$\psi_{E/F}(n)/e(E/F) \geq m/e(E/F) + n - m.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$:
Wir zeigen Eigenschaft (iii) aus Satz 3.1.1.
Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine endliche Erweiterung. Wir können annehmen, dass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ galoissch ist; falls nicht, können wir zur normalen Hülle von $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ übergehen und die Multiplikativität der Differente ausnutzen.
Sei E/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist. Sei $E^{(m)}$ wieder die von $\mathrm{Gal}(F^{sep}/E)^m$ festgelassene Erweiterung von E. Sei L/E eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$. Dann gilt wegen der Multiplikativität der Differente

$$\nu(\mathcal{D}_{L'/L}) = \nu(\mathcal{D}_{L'/E}) - \nu(\mathcal{D}_{L/E}) \tag{3.5}$$

und wegen Lemma 2.3.9

$$\nu(\mathcal{D}_{L'/L}) = e(E/F)^{-1} \int_{-1}^{\infty} (\frac{1}{[L : L \cap E^{(m)}]} - \frac{1}{[L' : L' \cap E^{(m)}}])\mathrm{d}m. \tag{3.6}$$

Da E'/E eine endliche Erweiterung ist, gibt es ein m_0, sodass $E' \subseteq E^{(m_0)}$ gilt. Wir zeigen nun, dass

$$[L' : L' \cap E^{(m)}] = [L : L \cap E^{(m)}] \quad \text{für alle } m \geq m_0 \tag{3.7}$$

gilt. Wenn (3.7) gilt, dann ist der Integrand in (3.5) gleich 0 für $m \geq m_0$ und es gilt

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{D}_{L'/L}) &= e(E/F)^{-1} \int_{-1}^{m_0} (\frac{1}{[L : L \cap E^{(m)}]} - \frac{1}{[L' : L' \cap E^{(m)}}])\mathrm{d}m \\ &\leq e(E/F)^{-1} \int_{-1}^{m_0} (\frac{1}{[L : L \cap E^{(m)}})\mathrm{d}m. \end{aligned}$$

Es gilt $L \cap E^{(m)} \subseteq L \cap E^{(m_0)}$ für $m \leq m_0$ und damit

$$\nu(\mathcal{D}_{L'/L}) \leq (m_0 + 1)/(e(E/F)[L : L \cap E^{(m_0)}]).$$

Wegen Lemma 3.1.9 folgt daraus, dass $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt ist.
Um (3.7) zu zeigen, setzen wir

$$R(m) := L \cap E^{(m)}, \quad R'(m) := L' \cap E^{(m)}.$$

Da $E^{(m)}$ galoissch über E ist, sind L und $E^{(m)}$ linear unabhängig über $R(m)$. Also gilt $[L : R(m)] = [LR'(m) : R'(m)]$. Es gilt $LR(m)' \subseteq L'$. Andererseits gilt $E' \subseteq E^{(m)}$ für $m \geq m_0$. Damit gilt $L' = E'L \subseteq R'(m)L$. Das zeigt (3.7). Damit ist $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$:
Wir zeigen, dass $\mathcal{F}/F$ genau dann endlichen Führer hat, wenn es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, sodass $\nu(\mathcal{D}_{E/F}) \leq \varepsilon_0$ für alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$ gilt.
Sei $\mathcal{F} \subseteq F^{(m)}$ für ein $m \geq -1$. Dann gilt $E \subseteq F^{(m)}$ für alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$, und aus Lemma 2.3.9 folgt, dass $\nu(\mathcal{D}_{E/F})$ beschränkt ist.
Andersherum sei $\nu(\mathcal{D}_{E/F}) \leq \varepsilon_0$ für ein $\varepsilon_0 > 0$ und alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$. Sei E/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$, sodass $E \not\subseteq F^{(m)}$ für ein $m > 0$ (falls es derartige m und E/F nicht gibt, ist die Behauptung klar). Dann folgt aus Lemma 2.3.9 $\nu(\mathcal{D}_{E/F}) \geq m/2$, denn es ist $[E : E \cap F^{(m)}] \geq 2$. Also existiert ein $m \geq 0$, sodass $E \subseteq F^{(m)}$ für alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$ gilt. □

Beispiel. Sei $\mathbb{Q}_{p,n}$ die Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, die durch Adjungieren einer primitiven n-ten Einheitswurzel entsteht, mit $n = p^m$ für eine natürliche Zahl m. Dann ist $\mathbb{Q}_{p^\infty} := \bigcup_n \mathbb{Q}_{p,n}$ tief verzweigt, denn nach [20, IV, §4, Proposition 18] gilt $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p,n}/\mathbb{Q}_p)^{m-1} \neq \{1\}$. Das zeigt, dass $\mathbb{Q}_{p^\infty}$ unendlichen Führer hat.

Beispiel. Sei $(p^{1/p^n})_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{Q}_p^{alg}$ mit $(p^{1/p})^p = p$ und $(p^{1/p^n})^p = p^{1/p^{n-1}}$ für $n \geq 2$. Sei

$$F_n := \mathbb{Q}_p(p^{1/p^n}) \quad \text{und} \quad \mathcal{F} := \mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty}) := \bigcup_{n\geq 1} F_n.$$

Dann ist $f(X) = X^{p^n} - p$ das Minimalpolynom von p^{1/p^n} über $\mathbb{Q}_p$. Da $f(X)$ ein Eisenstein-Polynom ist, ist $F_n/\mathbb{Q}_p$ total verzweigt. Es gilt $[F_n : \mathbb{Q}_p] = p^n$. Außerdem ist $p^n\nu(p^{1/p^n}) = \nu((p^{1/p^n})^{p^n}) = \nu(p) = 1$, also ist $\nu(p^{1/p^n}) = 1/p^n$.
Damit ist p^{1/p^n} ist ein Primelement von F_n. Deswegen gilt $\mathfrak{o}_{F_n} = \mathbb{Z}_p[p^{1/p^n}]$. Nach [20, III, §6, Corollary 2 zu Lemma 2] gilt $\mathcal{D}_{F_n/\mathbb{Q}_p} = (f'(p^{1/p^n})) = (p^n \cdot p^{(p^n-1)\cdot 1/p^n})$, also $\nu(\mathcal{D}_{F_n/\mathbb{Q}_p}) = n + 1 - 1/p^n$. Damit gilt $\nu(\mathcal{D}_{F_n/\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Also ist $\mathcal{F}/\mathbb{Q}_p$ tief verzweigt.

3.2 Bezug zur Definition aus [17]

In diesem Abschnitt wollen wir begründen, warum die Definition einer tief verzweigten Erweiterung eines lokalen Körpers mit der entsprechenden Definition aus [17] übereinstimmt. Abgesehen davon, dass wir so einen alternativen Beweis für Satz 5.4.6 im fünften Kapitel bekommen (siehe Satz 5.4.8), werden wir diese Eigenschaft tief verzweigter Erweiterungen nicht mehr benutzen.

Sei im Folgenden R ein Ring, A eine R-Algebra und B eine A-Algebra.

Definition. Sei M ein B-Modul. Eine A-*Derivation* von B in M ist ein A-Modulhomomorphismus $d : B \to M$ mit

$$d(bc) = bdc + cdb \qquad \text{für alle } b, c \in B.$$

Die Menge dieser Derivationen bildet einen B-Modul, den wir mit $\mathrm{Der}_A(B, M)$ bezeichnen.

Lemma 3.2.1. *Es existiert bis auf eindeutige Isomorphie genau ein B-Modul $\Omega_{B/A}$ zusammen mit einer A-Derivation $d_{B/A} = d : B \to \Omega_{B/A}$, sodass für jede A-Derivation $d' : B \to M$ in einen B-Modul M genau eine B-lineare Abbildung $f : \Omega_{B/A} \to M$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "d'"] \arrow[dr, "d"'] & & M \\
& \Omega_{B/A} \arrow[ur, dotted, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, existiert.

Beweis. [4, 7.4 Satz 2] □

$\Omega_{B/A}$ heißt der *Modul der Kähler-Differentiale* von B über A.

Korollar 3.2.0.1. *Sei M ein B-Modul. Dann ist die Abbilldung*

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \to \mathrm{Der}_A(B, M)$$
$$f \mapsto f \circ d_{B/A}$$

ein Isomorphismus von B-Moduln.

Satz 3.2.2. *Sei $f : B \to C$ ein Homomorphismus von A-Algebren. Dann ist die Sequenz*

$$C \otimes_B \Omega_{B/A} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C/B} \to 0,$$

die durch $y \otimes d_{B/A}(x) \overset{\alpha}{\mapsto} y \cdot d_{C/A}(f(x))$, $d_{C/A}(z) \overset{\beta}{\mapsto} d_{C/B}(z)$ gegeben ist, exakt.

Beweis. [4, 7.4, Satz 5] □

Definition (Definition 6.6.1 aus [17])**.** Sei $(\mathcal{F}, \nu)$ ein bewerteter Körper und $\nu_{\mathcal{F}^{sep}}$ eine Bewertung auf einem separabel-algebraischen Abschluss $\mathcal{F}^{sep}$ von $\mathcal{F}$, die ν fortsetzt. Dann heißt $\mathcal{F}$ *tief verzweigt*, wenn für den Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} = 0$ gilt.

Bemerkung 3.2.3. Die Definition hängt nicht von der Wahl der Fortsetzung $\nu_{\mathcal{F}^{sep}}$ ab: Sei $\nu'_{\mathcal{F}^{sep}}$ eine weitere Fortsetzung von ν auf $\mathcal{F}^{sep}$ und seien $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ beziehungsweise $\mathfrak{o}'_{\mathcal{F}^{sep}}$ die zugehörigen Bewertungsringe. Dann existiert nach [1, Theorem 3.2.15] ein

$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{F}^{sep}/\mathcal{F})$ mit $\sigma(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}) = \mathfrak{o}'_{\mathcal{F}^{sep}}$. Wir erhalten mit Satz 3.2.2 die exakte Sequenz

$$\sigma(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}) \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \to \Omega_{\sigma(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}})/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \to \Omega_{\sigma(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}})/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} = 0.$$

Wenn also $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} = 0$ gilt, dann auch $\Omega_{\sigma(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}})/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} = 0$.

Wir wollen also zeigen, dass diese Definition im Falle einer Erweiterung eines lokalen Körpers mit der Definition aus [8], die wir benutzen, übereinstimmt.

Wir betrachten die Kategorie R-**Alg.Morph**, deren Objekte Homomorphismen $A \to B$ von R-Algebren sind; wenn dann $A' \to B'$ ein weiterer Homomorphismus von R-Algebren ist, dann besteht ein Morphismus von $A \to B$ nach $A' \to B'$ aus Homomorphismen von R-Algebren $\psi : A \to A'$ sowie $\varphi : B \to B'$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Außerdem haben wir die Kategorie R-**Alg.Mod**, die aus Paaren (A, M) besteht, wobei A eine R-Algebra und M ein A-Modul ist. Die Morphismen in R-**Alg.Mod** sind Paare $(\varphi, f) : (A, M) \to (B, N)$, wobei $\varphi : A \to B$ ein Homorphismus von R-Algebren ist und $f : B \otimes_A M \to N$ ein Homomorphismus von B-Moduln ist (dabei wird $B \otimes_A M$ mittels Multiplikation auf dem linken Faktor zu einem B-Modul). Wir können Ω als Funktor von R-**Alg.Morph** nach R-**Alg.Mod** auffassen: Sei $A \to B$ ein Objekt in R-**Alg.Morph**. Diesem ordnen wir das Paar $(B, \Omega_{B/A})$ zu. Wenn $A' \to B'$ ein weiteres Objekt in R-**Alg.Morph** ist und wir einen Morphismus zwischen $A \to B$ und $A' \to B'$ haben, das heißt Homomorphismen von R-Algebren $\psi : A \to A'$ sowie $\varphi : B \to B'$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

kommutiert, dann ordnen wir diesem Morphismus den Morphismus (φ, f) zu, wobei f als Komposition des Homomorphismus' $B' \otimes_B \Omega_{B/A} \to \Omega_{B'/A}$ aus Satz 3.2.2 mit dem Homomorphismus $\Omega_{B'/A} \to \Omega_{B'/A'}, d_{B'/A}x \mapsto d_{B'/A'}x$ definiert wird.

Seien $(B_i)_{i \in I}$ R-Algebren mit einer gerichteten Indexmenge I und sodass wir für $i \leq j$ eine Inklusion $B_i \to B_j$ haben. Sei $B = \varinjlim_i B_i = \bigcup_i B_i$. Außerdem sei M_i für alle $i \geq 1$ ein B_i-Modul. Seien $(\iota_{ij}, f_{ij}) : (B_i, M_i) \to (B_j, M_j)$ Morphismen in R-**Alg.Mod** für $i \leq j$, wobei $\iota_{ij} : B_i \to B_j$ die Inklusion sei, und sodass die $f_{ij} : B_j \otimes_{B_i} M_i \to M_j$ folgende Bedingungen erfüllen:

(i) $f_{ii} = \mathrm{id}$,

(ii) $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für $i \leq j \leq k$.

Dann bilden die $((B_i, M_i))_i$ ein induktives System. Außerdem haben wir Homomorphismen von B-Moduln

$$B \otimes_{B_i} M_i \overset{\cong}{\to} B \otimes_{B_j} B_j \otimes_{B_i} M_i \xrightarrow{\mathrm{id}_B \otimes f_{ij}} B \otimes_{B_j} M_j.$$

Dadurch bekommen wir ein induktives System $(B \otimes_{B_i} M_i)_i$ von B-Moduln und können in der Kategorie der B-Moduln den Kolimes $\varinjlim_i (B \otimes_{B_i} M_i)$ bilden.

Lemma 3.2.4. *Dann gilt in R-**Alg.Mod***

$$\varinjlim_i (B_i, M_i) = (B, \varinjlim_i (B \otimes_{B_i} M_i)).$$

Beweis. Wir haben Abbildungen $(\iota_j, u_j) : (B_j, M_j) \to (B, \varinjlim_i (B \otimes_{B_i} M_i))$, die gegeben sind durch die Inklusion $\iota : B_j \to B$, und durch die Abbildungen $u_j : B \otimes_{B_j} M_j \to \varinjlim_i (B \otimes_{B_i} M_i)$, die mit dem Kolimes in der Kategorie der B-Moduln kommen. Dann gilt $u_i = u_j \circ f_{ij}$ für $i \leq j$, da wir die Morphismen im induktiven System $(B \otimes_{B_i} M_i)_i$ entsprechend definiert haben.
Sei nun (S, N) ein Objekt in R-**Alg.Mod** mit Abbildungen $(\psi_i, g_i) : (B_i, M_i) \to (S, N)$ (also Homomorphismen $\psi_i : B_i \to S$ und $g_i : S \otimes_{B_i} M_i \to N$), die mit den f_{ij} und den ι_{ij} verträglich sind. Dann haben wir einen eindeutigen Homomorphismus $\psi : B \to S$ aufgrund der universellen Eigenschaft von $B = \varinjlim_i (B_i)$ in der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1, und einen eindeutigen Homomorphismus

$$g : S \otimes_B \varinjlim_i (B \otimes_{B_i} M_i) \overset{\cong}{\to} \varinjlim_i (S \otimes_B B \otimes_{B_i} M_i) \overset{\cong}{\to} \varinjlim_i (S \otimes_{B_i} M_i) \to N,$$

indem wir die universelle Eigenschaft von $\varinjlim_i (S \otimes_B B \otimes_{B_i} M_i)$ in der Kategorie der S-Moduln benutzen. Durch die g_i bekommen wir nämlich Homomorphismen von S-Moduln

$$g_i' : S \otimes_B B \otimes_{B_i} M_i \overset{\cong}{\to} S \otimes_{B_i} M_i \xrightarrow{g_i} N,$$

und dadurch ein induktives System in der Kategorie der S-Moduln. Es gilt nach Konstruktion $(\psi_i, g_i) = (\psi, g) \circ (\iota, u_i)$. Somit erfüllt $\varinjlim_i (B, B \otimes_{B_i} M_i)$ die universelle Eigenschaft des Kolimes.

$\square$

Seien $(A_i)_{i \in I}$ und $(B_i)_{i \in I}$ R-Algebren mit Inklusionen $A_i \to A_j$ und $B_i \to B_j$ für $i \leq j$ und mit $A_i \subseteq B_i$, und $A = \bigcup_i A_i$ sowie $B = \bigcup_i B_i$. Wir definieren ein induktives System in R-**Alg.Mod.** durch Paare $(B_i, \Omega_{B_i/A_i})$ und Abbildungen $(B_i, \Omega_{B_i/A_i}) \to (B_j, \Omega_{B_j/A_j})$ für $i \leq j$, wobei $B_j \otimes_{B_i} \Omega_{B_i/A_i} \to \Omega_{B_j/A_j}$ durch die Komposition

$$B_j \otimes_{B_i} \Omega_{B_i/A_i} \to \Omega_{B_j/A_i} \to \Omega_{B_j/A_j},$$

wobei der erste Homomorphismus aus der exakten Sequenz (Satz 3.2.2) kommt und der zweite Homomorphismus durch $\Omega_{B_j/A_i} \to \Omega_{B_j/A_j}, d_{B_j/A_i}x \mapsto d_{B_j/A_j}x$ definiert ist, gegeben ist.

Lemma 3.2.5. *Es gilt*

$$\varinjlim_i (B_i, \Omega_{B_i/A_i}) = (B, \Omega_{B/A}).$$

Beweis. Nach Lemma 3.2.4 gilt $\varinjlim_i (B_i, \Omega_{B_i/A_i}) \cong (B, \varinjlim_i (B \otimes_{B_i} \Omega_{B_i/A_i}))$. Wir zeigen nun, dass $\varinjlim_i (B \otimes_{B_i} \Omega_{B_i/A_i})$ als B-Modul zu $\Omega_{B/A}$ isomorph ist.
Sei M ein B-Modul. Wir haben Isomorphismen von B-Moduln

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B(\varinjlim_i (B \otimes_{B_i} \Omega_{B_i/A_i}), M) &\cong \varprojlim_i (\mathrm{Hom}_B(B \otimes_{B_i} \Omega_{B_i/A_i}, M)) \\
&\cong \varprojlim_i (\mathrm{Hom}_{B_i}(\Omega_{B_i/A_i}, M)) \\
&\cong \varprojlim_i (\mathrm{Der}_{A_i}(B_i, M)) \\
&\cong \mathrm{Der}_A(B, M).
\end{aligned}$$

(Dabei werden $\mathrm{Hom}_{B_i}(\Omega_{B_i/A_i}, M))$ beziehungsweise $\mathrm{Der}_{A_i}(B_i, M)$ durch $b \cdot \varphi := (x \mapsto b\varphi(x))$ für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{B_i}(\Omega_{B_i/A_i}, M))$ beziehungsweise $b \cdot f := (x \mapsto bf(x))$ für $f \in \mathrm{Der}_{A_i}(B_i, M)$ zu B-Moduln.)
Das Lemma folgt nun aus Lemma 3.2.1. □

Satz 3.2.6. *Sei L/E eine endliche Erweiterung, wobei E eine Erweiterung von F ist, sodass die Bewertung auf E diskret ist, π_L sei ein Primelement von $\mathfrak{o}_L$ und $\mathcal{D}_{L/E}$ sei die Differente von L/E. Dann wird der $\mathfrak{o}_L$-Modul $\Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_E}$ von $d_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_E}\pi_L$ erzeugt und $\mathcal{D}_{L/E}$ ist der Annulator des $\mathfrak{o}_L$-Moduls $\Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_E}$.*

Beweis. [20, III. §7, Proposition 14] □

Lemma 3.2.7 (Lemme 4 in [10])**.** *Seien $E/L/F$ endliche Erweiterungen. Aus Satz 3.2.2 erhalten wir einen kanonischen Homomorphismus*

$$\begin{aligned}
\alpha : \mathfrak{o}_E \otimes_{\mathfrak{o}_L} \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F} &\to \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F} \\
y \otimes d_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F}x &\mapsto y d_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}x.
\end{aligned}$$

Dieser ist injektiv. Insbesondere ist für jedes Element $\omega \in \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F}$ mit Annulator $\mathrm{Ann}(\omega)$ *der Annulator des Bildes von $1 \otimes \omega$ das Ideal $\mathfrak{o}_E \cdot \mathrm{Ann}(\omega)$.*

Beweis. Da wir E/L als $E/E_0/L$ mit E_0/L unverzweigt und E/E_0 total verzweigt schreiben können, reicht es aus, unverzweigte und total verzweigte Erweiterungen zu betrachten.
Zunächst sei E/L unverzweigt. Sei $0 \neq \omega \in \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F}$ ein beliebiges Element und sei π_L ein Primelement von $\mathfrak{o}_L$. Dann können wir ω nach Satz 3.2.6 als $\omega = ad_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F}\pi_L$

schreiben mit einem $a \in \mathfrak{o}_L$, und es gilt $\nu(\mathrm{Ann}(\omega)) = \nu(\mathcal{D}_{L/F}) - \nu(a)$. Es ist $\alpha(1 \otimes \omega) = ad_{E/F}\pi_L \in \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}$, und da π_L auch ein Primelement von $\mathfrak{o}_E$ ist, gilt für ein $b \in \mathfrak{o}_E$ genau dann $bad_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}\pi_L = 0$, wenn $\nu(ba) \geq \nu(\mathcal{D}_{E/F}) = \nu(\mathcal{D}_{L/F})$ gilt, denn da E/L unverzweigt ist, gilt $\nu(\mathcal{D}_{E/F}) = \nu(\mathcal{D}_{L/F})$. Also ist $\nu(\mathrm{Ann}(\alpha(1 \otimes \omega))) = \nu(\mathcal{D}_{L/F}) - \nu(a)$ und es gilt $\mathrm{Ann}(\alpha(1 \otimes \omega)) = \mathfrak{o}_E \cdot \mathrm{Ann}(\omega)$.
Sei nun E/L total verzweigt von Grad n, sei π_E ein Primelement von $\mathfrak{o}_E$ und sei $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ das Minimalpolynom von π_E über L. Dann ist f ein Eisenstein-Polynom und $\pi_L = -a_0$ ist ein Primelement von $\mathfrak{o}_L$. Sei $0 \neq \omega \in \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F}$ ein beliebiges Element. Dann können wir wie oben ω nach Satz 3.2.6 als $\omega = ad_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F}\pi_L$ schreiben mit einem $a \in \mathfrak{o}_L$, und es gilt $\nu(\mathrm{Ann}(\omega)) = \nu(\mathcal{D}_{L/F}) - \nu(a)$. Es gilt $\pi_L = \pi_E^n + a_{n-1}\pi_E^{n-1} + ...a_1\pi_E$ und damit

$$d_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}\pi_L = (a_1 + 2a_2\pi_E + ... + n\pi_E^{n-1}) \cdot d_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}\pi_E = f'(\pi_E)d_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}\pi_E.$$

Also gilt $\alpha(1\otimes\omega) = f'(\pi_E)ad_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}\pi_E$, und für ein $b \in \mathfrak{o}_E$ ist genau dann $b\alpha(1\otimes\omega) = 0$, wenn $\nu(bf'(\pi_E)a) \geq \nu(\mathcal{D}_{E/F})$ gilt. Da nach Satz 3.2.6 für das von $f'(\pi_E)$ erzeugte Ideal $(f'(\pi_E)) = \mathcal{D}_{E/L}$ gilt und aufgrund der Multiplikativität der Differente ist $b\alpha(1 \otimes \omega)$ genau dann 0, wenn $\nu(b) \geq \nu(\mathcal{D}_{L/F}) - \nu(a) = \nu(\mathrm{Ann}(\omega))$ gilt, woraus wieder $\mathrm{Ann}(\alpha(1 \otimes \omega)) = \mathrm{Ann}(\omega) \cdot \mathfrak{o}_E$ folgt. □

Seien $\mathcal{F}/F$ eine Erweiterung und $E/L/F$ endliche Erweiterungen in $\mathcal{F}/F$.

Lemma 3.2.8. *Jeder torsionsfreie $\mathfrak{o}_\mathcal{F}$-Modul ist flach.*

Beweis. Jedes endlich erzeugte Ideal $I \subseteq \mathfrak{o}_\mathcal{F}$ ist bereits ein Hauptideal. In der Tat: Sei I von Elementen $x_1, ..., x_n \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}$ erzeugt und sei $1 \leq i_0 \leq n$ so, dass $\nu(x_{i_0}) = \max\{\nu(x_i) | \, 1 \leq i \leq n\}$ gilt. Dann erzeugt x_{i_0} bereits I. Das Lemma folgt nun aus [5, I, §2, 4, Proposition 3.ii]. □

Wir haben wegen Lemma 3.2.7 die Inklusion

$$\mathfrak{o}_E \otimes_{\mathfrak{o}_L} \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F} \hookrightarrow \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}$$

und damit wegen Lemma 3.2.8 auch einen injektiven Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{F^{sep}}$-Moduln

$$\mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_L} \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F} \cong \mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{o}_E \otimes_{\mathfrak{o}_L} \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F} \hookrightarrow \mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_E} \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}.$$

Damit erhalten wir durch Übergang zum Kolimes über alle endlichen Erweiterungen E/F auf der rechten Seite einen injektiven Homomorphismus

$$\mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_L} \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F} \hookrightarrow \Omega_{\mathfrak{o}_{F^{sep}}/\mathfrak{o}_F}.$$

Wenn wir nun auf der linken Seite den Kolimes über alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$ bilden, bekommen wir einen injektiven Homomorphismus

$$\varinjlim_E (\mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_E} \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}) \hookrightarrow \Omega_{\mathfrak{o}_{F^{sep}}/\mathfrak{o}_F}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\varinjlim_E (\mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_E} \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}) &= \varinjlim_E (\mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} \mathfrak{o}_\mathcal{F} \otimes_{\mathfrak{o}_E} \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}) \\ &= \mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} \varinjlim_E (\mathfrak{o}_\mathcal{F} \otimes_{\mathfrak{o}_E} \Omega_{\mathfrak{o}_E/\mathfrak{o}_F}) \\ &= \mathfrak{o}_{F^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} \Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_F}.\end{aligned}$$

Wir können also sowohl $\Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_F}$ als auch $\Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_F}$ als $\mathfrak{o}_L$- beziehungsweise $\mathfrak{o}_\mathcal{F}$-Untermodul von $\Omega_{\mathfrak{o}_{F^{sep}}/\mathfrak{o}_F}$ auffassen. Im Folgenden setzen wir $d := d_{\mathfrak{o}_{F^{sep}}/\mathfrak{o}_F}$.

Sei F_{un} die maximale unverzweigte Teilerweiterung von F^{sep}/F.

Bemerkung 3.2.9. Für eine Erweiterung $\mathcal{F}/F$ gilt $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}F_{un}}/\mathfrak{o}_F} = \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}F_{un}}/\mathfrak{o}_{F_{un}}}$. Dies folgt aus Satz 3.2.2.

Sei $a \in \mathfrak{o}_{F^{sep}}$ ein beliebiges Element, und sei L/F_{un} eine endliche Erweiterung, sodass $a \in L$ ist. Sei π_L ein Primelement von $\mathfrak{o}_L$. Dann ist $\mathfrak{o}_L$ ein freier Modul von Rang $n = [L : F_{un}]$ über $\mathfrak{o}_{F_{un}}$ mit Basis $1, \pi_L, ..., \pi_L^{n-1}$ (siehe [20, III, §6, Lemma 3]). Wir finden also ein eindeutiges Polynom $f \in \mathfrak{o}_{F_{un}}[X]$ mit $f(\pi_L) = a$ und von Grad kleiner als n. Nun setzen wir

$$\delta(a) = \min\{\nu(f'(\pi_L)) - \nu(\mathcal{D}_{L/F_{un}}), 0\}.$$

2

Wenn $da \neq 0$ ist, ist auch $d_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_{F_{un}}} a \neq 0$ und es gilt $-\nu(\mathrm{Ann}(d_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_{F_{un}}} a)) = \nu(f'(\pi_L)) - \nu(\mathcal{D}_{L/F_{un}}) = \delta(a)$. Wenn L'/F_{un} eine weitere endliche Erweiterung mit $a \in L'$ ist, gilt aufgrund von Satz 3.2.7[3]

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}_{LL'} \cdot \mathrm{Ann}(d_{L/F_{un}} a) &= \mathrm{Ann}(d_{L'L/F_{un}} a) \\ &= \mathfrak{o}_{LL'} \cdot \mathrm{Ann}(d_{L'/F_{un}} a).\end{aligned}$$

Also ist $\delta(a)$ in diesem Fall unabhängig von der Wahl von L.
Wenn $da = 0$ gilt, ist auch $d_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_{F_{un}}} a = d_{\mathfrak{o}_{L'}/\mathfrak{o}_{F_{un}}} a = 0$ und es gilt $\delta(a) = 0$.
Damit definiert δ eine Funktion $\delta : \mathfrak{o}_{F^{sep}} \to (-\infty, 0]$.

Bemerkung 3.2.10. Für $x, y \in \mathfrak{o}_{F^{sep}}$ gilt $xdy = 0$ genau dann, wenn $\nu(x) + \delta(y) \geq 0$ ist.

Lemma 3.2.11 (Lemma 2.2. in [2]). *Seien $x, y \in \mathfrak{o}_{F^{sep}}$ zwei Elemente mit $\delta(x) \leq \delta(y)$. Dann gibt es ein $z \in \mathfrak{o}_{F_{un}}[x, y]$ mit $zdx = dy$.*

[2] Wir haben die Differente nur für lokale Körper definiert, die insbesondere vollständig sind. Aber für endliche Erweiterungen von F_{un} gelten dieselbe Definition und alle hier benötigten Eigenschaften.

[3] In Lemma 3.2.7 gehen wir eigentlich von einem vollständigen Körper aus, diese haben wir im Beweis allerdings nicht benutzt. Abgesehen davon gilt für einen Homomorphismus $A \to B$ von R-Algebren $\Omega_{B'/A'} \cong A' \otimes_A \Omega_{B/A}$, wobei A' eine A-Algebra und $B' = B \otimes A'$ ist (siehe [7, Proposition 16.4]). Ω verträgt sich hier also mit Vervollständigen.

Beweis. Sei $\pi = \pi_{F_{un}[x,y]}$ ein Primelement in $\mathfrak{o}_{F_{un}[x,y]}$ und seien $h_1, h_2 \in \mathfrak{o}_{F_{un}[X]}$ Polynome, sodass $x = h_1(\pi)$ und $y = h_2(\pi)$ gilt. Dann ist $dx = h_1'(\pi)d\pi$ und $dy = h_2'(\pi)d\pi$. Falls $\delta(y) = 0$ ist, dann gilt $dy = 0$ und wir können $z = 0$ wählen. Wenn $\delta(y) < 0$ ist, dann gilt

$$\delta(x) = \nu(h_1'(\pi)) + \delta(\pi) \leq \nu(h_2'(\pi)) + \delta(\pi) = \delta(y).$$

Also können wir $z = h_2'(\pi)/h_1'(\pi) \in \mathfrak{o}_{F_{un}[x,y]}$ wählen. □

Satz 3.2.12 (Theorem 2.2. in [2])**.** *Sei $\mathcal{F}/F$ eine Körpererweiterung mit $F_{un} \subseteq \mathcal{F}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $\mathcal{F}/F$ ist tief verzweigt (im ursprünglichen Sinn).

(ii) $\delta(\mathfrak{o}_\mathcal{F})$ ist unbeschränkt.

(iii) Für jede Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ gilt $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_\mathcal{F}} = 0$.

(iv) Für jede Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ gilt $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_{F_{un}}} = \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \cdot \Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_{F_{un}}}$.

Beweis. Man sieht an Eigenschaft (*iii*) aus Lemma 3.1.10, dass (*i*) zu (*ii*) äquivalent ist. Dabei benutzen wir, dass für eine endliche Erweiterung E/F für die Differente $\nu(\mathcal{D}_{E/F}) = \nu(\mathcal{D}_{E/E_0})$ gilt, wobei E_0/F die maximale unverzweigte Teilerweiterung von E/F ist (siehe [20, III, § 5, Theorem 1]). Dann sehen wir an der Definition der Differente, dass $\nu(\mathcal{D}_{E/F}) = \nu(\mathcal{D}_{E_{un}/F_{un}})$ gilt.
Gelte (*ii*). Sei $x \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ für eine Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$. Dann existiert ein $y \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}$, sodass $\delta(y) \leq \delta(x)$ gilt. Wegen Lemma 3.2.11 finden wir ein $z \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ mit $dx = zdy \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \cdot \Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_{F_{un}}}$, also gilt (*iv*).
Gelte (*iv*). Wir nehmen an, dass $\delta(\mathfrak{o}_\mathcal{F})$ beschränkt ist. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $-N \leq \inf\{\delta(a) | a \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}\}$ gilt. Dann gilt $\pi_F^N \Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_{F_{un}}} = 0$ (für ein Primelement π_F von $\mathfrak{o}_F$). Für ein $\alpha \in \mathfrak{o}_{F^{sep}}$ mit $\delta(\alpha) < -N$ gilt $\pi_F^N d\alpha \neq 0$, also ist $d\alpha \notin \mathfrak{o}_{F^{sep}} \cdot \Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_{un}}}$, Widerspruch.
Um zu sehen, dass (*iii*) zu (*iv*) äquivalent ist, betrachten wir eine Erweiterung $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ und erhalten nach Satz 3.2.2 die exakte Sequenz

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} \Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_{F_{un}}} \xrightarrow{f} \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_{F_{un}}} \to \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_\mathcal{F}} \to 0.$$

Da das Bild von f gleich $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \cdot \Omega_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}/\mathfrak{o}_{F_{un}}}$ ist, ist (*iii*) äquivalent zu (*iv*). □

Lemma 3.2.13. *Sei $\mathcal{F}/F$ eine Körpererweiterung und $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine endliche Erweiterung. Dann gilt $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_\mathcal{F}} \cong \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}F_{un}}}$.*

Beweis. Sei L/F eine unverzweigte endliche Erweiterung, und sei E/F eine endliche Erweiterung in $\mathcal{F}/F$, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist. Dann haben wir die exakte Sequenz (siehe Satz 3.2.2)

$$0 = \mathfrak{o}_{E'L} \otimes_{\mathfrak{o}_{EL}} \Omega_{\mathfrak{o}_{EL}/\mathfrak{o}_E} \to \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_E} \to \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{EL}} \to 0,$$

wobei EL/E unverzweigt ist, woraus $\Omega_{\mathfrak{o}_{EL}/\mathfrak{o}_E} = 0$ folgt. Also gilt $\Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_E} \cong \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{EL}}$.
Außerdem haben wir die exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{o}_{E'L} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E} \to \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_E} \to \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{E'}} = 0,$$

wobei $\Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{E'}} = 0$ gilt, da $E'L/E'$ unverzweigt ist. Außerdem ist der Homomorphismus $\mathfrak{o}_{E'L} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E} \to \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_E}$ injektiv aufgrund von Lemma 3.2.7. Also haben wir einen Isomorphismus $\mathfrak{o}_{E'L} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E} \to \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_E}$ und damit gilt

$$\mathfrak{o}_{E'L} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E} \cong \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{EL}}.$$

Wir betrachten nun den Kolimes über alle endlichen unverzweigten Erweiterungen L/F: $\varinjlim_L(\mathfrak{o}_{E'L}, \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{EL}})$. Nach Lemma 3.2.5 gilt

$$\varinjlim_L(\mathfrak{o}_{E'L}, \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{EL}}) = (\mathfrak{o}_{E'F_{un}}, \Omega_{\mathfrak{o}_{E'F_{un}}/\mathfrak{o}_{EF_{un}}}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\varinjlim_L(\mathfrak{o}_{E'L}, \Omega_{\mathfrak{o}_{E'L}/\mathfrak{o}_{EL}}) &\cong \varinjlim_L(\mathfrak{o}_{E'L}, \mathfrak{o}_{E'L} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E}) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{E'F_{un}}, \varinjlim_L(\mathfrak{o}_{E'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'L}} \mathfrak{o}_{E'L} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E})) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{E'F_{un}}, \varinjlim_L(\mathfrak{o}_{E'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E})) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{E'F_{un}}, \mathfrak{o}_{E'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E}).
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt $\Omega_{\mathfrak{o}_{E'F_{un}}/\mathfrak{o}_{EF_{un}}} \cong \mathfrak{o}_{E'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E}$.
Dann gilt für den Kolimes über alle endlichen Erweiterungen E/F in $\mathcal{F}/F$

$$\begin{aligned}
\varinjlim_E(\mathfrak{o}_{E'F_{un}}, \Omega_{\mathfrak{o}_{E'F_{un}}/\mathfrak{o}_{EF_{un}}}) &\cong \varinjlim_E(\mathfrak{o}_{E'F_{un}}, \mathfrak{o}_{E'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E}) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \varinjlim_E(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{E'F_{un}}} \mathfrak{o}_{E'F_{un}} \otimes_{E'} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E})) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \varinjlim_E(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{E'} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E})) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \varinjlim_E(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{E'} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E})) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \varinjlim_E(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{E'} \Omega_{\mathfrak{o}_{E'}/\mathfrak{o}_E})) \\
&\cong (\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}).
\end{aligned}$$

Wegen Lemma 3.2.5 gilt

$$\varinjlim(\mathfrak{o}_{E'F_{un}}, \Omega_{\mathfrak{o}_{E'F_{un}}/\mathfrak{o}_{EF_{un}}}) \cong (\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}F_{un}}}),$$

also insgesamt

$$(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}F_{un}}}) \cong (\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wenn $\mathcal{F}/F$ eine Körpererweiterung ist, dann ist $\mathcal{F}/F$ genau dann tief verzweigt, wenn $\mathcal{F}F_{un}/F$ tief verzweigt ist, wie man an Lemma 3.1.10 sieht: Wenn $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt ist, dann klarerweise auch $\mathcal{F}F_{un}/F$. Wenn hingegen $\mathcal{F}/F$ nicht tief verzweigt ist, dann existiert ein $m \geq 0$, sodass $\mathcal{F} \subseteq F^{(m)}$ gilt. Aber wegen $F_{un} \subseteq F^{(0)} \subseteq F^{(m)}$ ist damit auch $\mathcal{F}F_{un} \subseteq F^{(m)}$.
Andererseits zeigt das vorherige Lemma, dass $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}F_{un}}} = 0$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}} \otimes_{\mathcal{F}'} \Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} = 0$ ist. Aber da die Inklusion $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'F_{un}}$ als lokaler flacher Homomorphismus von lokalen Ringen treu-flach ist (siehe [3, Tag 00HR]), ist dies genau dann der Fall, wenn $\Omega_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} = 0$ gilt. Nach [17, Theorem 6.3.23] (und Lemma 3.2.5) ist dies äquivalent zu $\Omega_{\mathfrak{o}_{F^{sep}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} = 0$.

4 Tief verzweigt impliziert perfektoid

Sei in diesem Kapitel $\mathcal{F}/F$ eine tief verzweigte Erweiterung. Nach Bemerkung 3.1.4 ist die Bewertung ν auf $\mathcal{F}$ nicht diskret. Wir bezeichnen das maximale Ideal des Bewertungsrings $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{F} | \nu(x \geq 0\}$ mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{F} | \nu(x) > 0\}$.

Wir werden in diesem Kapitel einige "Fast-Begriffe" (fast null, fast injektiv, Fast-Isomorphismus etc.) definieren und einige Resultate aus der kommutativen Algebra in diesen Kontext übertragen. Anschließend zeigen wir, dass der Homomorphismus $\tau_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}$ fast surjektiv ist. Darauf aufbauend beweisen wir, dass die Inklusion fast schwach étale ist, woraus wir schließlich folgern, dass der Frobenius auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ surjektiv ist.

4.1 Fast kommutative Algebra

Lemma 4.1.1. *Es gilt* $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. *Darüber hinaus lässt sich jedes Element* $\varepsilon \in \mathfrak{m}$ *als Produkt zweier Elemente aus* $\mathfrak{m}$ *schreiben.*

Beweis. Die Inklusion $\mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{m}$ ist klar.
Andersherum sei $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ beliebig. Da die Bewertung nichtdiskret ist, finden wir ein $\varepsilon' \in \mathfrak{m}$ mit $\nu(\varepsilon') < \nu(\varepsilon)$, also gilt $\varepsilon/\varepsilon' \in \mathfrak{m}$ und damit $\varepsilon = \varepsilon' \cdot \varepsilon/\varepsilon' \in \mathfrak{m}^2$. □

Bemerkung 4.1.2 (Remark 2.1.4 in [17]). Es gilt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. In der Tat: Die Inklusion $\mathfrak{m} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ induziert eine Injektion $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{m} \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, x \otimes y \mapsto xy$. Das Bild ist $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

Definition (2.1.3. aus [17]).

(i) Sei M ein $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modul. Dann heißt M *fast null*, wenn $\mathfrak{m}M = 0$ gilt.

(ii) Sei N ein weiterer $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modul und sei $f : M \to N$ ein Modulhomomorphismus. Dann heißt f *fast injektiv*, wenn $\mathfrak{m}\mathrm{Ker}(f) = 0$, und *fast surjektiv*, wenn $\mathfrak{m}\mathrm{Coker}(f) = 0$ gilt. Wenn f fast surjektiv und fast injektiv ist, heißt f *Fast-Isomorphismus.*

Lemma 4.1.3 (Remark 2.1.4.(i) in [17]). *Ein* $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$*-Modul* M *ist genau dann fast null, wenn* $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M = 0$ *ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M = 0$. Wir haben einen surjektiven Homomorphismus $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M \to \mathfrak{m}M, \varepsilon \otimes m \mapsto \varepsilon m$, also ist $\mathfrak{m}M = 0$. Umgekehrt sei $\mathfrak{m}M = 0$. Da $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ gilt, ist damit $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{m}M = 0$. □

Lemma 4.1.4 (Remark 2.1.4.(i) in [17])**.** *Seien M und N zwei $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Moduln. Ein Homomorphismus $f : M \to N$ ist genau dann ein fast injektiv beziehungsweise fast surjektiv, wenn* $\mathrm{id} \otimes f : \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} N$ *injektiv beziehungsweise surjektiv ist.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für einen Fast-Isomorphismus f; die Aussagen für fast injektive beziehungsweise fast surjektive Homomorphismen ergeben sich direkt aus dem Beweis.
Sei $f : M \to N$ ein Fast-Isomorphismus. Wir haben die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to M \to N \to \mathrm{Coker}(f) \to 0.$$

Das Ideal $\mathfrak{m}$ ist nach Lemma 3.2.8 ein flacher $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modul. Damit ist auch die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(f) \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} N \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Coker}(f) \to 0$$

exakt.
Nach Lemma 4.1.3 ist $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Coker}(f) = 0$, also ist $\mathrm{id} \otimes f : \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} N$ ein Isomorphismus.
Sei umgekehrt $\mathrm{id} \otimes f : \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} N$ ein Isomorphismus. Dann gilt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Coker}(f) = 0$, denn wir können, da $\mathfrak{m}$ flach ist, sowohl Kern als auch Cokern von $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} N$ mit $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(f)$ bzw. $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Coker}(f)$ identifizieren. Also gilt auch $\mathfrak{m}\mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{m}\mathrm{Coker}(f) = 0$ nach Lemma 4.1.3[1]. □

Die folgenden Resultate sind Fast-Versionen von allgemeinen Sätzen über flache und schwach étale Homomorphismen, vergleiche z.B. [3, Tag 092A].
Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Dann wird B durch f zu einer A-Algebra. Wenn $I \subseteq A$ ein Ideal ist, bezeichnen wir mit $IB = BI$ das von I erzeugte Ideal in B.

Definition. Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Dann heißt f *fast flach*, wenn für jeden injektiven Homomorphismus $g : M \to N$ von A-Moduln der Kern der induzierten Abbildung

$$B \otimes_A M \to B \otimes_A N$$

fast null ist.

Lemma 4.1.5. *Seien A und B zwei $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Dann ist $f : A \to B$ genau dann fast flach, wenn $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B$ ein flacher A-Modul ist.*

Beweis. Sei $g : M \to N$ ein injektiver Homomorphismus von A-Moduln. Wir haben die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes g) \to B \otimes_A M \to B \otimes_A N.$$

[1] Der Beweis stammt aus [6].

Nach Lemma 3.2.8 ist auch die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes g) \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A N$$

exakt. Wenn $f : A \to B$ fast flach ist, wird $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes g)$ von $\mathfrak{m}$ annuliert, und mit Lemma 4.1.3 folgt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes g) = 0$. Wenn andererseits $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B$ ein flacher A-Modul ist, dann ist wieder nach Lemma 4.1.3 $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes g) = 0$, also ist $f : A \to B$ fast flach. □

Bemerkung 4.1.6. Wenn $f : A \to B$ fast flach ist und $g : M \to N$ ein fast injektiver Homomorphismus von A-Moduln ist, dann ist die induzierte Abbildung $B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ fast injektiv.

Lemma 4.1.7. *Seien $A \to B$ sowie $B \to C$ fast flache Homomorphismen von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Dann ist auch die Komposition $A \to B \to C$ fast flach.*

Beweis. Sei $h : M \to N$ ein injektiver Homomorphismus von A-Moduln. Wir haben die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) \to B \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_B \otimes h} B \otimes_A N.$$

Nach Lemma 4.1.5 ist die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_B \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_B B \otimes_A M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_B B \otimes_A N$$

exakt, also ist auch die Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_B \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_A M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_A N$$

exakt. Weiterhin gilt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) = 0$, da B ein fast flacher A-Modul ist. Deswegen ist $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) \cong C \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) = 0$. Wir haben den kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) &\to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_B \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_B \otimes h) \\ x \otimes y \otimes z &\mapsto x \otimes y \otimes z. \end{aligned}$$

Also gilt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_B \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes h) = 0$. Damit haben wir einen injektiven Homomorphismus

$$\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes h : \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_A M \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} C \otimes_A N.$$

Somit ist nach Lemma 4.1.4 der Homomorphismus $\mathrm{id} \otimes h : C \otimes_A M \to C \otimes_A N$ fast injektiv, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 4.1.8 (Basiswechsel)**.** *Sei $A \to B$ ein fast flacher Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Wenn $\varphi : A \to A'$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren ist, dann ist $A' \to B \otimes_A A'$ fast flach.*

Beweis. Sei $f : M \to N$ ein injektiver Homomorphismus von A'-Moduln. Dann ist f auch als Homomorphismus von A-Moduln injektiv. Wir haben das kommutative Diagramm von A-Moduln

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A A' \otimes_{A'} M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "\cong"'] & B \otimes_A A' \otimes_{A'} N \arrow[d, "\cong"] \\
B \otimes_A M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"'] & B \otimes_A N
\end{tikzcd}$$

Die Behauptung folgt, da $A \to B$ fast flach ist. □

Definition (Fast schwach étale Algebren)**.** Sei $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Dann heißt φ *fast schwach étale*, wenn B ein fast flacher A-Modul ist und wenn B außerdem ein fast flacher $B \otimes_A B$-Modul ist, wobei B durch die Multiplikationsabbildung $\mu : B \otimes_A B \to B, x \otimes y \mapsto xy$ zu einem $B \otimes_A B$-Modul wird.

Lemma 4.1.9. *Sei A eine $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebra. Sei $\varphi : B \to C$ ein Homomorphismus von fast schwach étalen A-Algebren. Dann ist φ fast schwach étale.*

Beweis. Wir schreiben $\varphi : B \to C$ als Komposition von $B \to C \otimes_A B, x \mapsto 1 \otimes x$, mit $C \otimes_A B \to C, x \otimes y \mapsto x \cdot \varphi(y)$. Der erste Homomorphismus ist fast flach nach Lemma 4.1.8, denn er ist der Basiswechsel von $A \to C$ durch $A \to B$.
Um zu sehen, dass auch der zweite Homomorphismus fast flach ist, betrachten wir den Basiswechsel des fast flachen Ringhomomorphismus' $B \otimes_A B \to B$ bezüglich des Ringhomomorphismus' $B \otimes_A B \to C \otimes_A B$: Der Homomorphismus $C \otimes_A B \to B \otimes_{B \otimes_A B} (C \otimes_A B)$ ist nach Lemma 4.1.8 fast flach, und wir haben einen Isomorphismus von A-Moduln

$$\begin{aligned} B \otimes_{B \otimes_A B} (C \otimes_A B) &\cong C, \\ b_1 \otimes c \otimes b_2 &\mapsto \varphi(b_1 b_2) \cdot c. \end{aligned}$$

Also ist auch $C \otimes_A B \to C$ fast flach, und aus Lemma 4.1.7 folgt, dass $\varphi : B \to C$ fast flach ist.
Der kanonische Homomorphismus $C \otimes_A C \to C \otimes_B C$ ist surjektiv. Damit gilt $C \otimes_B C \otimes_{C \otimes_A C} C \otimes_B C \cong C \otimes_B C$, also ist $C \otimes_B C \otimes_{C \otimes_A C} C \otimes_B C \to C \otimes_B C$ fast flach. Da auch $C \otimes_A C \to C$ fast flach ist, ist $C \otimes_B C \to C$ fast flach (denn wenn wir $X = C \otimes_A C$ und $Y = C \otimes_B C$ setzen, haben wir $Y \otimes_{Y \otimes_X Y} (C \otimes_X M) = C \otimes_Y M$ für einen Y-Modul M). □

Lemma 4.1.10. *Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *f ist fast flach und für einen A-Modul M folgt aus $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A M = 0$ schon $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M = 0$;*

(ii) *f ist fast flach und für jedes echte Ideal I von A folgt aus $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} B/BI = 0$ schon $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} A/I = 0$.*

Beweis. Es gilt $B/BI \cong B \otimes_A A/I$, also gilt (i) $\Rightarrow$ (ii). Gelte nun (ii) und sei M ein A-Modul, sodass $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} B \otimes_A M = 0$ gilt. Wenn $M \neq 0$, dann existiert ein Element $0 \neq x \in M$. Sei $I \subsetneq A$ der Annulator von x. Wir haben die Inklusion $A/I \cong Ax \hookrightarrow M$. Da $f : A \to B$ fast flach ist, ist die induzierte Abbildung

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} B \otimes_A A/I \cong \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} B/BI \hookrightarrow \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} B \otimes_A M = 0$$

injektiv, also gilt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} B/BI = 0$. Mit (ii) folgt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} Ax \cong \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} A/I = 0$ für beliebiges $x \in M$, das heißt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_\mathcal{F}} M = 0$, also gilt (i). □

Bemerkung 4.1.11. Wir nennen einen Homomorphismus $f : A \to B$ von $\mathfrak{o}_\mathcal{F}$-Moduln, der die äquivalenten Eigenschaften von Lemma 4.1.10 erfüllt, *fast treu-flach*.

4.2 τ ist fast surjektiv

Sei für den Rest des Kapitels $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine endliche Erweiterung von Grad d mit $\mathcal{F}' \subseteq F^{sep}$.

Lemma 4.2.1. *Es existieren für jedes $\varepsilon \in \mathfrak{m}_\mathcal{F} \setminus \{0\}$ Elemente $e_1, ..., e_d \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$, die eine $\mathcal{F}$-Basis von $\mathcal{F}'$ bilden und sodass der Kokern der Inklusion $\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_\mathcal{F} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ von ε annuliert wird.*

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Wähle eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$ so, dass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist und $\nu(\mathcal{D}_{E'/E}) < \nu(\varepsilon)$ gilt. Sei $e_1, ..., e_d$ eine $\mathfrak{o}_E$-Basis von $\mathfrak{o}_{E'}$. Dann ist $e_1, ..., e_d$ auch eine $\mathcal{F}$-Basis von $\mathcal{F}'$, denn da $e_1, ..., e_d$ eine $\mathfrak{o}_E$-Basis von $\mathfrak{o}_{E'}$ ist, ist es eine E-Basis von E', und es gilt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}E'$ und $[E' : E] = [\mathcal{F}' : \mathcal{F}]$. Sei $e_1^*, ..., e_d^*$ die duale Basis von E'/E unter der Spurabbildung, das heißt es ist

$$\mathrm{Tr}_{E'/E}(e_i e_j^*) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Sei $y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ beliebig. Schreibe $y = \sum a_i e_i$ für bestimmte $a_i \in \mathcal{F}$. Es gibt ein $a \in \mathfrak{o}_\mathcal{F} \setminus \{0\}$, sodass $a \cdot e_i^* \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ für alle $1 \leq i \leq d$ gilt, und es ist $\nu(a) = \nu(\mathcal{D}_{E'/E})$ nach Definition der Differente. Wir haben $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(y \cdot a \cdot e_i^*) \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}$ für alle $i = 0, ..., d$, andererseits ist $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(y \cdot a \cdot e_i^*) = a \cdot a_i$ für alle $i = 0, ..., d$, das heißt $a \cdot a_i \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}$. Der Kokern der Inklusion $\iota : \bigoplus e_i \mathfrak{o}_\mathcal{F} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ wird also von δ für alle $\delta \in \mathfrak{m}_\mathcal{F}$ mit $\nu(\delta) \geq \nu(a)$ annuliert. Da $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.2.2. Diese Aussage gilt auch ohne die Voraussetzung "tief verzweigt", siehe Proposition 6.3.8. in [17].

Beispiel (Example 4.9 in [19], Example 2 in [13]). Sei $p \neq 2$. Wir setzen $\mathcal{F} := \mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ und $\mathcal{F}' := \mathcal{F}(p^{1/2})$ sowie $F_n = \mathbb{Q}_p(p^{1/p^n})$ und $F_n' = F_n(p^{1/2})$. Dann wird $\mathfrak{o}_{F_n'}$ nach dem Lemma von Bezout als $\mathfrak{o}_{F_n}$-Algebra von $p^{1/2p^n}$ erzeugt, und die Differente ist nach [20, III, §6, Corollary 2] das Ideal $(p^{1/2p^n})$. Der Kokern der Inklusion

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \oplus p^{1/2p^n}\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$$

wird von $p^{1/2p^n}$ annuliert.

Das folgende Lemma zeigt, dass der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \tau := \tau_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}} : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) \\ y &\mapsto (x \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(xy)), \end{aligned}$$

fast surjektiv ist.

Lemma 4.2.3. *Es gibt für jedes* $\varepsilon \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$ *und jedes* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$ *ein* $z_\varepsilon \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$*, sodass* $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(z_\varepsilon y) = \varepsilon\varphi(y)$ *für alle* $y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ *gilt, das heißt es gilt* $\varepsilon \cdot \mathrm{Coker}(\tau) = 0$.

Beweis. Seien $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$ und $\varepsilon \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$ beliebig. Wir finden nach Lemma 4.1.1 Elemente $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ mit $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$. Betrachte $\varepsilon_1 \cdot \varphi$. Wir finden nach Lemma 4.2.1 eine $\mathcal{F}$-Basis $e_1, ..., e_d \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ von $\mathcal{F}'$, sodass für alle $x \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ das Element $\varepsilon_1 \cdot x$ in $\bigoplus_i e_i\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ liegt. Dann setze $\varepsilon_1 \cdot \varphi$ fort zu einer $\mathcal{F}$-linearen Abbildung $\Phi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$. Das geht, da man für jedes $y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ eindeutige $b_1, ..., b_d \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ mit $\varepsilon_1 \cdot y = \sum_i b_i e_i$ findet.
Da $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt ist, finden wir eine endliche Erweiterung E/F in $\mathcal{F}/F$, sodass $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E definiert ist und sodass $\nu(\mathcal{D}_{E'/E}) < \nu(\varepsilon_2)$ gilt. Wegen Lemma 2.1.10 können wir $\varepsilon_2 \in \mathfrak{m}_E$ annehmen.
Da $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}$ nicht ausgeartet ist, gibt es ein $x \in \mathcal{F}'$ mit

$$\Phi(y) = \mathrm{Tr}(xy) \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{F}'. \tag{4.1}$$

Sei $e_1', ..., e_d'$ eine E-Basis von E' (und damit eine $\mathcal{F}$-Basis von $\mathcal{F}'$). Schreibe $x = \sum a_i e_i'$ mit $a_i \in \mathcal{F}$. Definiere $E_2 := E[a_1, ..., a_d]$. Dann ist $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ über E_2 definiert mit $E_2' = E'[a_1, ..., a_d]$. Nach Lemma 2.1.10 ist

$$\nu(\mathcal{D}_{E_2'/E_2}) \leq \nu(\mathcal{D}_{E'/E}) \leq \nu(\varepsilon_2). \tag{4.2}$$

Es gilt $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}_{E_2'/E_2}(xy) \in E_2$ für alle $y \in E_2'$. Damit folgt $\varepsilon_1 \cdot \varphi(y) \in \mathfrak{o}_{E_2'}$ für alle $y \in \mathfrak{o}_{E_2'}$, das heißt es ist

$$\varepsilon_1 \cdot \varphi_{|E_2'} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{E_2}}(\mathfrak{o}_{E_2'}, \mathfrak{o}_{E_2}).$$

Wegen (4.2) und Lemma 2.1.12 ist $\varepsilon_2 \in \mathrm{Ann}_{\mathfrak{o}_{E_2'}}(\mathrm{Coker}(\tau_{E_2'/E_2}))$, das heißt wir finden ein $z_\varepsilon \in \mathfrak{o}_{E_2'}$ mit

$$\varepsilon \cdot \varphi_{|\mathfrak{o}_{E_2'}}(y) = \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varphi_{|\mathfrak{o}_{E_2'}}(y) = \mathrm{Tr}_{E_2'/E_2}(z_\varepsilon y).$$

Aufgrund der Injektivität der Abbildung τ_{E_2'/E_2} gilt $\varepsilon_2 \cdot x = z_\varepsilon$, und aufgrund von (4.1) gilt

$$\varepsilon \cdot \varphi(y) = \mathrm{Tr}(z_\varepsilon y) \qquad \text{für alle } y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}.$$

Also erfüllt z_ε die gewünschte Eigenschaft. □

Bemerkung 4.2.4. Hier ist der wesentliche Punkt, an dem die Voraussetzung "tief verzweigt" eingeht. Alles Weitere funktioniert unter Benutzung der Aussage des vorherigen Lemmas; die Voraussetzung "tief verzweigt" wird nicht mehr explizit benutzt.

4.3 $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ ist fast schwach étale

Wir definieren einen ($\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-linearen) Homomorphismus σ durch

$$\begin{aligned}\sigma : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) \\ x \otimes \varphi &\mapsto (y \mapsto \varphi(xy)).\end{aligned}$$

Dadurch wird $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$ zu einem $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$-Modul.
Der Homomorphismus $\tau = \tau_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}} : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$ ist $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$-linear, denn für Elemente $x, y, b \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ gilt $b \cdot (\tau(x))(y) = (\tau(x))(by) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(bxy) = (\tau(bx))(y)$.

Sei $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Wir wählen wie in Lemma 4.2.1 Elemente e_i, sodass der Kokern der Inklusion $\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ von ε annuliert wird. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon : \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}), \\ x \otimes \varphi &\mapsto (y \mapsto x \cdot \varphi(y))\end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Moduln, da $\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ ein endlich erzeugter freier $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modul ist (Lemma 2.1.4).

Lemma 4.3.1 (vgl. Lemma 2.4.29 in [17]). *Der Homomorphismus*

$$\begin{aligned}\omega : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}), \\ x \otimes \varphi &\mapsto (y \mapsto x \cdot \varphi(y))\end{aligned}$$

ist fast injektiv.

Beweis. Nach Lemma 4.2.1 gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ Elemente $e_i \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$, sodass der Kokern der Inklusion $\iota : \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ von ε annuliert wird. Wir haben also Abbildungen

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \xrightarrow{\cdot\varepsilon} \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \tag{4.3}$$

deren Komposition $\varepsilon \cdot \mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}}$ ist. Es gilt zudem

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) \cong \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \cong \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}).$$

Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\omega"'] & \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\cong"] & \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) \arrow[d, "\omega"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}) \arrow[r, "g_1"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}) \arrow[r, "g_2"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'})
\end{tikzcd}$$

Dabei werden die waagerechten Homomorphismen durch (4.3) induziert; ihre Komposition ist also Multiplikation mit ε.
Sei $x \in \mathrm{Ker}(\omega)$. Dann gilt $g_1(\omega(x)) = 0$, d.h. wegen Kommutativität des Diagramms auch $f_1(x) = 0$ und damit $0 = f_2(f_1(x)) = \varepsilon \cdot x$. Also gilt $\varepsilon \cdot \mathrm{Ker}(\omega) = 0$.

□

Sei $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$ beliebig und sei $\mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}}$ die Identität auf $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$. Wegen Lemma 4.2.1 finden wir geeignete e_i, sodass der Kokern der Inklusion $\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ von ε_1 annuliert wird.
Wir finden ein eindeutiges Element $\hat{\zeta}_{\varepsilon_1} = \sum_j x_j \otimes f_j \in \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$ mit $\omega_{\varepsilon_1}(\hat{\zeta}_{\varepsilon_1}) = \mathrm{id}_{\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}$.
Setze f_j fort zu einer $\mathcal{F}$-linearen Abbildung $F_j : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$. Dann gilt $\varepsilon_1 \cdot F_j(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}) \subseteq \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$.
Sei $\zeta_{\varepsilon_1} := \sum_j x_j \otimes \varepsilon_1 F_{j|\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$. Dann gilt für $b \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$

$$\begin{aligned}
\omega(\zeta_{\varepsilon_1})(b) &= \sum_j x_j \cdot \varepsilon_1 F_{j|\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}}(b) \\
&= \sum_j x_j \cdot F_{j|\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}}(\varepsilon_1 b) \\
&= \sum_j x_j \cdot f_j(\varepsilon_1 b) = \varepsilon_1 b,
\end{aligned}$$

das heißt es gilt $\omega(\zeta_{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1 \cdot \mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}}$.
Wir versehen $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'})$ durch $((x \otimes y) \cdot \varphi)(z) := x \cdot \varphi(yz)$ mit einer $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$-Modulstruktur, und ω sowie ω_ε sind diesbezüglich linear.

Wir haben die Multiplikationsabbildung $\mu : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$, die durch $x \otimes y \mapsto xy$ induziert wird. μ ist ein $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebrenhomomorphismus. Setze $I := \mathrm{Ker}(\mu)$.
Das Tensorprdoukt $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$ wird durch

$$\begin{gathered}
\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \times \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}), \\
(a \otimes b, x \otimes \varphi) \mapsto ax \otimes b\varphi
\end{gathered}$$

zu einem $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$-Modul.

Lemma 4.3.2 (vgl. Claim 4.1.16 in [17])**.** *Es gilt $\varepsilon_2 \cdot I \cdot \zeta_{\varepsilon_1} = 0$ und $\sigma(\zeta_{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1 \cdot \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}$.*

Beweis. Wir berechnen für $b_1, b_2, b_3 \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$.

$$\omega((b_1 \otimes b_2) \cdot \zeta_{\varepsilon_1})(b_3) = ((b_1 \otimes b_2) \cdot \omega(\zeta_{\varepsilon_1}))(b_3) = \varepsilon_1 \cdot b_1 b_2 b_3.$$

Es gilt damit für alle Elementartensoren $y = y_1 \otimes y_2 \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ und alle $z \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$:

$$\begin{aligned} \omega(y \cdot \zeta_{\varepsilon_1})(z) &= ((y_1 \otimes y_2) \cdot \omega(\zeta_{\varepsilon_1})(z)) \\ &= \varepsilon_1 \cdot y_1 y_2 z \\ &= \omega((\mu(y) \otimes 1) \cdot \zeta_{\varepsilon_1})(z). \end{aligned}$$

Da wir jedes Element aus $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ als Summe von Elementartensoren schreiben können und ω ein Homomorphismus ist, folgt $\omega(y \cdot \zeta_{\varepsilon_1})(z) = 0$ für alle $y \in I = \mathrm{Ker}(\mu)$, das heißt $y \cdot \zeta_{\varepsilon_1}$ liegt im Kern von ω. Der Homomorphismus ω ist fast injektiv nach Lemma 4.3.1, also wird der Kern von ω insbesondere von ε_2 annuliert. Das zeigt die erste Gleichheit.
Bezeichne mit $\mathrm{tr}_{\varepsilon_1}$ die Spurabbildung auf $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}})$, definiert als Komposition

$$\mathrm{tr}_{\varepsilon_1} := \mathrm{ev}_{\varepsilon_1} \circ \omega_{\varepsilon_1}^{-1}.$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{ev}_{\varepsilon_1}$ die Evaluationsabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{\varepsilon_1} : \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}) &\to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}, \\ x \otimes \varphi &\mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathrm{Tr}_{|\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}(x) = \mathrm{tr}_{\varepsilon_1}(\mu_x)$ für $x \in \bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$, wobei $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{|\mathcal{F}'/\mathcal{F}}$ die Spurabbildung von $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ bezeichnet, denn wir können die Homomorphismen $\mu_x, \mathrm{tr}_{\varepsilon_1}, \omega_{\varepsilon_1}$ und $\mathrm{ev}_{\varepsilon_1}$ alle $\mathcal{F}$-linear auf die jeweiligen Moduln für $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ fortsetzen und erhalten dadurch die jeweiligen Homomorphismen für $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$.
Wir berechnen nun für $b \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$

$$\begin{aligned} \sigma(\zeta_{\varepsilon_1})(b) &= \sigma(\sum_j x_j \otimes \varepsilon_1 F_{j|\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}})(b) \\ &= \sum_j \varepsilon_1 F_{j|\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}}(x_j b) \\ &= \mathrm{ev}((1 \otimes b) \cdot \zeta_{\varepsilon_1}) \\ &= \mathrm{tr}_{\varepsilon_1}(\omega_{\varepsilon_1}((1 \otimes \varepsilon_1 b) \cdot \hat{\zeta}_{\varepsilon_1})) \\ &= \mathrm{tr}_{\varepsilon_1}((1 \otimes \varepsilon_1 b) \cdot \omega_{\varepsilon_1}(\hat{\zeta}_{\varepsilon_1})) \\ &= \mathrm{tr}_{\varepsilon_1}((1 \otimes \varepsilon_1 b) \cdot \mathrm{id}_{\bigoplus_i e_i \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}}) \\ &= \varepsilon_1 \cdot \mathrm{Tr}(b). \end{aligned}$$

□

$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ wird durch μ und $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ wird durch $x \otimes x' \cdot y \otimes y' = xy \otimes x'y'$ zu einem $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$-Modul.

Nach Lemma 4.2.3 wird der Kokern von τ von $\mathfrak{m}$ annuliert, deswegen und wegen Lemma 3.2.8 können wir

$$e_\varepsilon := (\mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \otimes \tau^{-1})(\varepsilon_2 \cdot \zeta_{\varepsilon_1}) \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$$

definieren.
Es gilt $\tau \circ \mu = \sigma \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \otimes \tau)$, also wegen Lemma 4.3.2 $\tau(\mu(e_\varepsilon))(b) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \mathrm{Tr}(b)$ für alle $b \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$, und somit

$$\mu(e_\varepsilon) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon, \tag{4.4}$$

denn τ ist injektiv. Außerdem ist

$$I \cdot e_\varepsilon = 0, \tag{4.5}$$

denn es gilt $(\mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \otimes \tau)(x \cdot e_\varepsilon) = x \cdot (\mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \otimes \tau)(e_\varepsilon) = 0$ für alle $x \in I$, da sowohl τ als auch $\mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}}$ $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$-linear sind, und wegen Lemma 4.3.2. Der Homomorphismus $\mathrm{id}_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}} \otimes \tau$ ist injektiv, da $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ ein flacher $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modul ist, also folgt $x \cdot e_\varepsilon = 0$.

Wir definieren die Abbildung (vgl. Proposition 3.1.4. in [17])

$$\begin{aligned} u_\varepsilon : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} &\to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \\ x &\mapsto e_\varepsilon \cdot (1 \otimes x). \end{aligned}$$

Die Abbildung u_ε ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$-Moduln, denn wir berechnen für $x, y, z \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$

$$\begin{aligned} (y \otimes z) \cdot e_\varepsilon(1 \otimes x) - e_\varepsilon(1 \otimes xyz) &= e_\varepsilon(y \otimes zx) - e_\varepsilon(1 \otimes xyz) \\ &= e_\varepsilon(y \otimes zx - 1 \otimes xyz) \\ &= (y \otimes zx - 1 \otimes xyz) e_\varepsilon \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, dass $y \otimes zx - 1 \otimes xyz$ in I liegt (siehe (4.5)).
Außerdem gilt $\mu \circ u_\varepsilon = \varepsilon \cdot \mathrm{id} : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ nach (4.4).

Lemma 4.3.3. *Der Homomorphismus $\mu : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ ist fast flach.*

Beweis. Setze $C := \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$.
Sei $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ beliebig und sei $g := \mathrm{id}_C \otimes f$. Sei $f : M \to N$ ein injektiver Homomorphismus von C-Moduln. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_C M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "u_\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dd, bend right=60, "h"'] & \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_C N \arrow[d, "u_\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \\
C \otimes_C M \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] & C \otimes_C N \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_C M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"'] & \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'} \otimes_C N
\end{tikzcd}$$

Sei $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes f)$. Dann liegt $u_\varepsilon \otimes \mathrm{id}(x)$ im Kern von g. Damit folgt $u_\varepsilon \otimes \mathrm{id}(x) = 0$, denn g ist injektiv. Somit ist auch $h(x) = \mu \otimes \mathrm{id}(u_\varepsilon \otimes \mathrm{id}(x)) = 0$. Aber $h(x) = \varepsilon x$, also wird x von ε annuliert. $\square$

Damit und mit Lemma 3.2.8 folgt, dass die Inklusion $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ fast schwach étale ist.

Lemma 4.3.4. *Die Inklusion $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ ist fast flach.*

Beweis. Schreibe $\mathcal{F}^{sep}$ als Vereinigung der endlichen separablen Teilerweiterungen $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}$, $i \in I$ für eine gerichtete Indexmenge I, für die $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ gilt, wenn $i \leq j$ ist. Sei M ein $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$-Modul. Seien für $j \geq i$

$$f_{ij} : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}} M \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j}} M,$$
$$x \otimes m \mapsto x \otimes m$$

die kanonischen Homomorphismen zwischen den Tensorprodukten. Diese bilden ein induktives System (von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Moduln).

Behauptung. Dann gilt $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} M = \operatorname{colim}_i(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}} M)$.

Beweis der Behauptung. Wir haben mit den f_{ij} kompatible kanonische surjektive Homomorphismen

$$u_i : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}} M \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} M,$$
$$x \otimes m \mapsto x \otimes m.$$

Seien $t_i : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}} M \to T$ mit den f_{ij} kompatible Homomorphismen in ein Testobjekt T. Dann definiere $c : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} M \to T$ folgendermaßen: sei $x \otimes y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} M$, also ist $x \otimes y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}} M$ (d.h. wir betrachten das Tensorprodukt von x und y über $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}$ anstatt über $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$). Dann sei $c(x \otimes y) = t_i(x \otimes y)$. Dann ist c ein wohldefinierter Homomorphismus, und es gilt $t_i = c \circ u_i$. Außerdem ist c eindeutig mit dieser Eigenschaft. $\square$

Sei $g : M \to N$ ein injektiver Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$-Moduln. Wir müssen zeigen, dass die induzierte Abbildung

$$\mathrm{id} \otimes g : \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} M \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}} N$$

fast injektiv ist. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{colim}_i(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}} M) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes g"] & \operatorname{colim}_i(\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_i}} N) \\
\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j}} M \arrow[u, "u_j"] \arrow[r, "(\mathrm{id} \otimes g)_j"] & \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j}} N \arrow[u, "u_j"]
\end{tikzcd}$$

Sei $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes g)$. Wir finden ein Urbild u in $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j}} M$ unter u_j, wobei wir j so groß wählen, dass $u \in \mathrm{Ker}((\mathrm{id} \otimes g)_j)$ ist. Dann wird u von $\mathfrak{m}$ annuliert, denn die Komposition $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ der Mutiplikationsabbildung $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j}$ mit der Inklusion $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ ist als Komposition von fast flachen Homomorphismen fast flach, also ist $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ ein fast flacher $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}_j}$-Modul. Also wird auch x von $\mathfrak{m}$ annuliert. □

Insgesamt sehen wir, dass $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ fast schwach étale ist, denn $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ ist flach ($\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ ist ein torsionsfreier $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modul und damit schon flach), und wir haben gezeigt, dass $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ fast flach ist.

4.4 Frobenius ist surjektiv

Sei $b \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$ ein Element, sodass $0 < \nu(b) \leq \nu(p)$ gilt.

Lemma 4.4.1. *Der Frobenius $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}, x \mapsto x^p$, ist surjektiv.*

Beweis. Nach [18, Lemma 1.4.26] liegt $\mathcal{F}^{sep}$ dicht in $\mathcal{F}^{alg}$. Sei $x \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ und $\varepsilon \geq \nu(b)$. Das Urbild des ε-Balls $B_\varepsilon(x)$ unter der Potenzierung mit p ist offen, da Polynome stetig sind. Damit finden wir ein $y \in \mathcal{F}^{sep}$, sodass $\nu(y^p - x) > \varepsilon$ gilt, also gilt $y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$. Dann gilt $y^p \equiv x \bmod (b)$. □

Definition (siehe Definition 3.5.8. in [17])**.** Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Wir definieren $A_{(m)}$ als A aufgefasst als $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebra via

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\Phi^m} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to A,$$

und analog definieren wir $B_{(m)}$. Hierbei sei Φ der Frobenius auf $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/p\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$.
Seien Φ_A beziehungsweise Φ_B der Frobenius auf A beziehungsweise B. Dann heißt f *invertierbar bis auf* Φ^m für ein $m \in \mathbb{N}$, wenn ein Homomorphismus (von Ringen) $f' : B \to A$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f'"] & A \\ \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \arrow[u] \arrow[r, "\Phi^m"'] & \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert und $f \circ f' = \Phi_B^m$ und $f' \circ f = \Phi_A^m$ gilt.

Lemma 4.4.2. *Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Homomorphismen von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Seien f und $g \circ f$ bis auf Φ^m invertierbar. Dann ist auch g invertierbar bis auf Φ^{2m}.*

Beweis. Sei f' ein Inverses von f bis auf Φ^m und h' ein Inverses von $h := g \circ f$ bis auf Φ^m. Setze $g' := \Phi_B^m \circ f \circ h'$. Dann berechnen wir

$$g \circ g' = g \circ \Phi_B^m \circ f \circ h' = \Phi_C^m \circ \Phi_C^m.$$

(Beachte, dass $g \circ \Phi_B^m = \Phi_C^m \circ g$ gilt.) Weiterhin berechnen wir auf ähnliche Art

$$\begin{aligned} g' \circ g &= \Phi_B^m \circ f \circ h' \circ g = f \circ h' \circ g \circ \Phi_B^m \\ &= f \circ h \circ g \circ f \circ f' = f \circ \Phi_A^m \circ f' \\ &= f \circ f' \circ \Phi_B^m = \Phi_B^m \circ \Phi_B^m. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4.3 (vgl. Theorem 3.5.13(i) in [17])**.** *Sei $f : A \to B$ ein fast schwach étaler surjektiver Homomorphismus von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren. Wenn f bis auf Φ^m invertierbar ist, dann ist f ein Fast-Isomorphismus.*

Beweis. (Wir haben auf A und B durch die Projektion $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ eine $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modulstruktur.)
Zunächst zeigen wir, dass für einen A-Modul M mit $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A M = 0$ schon $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} M = 0$ gilt, das heißt f ist fast treu-flach. Nach Lemma 4.1.10 können wir o.B.d.A. $M = A/I$ für ein Ideal $I \subseteq A$ annehmen, also müssen wir zeigen, dass aus

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B/BI = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A A/I = 0$$

schon

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} A/I = 0$$

folgt. Da $A \to B$ fast schwach étale ist, ist auch die induzierte Abbildung $\bar{f} : A/I \to B/BI$ fast schwach étale (Basiswechsel von $A \to B$ beziehungsweise $B \otimes_A B \to B$ bezüglich $A \to A/I$). Sei also

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B/BI = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} A/I \otimes_{A/I} B/BI = 0. \tag{4.6}$$

f ist invertierbar bis auf Φ^m, dasselbe gilt für $\bar{f}$. Damit ist der Homomorphismus $\Phi_{A/I}^m : A/I \to (A/I)_m$ fast null, also $\mathfrak{m}\Phi_{A/I}^m(A/I) = 0$. Es gilt also $\varepsilon^{p^m} \cdot 1 = 0$ für alle $\varepsilon \in \mathfrak{m}$, wobei $1 \in A/I$. Aber da die Bewertung auf $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ nicht diskret ist, gilt $\varepsilon \cdot 1 = 0$ für alle $\varepsilon \in \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m}A/I = 0$.
Wir zeigen nun, dass f fast injektiv ist:
Die Inklusion $\iota : \mathrm{Ker}(f) \to A$ ist injektiv, damit ist auch

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A \mathrm{Ker}(f) \to \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A A \cong \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B$$

injektiv, denn $f : A \to B$ ist fast flach. Das Bild dieser Abbildung ist

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \iota) = \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(f)B = 0.$$

Wir können es aufgrund der Injektivität nach Kap. I, §2.3, Remark 2 in [5] mit $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A \mathrm{Ker}(f)$ identifizieren, d.h. $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} B \otimes_A \mathrm{Ker}(f) = 0$. Also folgt $\mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathrm{Ker}(f) = 0$. □

Die Inklusion $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ ist fast schwach étale nach Abschnitt 3.1. Dann ist auch der durch die Projektion induzierte Homomorphismus $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ fast schwach étale, denn der Homomorphismus

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$$

entspricht dem Basiswechsel von $\mathfrak{o}_F \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ bezüglich der Projektion $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ und der Homomorphismus

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$$

entspricht dem Basiswechsel von $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ bezüglich

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}} \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}.$$

Beide Homomorphismen sind also fast flach nach Lemma 4.1.8.

Setze $A := \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$ und $B := \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Phi_A^m"] \arrow[d, "f"'] & A_{(m)} \arrow[d, "f_{(m)}"] \\
B \arrow[r, "\Phi_B^m"'] & B_{(m)}
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet $f_{(m)}$ den Homomorphismus $f : A \to B$ aufgefasst als Homomorphismus zwischen den $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Algebren $A_{(m)}$ und $B_{(m)}$ bezüglich der über den Frobenius erhaltenen Skalarmultiplikation.
Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Phi_A^m"] \arrow[d, "f"'] & A_{(m)} \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "\beta"] & B \otimes_A A_{(m)}
\end{tikzcd}$$

ist ein Pushout-Diagramm (in der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1), wobei α durch $a \mapsto 1 \otimes a$ und β durch $b \mapsto b \otimes 1$ gegeben sind (dann gilt $\alpha \circ \Phi_A^m = \beta \circ f$). Darum es existiert ein eindeutiger Homomorphismus h, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Phi_A^m"] \arrow[d, "f"'] & A_{(m)} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f_{(m)}"] & \\
B \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\Phi_B^m"'] & B \otimes_A A_{(m)} \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & B_{(m)}
\end{tikzcd} \tag{4.7}$$

Wir zeigen, dass h ein Fast-Isomorphismus ist (vgl. Theorem 3.5.13(ii) in [17]): h ist surjektiv, denn Φ_B ist nach Lemma 4.4.1 surjektiv.

$A_{(m)} \to B \otimes_A A_{(m)}$ ist fast schwach étale (Basiswechsel von $A \to B$ bezüglich $A \overset{\Phi_A}{\to} A_{(m)}$, vergleiche Lemma 4.1.8). $A_{(m)} \to B_{(m)}$ ist ebenfalls fast schwach étale, denn die $A_{(m)}$-Algebrastruktur von $B_{(m)}$ entspricht der von B als A-Modul. Also ist nach Lemma 4.1.9 h fast schwach étale. Wir betrachten weiterhin die Homomorphismen

$$B \overset{\mathrm{id}_B \otimes \Phi_A^m}{\longrightarrow} B \otimes_A A_{(m)} \overset{h}{\to} B_{(m)}.$$

$\mathrm{id}_B \otimes \Phi_A^m$ ist invertierbar bis auf Φ^m durch $B \otimes_A A_{(m)} \to B \cong B \otimes_{A_{(m)}} A_{(m)}, x \otimes y \mapsto x^{p^m} y$.

Die Komposition der beiden Abbildungen ist Φ_B^m, also ist h nach Lemma 4.4.2 invertierbar bis auf Φ^{2m}. Also ist h fast injektiv nach Lemma 4.4.3. Damit ist h ein Fast-Isomorphismus.

Lemma 4.4.4. *Sei $B := \mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}^{sep}}$ und $A := \mathfrak{o}_{\mathcal{F}}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$. Dann gilt $\mathfrak{m}\mathrm{Coker}(\Phi_A) = 0$.*

Beweis. Betrachte das folgende (nichtkommutative[2]) Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "f"'] & A_{(1)} \arrow[d, "f_{(1)}"'] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left=60, "pr_A"] & \\
B \arrow[r, "\Phi_B"] \arrow[d] \arrow[rr, bend right=10, "h"] & B_{(1)} \arrow[r, shift left, "k_\varepsilon"] \arrow[d, "pr_B"', "\beta"] \arrow[ddr, dotted, "\varphi_\varepsilon"] & B \otimes_A A_{(1)} \arrow[l, shift left] \arrow[dd, "g"] \\
0 \arrow[r] \arrow[drr, bend right=60, "i"'] & \mathrm{Coker}(\Phi_B) \arrow[dr, dotted, "\psi_\varepsilon"'] & \\
 & & \mathrm{Coker}(\Phi_A)
\end{tikzcd}$$

Dabei definiere den $\mathfrak{o}_{\mathcal{F}}$-Modulhomomorphismus $k_\varepsilon : B_{(1)} \to B \otimes_A \; A_{(1)}$ durch $x \mapsto \varepsilon y$, wobei $y \in B \otimes_A \; A_{(1)}$ ein Urbild von x unter h ist. Da h fast injektiv ist, ist k_ε wohldefiniert.

Es existiert ein eindeutiger Homomorphismus $g : B \otimes_A A_{(m)} \to \mathrm{Coker}(\Phi_A)$ mit $g \circ \alpha = pr_A$ und $g \circ \beta = 0$, da das Diagramm (4.7) kokartesisch ist. Definiere φ_ε als Komposition

$$\varphi_\varepsilon := g \circ k_\varepsilon.$$

[2] man könnte auch sagen: fast kommutative

Dann gilt $\varphi_\varepsilon \circ f_{(1)} = \varepsilon pr_A$, denn es gilt $g \circ \alpha = pr_A$ und $k_\varepsilon \circ f_{(1)} = \varepsilon\alpha$. Es gilt $g \circ \beta = 0$ und $k_\varepsilon \circ \Phi_B = \varepsilon\beta$, also $\varphi_\varepsilon \circ \Phi_B = g \circ k_\varepsilon \circ \Phi_B = g \circ \varepsilon\beta = 0$. Damit können wir die Pushout-Eigenschaft des unteren Quadrates benutzen (wir betrachten das untere Diagramm nun als Pushout von $\mathfrak{o}_\mathcal{F}$-Moduln). Es existiert also ein eindeutiger Modulhomomorphismus $\psi_\varepsilon : \mathrm{Coker}(\Phi_B) \to \mathrm{Coker}(\Phi_A)$, sodass das entsprechende Diagramm kommutiert. Es gilt $\psi_\varepsilon \circ pr_B = \varphi_\varepsilon$ und $\varphi_\varepsilon \circ f_{(1)} = \varepsilon pr_A$, also $\psi_\varepsilon \circ pr_B \circ f_{(1)} = \varepsilon pr_A$.
Es ist $\mathrm{Coker}(\Phi_B) = 0$, also $pr_B = 0$, also $\varepsilon pr_A = 0$, also gilt $\varepsilon\mathrm{Coker}(\Phi_A) = 0$. Da $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt $\mathfrak{m}\mathrm{Coker}(\Phi_A) = 0$. □

Lemma 4.4.5 (vgl. Proposition 6.6.6. in [17])**.** *Der Frobenius ist auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ surjektiv.*

Beweis. Wähle ein $\varepsilon \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ mit $\nu(b) > \nu(\varepsilon^p)$. Wir finden nach Lemma 4.4.4 für jedes $x \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}$ ein $y \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}$ mit $\varepsilon^p \cdot x - y^p \in b\mathfrak{o}_\mathcal{F}$. Daraus folgt, dass der Frobenius auf $\mathfrak{o}_\mathcal{F}/(b \cdot \varepsilon^{-p})\mathfrak{o}_\mathcal{F}$ surjektiv ist. Sei $b_1 \in \mathfrak{o}_\mathcal{F}$ ein Element mit $0 < \nu(b_1) \leq \nu(b)$ und seien $\mathrm{Fil}_1^\bullet(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}})$ beziehungsweise $\mathrm{Fil}_2^\bullet(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}})$ die b_1-adische bzw. b_1^p-adische Filtrierung auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}$. Die durch die Filtrierungen auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ induzierte Gruppentopologie ist dieselbe wie die Bewertungstopologie. Die Bewertungstopologie ist die eindeutige Gruppentopologie auf $\mathfrak{o}_\mathcal{F}$, sodass die Mengen $U_\gamma := \{x \in \mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}} | \, |x| < \gamma\}$ ein Fundamentalsystem von offenen Umgebungen der 0 bilden. Auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ hat man dann die Quotiententopologie. Die durch $\mathrm{Fil}_1^\bullet(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}})$ induzierte Topologie ist die eindeutige Gruppentopologie, sodass die Mengen $b_1^n \cdot \mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ ein Fundamentalsystem der 0 bilden (analog für $\mathrm{Fil}_2^\bullet(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}})$). Dann bilden die offenen Mengen des einen Fundamentalsystems auch ein Fundamentalsystem der 0 in der jeweils anderen Topologie.
Man rechnet nach, dass der Frobenius einen Morphismus von filtrierten abelschen Gruppen definiert, und der assoziierte Morphismus von graduierten abelschen Gruppen surjektiv ist. (Die assoziierte graduierte Gruppe zur b_1-adischen Filtrierung $\mathrm{gr}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}})$ ist gegeben durch

$$\mathrm{gr}_n(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}) = b_1^n \cdot (\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}})/b_1^{n+1} \cdot (\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}})$$

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}) = \bigoplus \mathrm{gr}_n(\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}).$$

Analog für die b_1^p-adische Filtrierung.) Dann folgt die Behauptung aus [5, Kap. III, §2, Nr. 8, Kor.2]. (Dabei benutzt man, dass obige Topologien übereinstimmen.) □

Bemerkung 4.4.6. In Charakteristik 0 ist der Frobenius auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}} \cong \mathfrak{o}_\mathcal{F}/p\mathfrak{o}_\mathcal{F}$ und in Charakteristik p auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}} = \mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ surjektiv.

Definition (Perfektoider Körper)**.** Sei K ein nichtdiskret bewerteter vollständiger Körper, sodass der Frobenius auf $\mathfrak{o}_K/(p)$ surjektiv ist. Dann heißt K *perfektoid.*

Wir erhalten nun den folgenden Satz:

Satz 4.4.7. *Sei F ein lokaler Körper und $\mathcal{F}/F$ eine tief verzweigte Erweiterung. Dann ist die Vervollständigung $\widehat{\mathcal{F}}$ perfektoid.*

5 Perfektoid impliziert tief verzweigt

5.1 Witt-Vektoren

Zunächst gehen wir auf strikte p-Ringe und Witt-Vektoren ein, die wir im weiteren Verlauf benötigen werden.

Definition (Strikter p-Ring)**.** Ein *strikter p-Ring R* ist ein p-torsionsfreier, bezüglich der p-adischen Topologie vollständiger und hausdorffscher Ring, sodass der Restklassenring $R/(p)$ perfekt ist.

Lemma 5.1.1 (II, §4 Lemma 1 in [20])**.** *Sei R ein Ring. Wenn $x \equiv y \bmod (p)$ für Elemente $x, y \in R$ gilt, dann gilt für alle $n \geq 0$*

$$x^{p^n} \equiv y^{p^n} \mod (p^{n+1}).$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ ist klar. Wir schreiben $x^{p^{n-1}} = y^{p^{n-1}} + p^n \cdot z$ für $n \geq 1$ und ein $z \in R$. Dann gilt mit der binomischen Formel

$$x^{p^n} = y^{p^n} + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} y^{p^n(p-i)} p^{ni} z^i + p^{np} z^p.$$

Daraus folgt das Lemma, denn p teilt alle Binomialkoeffizienten, und es gilt $pn \geq n + 1$. □

Lemma 5.1.2 (Lemma 1.1.4. in [12], siehe auch II, §4, Prop. 8 in [20])**.** *Sei $\bar{R}$ ein perfekter Ring (das heißt der Frobenius ist bijektiv) mit Charakteristik p und S ein p-adisch vollständiger hausdorffscher Ring. Sei $pr : S \to S/(p)$ die kanonische Projektion und $\bar{t} : \bar{R} \to S/(p)$ ein Ringhomomorphismus. Dann existiert eine eindeutige multiplikative Abbildung $t : \bar{R} \to S$ mit $pr \circ t = \bar{t}$. Es gilt $t(\bar{x}) \equiv x^{p^n} \bmod (p^{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in S$ mit $pr(x) = \bar{t}(\bar{x}^{p^{-n}})$.*

Beweis. Wir setzen

$$U_n(\bar{x}) := \{x^{p^n} \,|\, x \text{ ist Urbild von } \bar{t}(\bar{x}^{p^{-n}}) \text{ unter } pr : S \to S/(p)\}.$$

Die U_n bilden eine absteigende Sequenz. Wenn $x^{p^n}, y^{p^n} \in U_n(\bar{x})$ zwei Elemente sind, gilt $x \equiv y \bmod (p)$, also nach Lemma 5.1.1 $x^{p^n} \equiv y^{p^n} \bmod (p^{n+1})$, das heißt es gilt $x^{p^n} - y^{p^n} \in (p^{n+1})$. Sei $(u_n)_n$ eine Folge mit $u_n \in U_n(\bar{x})$. Da S vollständig ist, können wir $t(\bar{x}) := \lim_n u_n$ definieren. Das ist wohldefiniert. Die so definiert Abbildung kommutiert mit p-Potenzierung, denn wenn $\bar{x} = \bar{y}^p$ gilt, dann wird $U_n(\bar{y})$

durch Potenzieren mit p in $U_n(\bar{x})$ abgebildet. Durch Übergang zum Grenzwert folgt $t(\bar{y})^p = t(\bar{x})$. Die Abbildung t ist eindeutig, was man wie folgt sieht: Sei $t' : \bar{R} \to S$ eine weitere Abbildung, die mit p-Potenzierung kommutiert und die $pr \circ t' = \bar{t}$ erfüllt. Dann gilt, da $\bar{R}$ perfekt ist, $t'(\bar{x}) = t'(\bar{x}^{p^{-n}})^{p^n}$ und $pr(t'(\bar{x}^{p^{-n}})) = \bar{t}(\bar{x}^{p^{-n}})$. Also liegt $t'(\bar{x})$ in $U_n(\bar{x})$ für alle n, woraus die Eindeutigkeit von t folgt. Außerdem folgt $\bigcap_n U_n(\bar{x}) = t(\bar{x})$.
Die Multiplikativität von t folgt schließlich daraus, dass xy eine p^n-te Potenz ist, wenn x und y p^n-te Potenzen sind. □

Definition (Teichmüller-Abbildung)**.** Sei in der Situation von Lemma 5.1.2 $R = S$. Dann hat die Projektion $pr : R \to R/(p)$ einen eindeutigen multiplikativen Schnitt $[\cdot] : R/(p) \to R$, die *Teichmüller-Abbildung*.

Bemerkung 5.1.3. Jedes $x \in R$ hat eine eindeutige Darstellung als konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$ mit Elementen $\bar{x}_n \in R/(p)$. In der Tat: wir finden ein $\bar{x}_0$ mit $x - [\bar{x}_0] \equiv 0 \mod (p)$. Schreibe dann $x = [\bar{x}_0] + px_1$. Analog finden wir ein $\bar{x}_1$, sodass $x = [\bar{x}_0] + p\bar{x}_1 + p^2 x_2$ gilt. Iterativ erhalten wir eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$, die gegen x konvergiert. Die Eindeutigkeit ist klar.

Lemma 5.1.4 (Lemma 1.1.6. in [12])**.** *Sei R ein strikter p-Ring, S ein p-adisch vollständiger Ring und $pr : S \to S/(p)$ die kanonische Projektion. Sei $t : R/(p) \to S$ eine multiplikative Abbildung, sodass $\bar{t} = pr \circ t$ ein Ringhomomorphismus ist. Dann definiert*

$$T\Big(\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n t(\bar{x}_n) \qquad (\bar{x}_0, \bar{x}_1, ... \in R/(p)) \tag{5.1}$$

einen eindeutigen Homomorphismus $T : R \to S$, sodass $T \circ [\cdot] = t$ gilt.

Beweis. Wir zeigen per Induktion, dass für jede natürliche Zahl n durch T eine additive Abbildung $R/(p^n) \to S/(p^n)$ induziert wird.
Für $n = 1$ ist das klar, da $pr \circ t$ ein Homomorphismus ist. Wir nehmen an, dass die Behauptung für ein $n \geq 1$ stimmt. Sei $x = [\bar{x}] + px_1, y = [\bar{y}] + py_1, z = [\bar{z}] + pz_1 \in R$ mit $x + y = z$. Dann ist $t(\bar{x}^{p^{-n}}) + t(\bar{y}^{p^{-n}})$ ein Urbild von $\bar{t}(\bar{z}^{p^{-n}}) = \bar{t}((\bar{x} + \bar{y})^{p^{-n}}) = \bar{t}(\bar{x}^{p^{-n}}) + \bar{t}(\bar{y}^{p^{-n}})$ unter pr, also gilt nach Lemma 5.1.2

$$t(\bar{z}) \equiv (t(\bar{x}^{p^{-n}}) + t(\bar{y}^{p^{-n}}))^{p^n} \qquad \mod (p^{n+1})$$

und analog

$$[\bar{z}] \equiv ([\bar{x}^{p^{-n}}] + [\bar{y}^{p^{-n}}])^{p^n} \qquad \mod (p^{n+1}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T([\bar{z}]) - T([\bar{x}]) - T([\bar{y}]) &\equiv T([\bar{z}]) - t(\bar{x}) - t(\bar{y}) \qquad \mod (p^{n+1}) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{p^n-1} \binom{p^n}{i} t(\bar{x}^{ip^{-n}} \bar{y}^{1-ip^{-n}}) \qquad \mod (p^{n+1}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Es gilt $\frac{1}{p}\binom{p^n}{i} \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, ..., p^n - 1$. Deswegen gilt

$$z_1 - x_1 - y_1 = \frac{[\bar{x}] + [\bar{y}] - [\bar{z}]}{p} \equiv \sum_{i=1}^{p^n-1} \frac{1}{p}\binom{p^n}{i} t(\bar{x}^{ip^{-n}} \bar{y}^{1-ip^{-n}}) \qquad \text{mod } (p^n).$$

Aufgrund der Induktionsannahme erhält man durch Anwenden von T und Multiplizieren mit p

$$pT(z_1) - pT(x_1) - pT(y_1) \equiv -\sum_{i=1}^{p^n-1} \binom{p^n}{i} t(\bar{x}^{ip^{-n}} \bar{y}^{1-ip^{-n}}) \qquad \text{mod } (p^{n+1}). \quad (5.3)$$

Da $T(x) = T([\bar{x}]) + pT(x_1)$ gilt (ebenso für y und z), folgt aus (5.2) und (5.3)

$$T(z) - T(x) - T(y) \equiv 0 \qquad \text{mod } (p^{n+1}).$$

Damit ist T additiv. Da t multiplikativ ist, ist auch T multiplikativ. □

Satz 5.1.5. *Sei $\bar{R}$ ein perfekter Ring von Charakteristik p. Dann existiert ein eindeutiger strikter p-Ring $W(\bar{R})$ mit $W(\bar{R})/(p) = \bar{R}$.*

Beweis. Siehe [20, II, § 5, Theorem 5]. □

Sei nun $(X_0, ..., X_n, ...)$ eine Sequenz von Unbestimmten. Wir betrachten die folgenden Polynome (*Witt-Polynome*):

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= X_0, \\
\Phi_1 &= X_0^p + pX_1, \\
&\;\;... \\
\Phi_n &= \sum_{i=0}^{i=n} p^i X_i^{p^{n-i}} = X_0^{p^n} + ... + p^n X_n \\
&\;\;...
\end{aligned}$$

Setze $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[p^{-1}]$. Dann können wir die X_i als Polynome in den Φ_i mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}'$ ausdrücken:

$$X_0 = \Phi_0, \quad X_1 = p^{-1}\Phi_1 - \Phi_0^p, \quad ...$$

Sei $(Y_0, ..., Y_n, ...,)$ eine andere Sequenz von Unbestimmten.

Satz 5.1.6. *Für jedes $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ existiert eine eindeutige Sequenz $(\varphi_0, ..., \varphi_n, ...)$ in $\mathbb{Z}[X_0, ..., X_n, ..., Y_0, ..., Y_n, ...]$, sodass*

$$\Phi_n(\varphi_0, ..., \varphi_n, ...) = F(\Phi_n(X_0, ...), \Phi_n(Y_0, ...)) \qquad \text{für } n \geq 0$$

gilt.

Beweis. Siehe [20, II, § 6, Theorem 6]. □

Wir betrachten nun die Polynome

$$F(X,Y) = X + Y, \quad H(X,Y) = X - Y, \quad \text{und} \qquad G(X,Y) = XY.$$

Wir bezeichnen die Polynome $\varphi_0, ..., \varphi_n, ...$, die gemäß Satz 5.1.6 F beziehungsweise H beziehungsweise G zugeordnet werden, mit $S_0, ..., S_n, ...$, beziehungsweise $D_0, ..., D_n, ...$ beziehungsweise $P_0, ..., P_n, ...$
Sei R ein Ring und $a = (a_0, ..., a_n, ...)$ und $b = (b_0, ..., b_n, ...)$ Elemente aus $R^{\mathbb{N}}$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} a + b &= (S_0(a,b), ..., S_n(a,b), ...) \\ a \cdot b &= (P_0(a,b), ..., P_n(a,b), ...) \end{aligned}$$

Satz 5.1.7 (II, § 6, Theorem 7 in [20])**.** *Durch die so definierte Addition und Multiplikation wird $R^{\mathbb{N}}$ zu einem kommutativen Ring mit* 1*, dem* Ring der Witt-Vektoren *mit Koeffizienten in R. Wir bezeichnen diesen Ring mit $W(R)$.*

Beweis. Sei $a = (a_0, ..., a_n, ...) \in R^{\mathbb{N}}$ ein Witt-Vektor. Wir haben die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_* : W(R) &\to R^{\mathbb{N}}, \\ (a_0, ..., a_n, ...) &\mapsto (\Phi_0(a), ..., \Phi_n(a), ...). \end{aligned}$$

Diese ist ein Ringhomomorphismus nach Definition der S_n bzw. P_n. Wenn p in R invertierbar ist, dann ist W_* ein Isomorphismus. Dann ist $W(R)$ ein kommutativer Ring mit Einselement $(1, 0, ...)$. Wenn der Satz für einen Ring R gilt, dann auch für jeden Teilring und Quotienten. Er gilt für jeden Polynomring der Form $\mathbb{Z}'[T_\alpha]$, damit für alle Ringe R, denn durch $\mathbb{Z}[T_{\alpha \in A}] \to A, T_\alpha \mapsto \alpha$ wird ein surjektiver Ringhomomorphismus definiert, sodass wir R als Quotienten von $\mathbb{Z}[T_\alpha]$ schreiben können. □

Satz 5.1.8. *Sei $\bar{R}$ ein perfekter Ring von Charakteristik p und H der strikte p-Ring mit Restklassenring $\bar{R}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} W(\bar{R}) &\to H, \\ (\bar{a}_0, ..., \bar{a}_i, ...) &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} p^i [\bar{a}_i]^{p^{-i}} \end{aligned}$$

ein Ringisomorphismus. Insbesondere ist $W(\bar{R})$ ein strikter p-Ring mit Restklassenring $\bar{R}$.

Beweis. Siehe [20, II, § 6, Theorem 8]. □

5.2 Tilting

Wir wollen nun den *Tilt* eines perfektoiden Körpers von Charakteristik 0 definieren. Dazu halten wir uns an die Vorlesung "Galois Representations and (φ, Γ)-modules", die 2015 von Peter Schneider in Münster gehalten wurde ([18]).

Sei für den den Rest des Kapitels K ein perfektoider Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$. Sei die Bewertung ν auf K so normalisiert, dass $\nu(p) = 1$ gilt. Durch $|x| := p^{-\nu(x)}$ wird eine nichtarchimedische multiplikative Norm auf K definiert.

Wir definieren einen Ring $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ als projektiven Limes über die Quotienten $\mathfrak{o}_K/(p)$, wobei die Abbildungen zwischen den $\mathfrak{o}_K/(p)$ durch Potenzieren mit p gegeben sind:

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}_{K^\flat} &:= \varprojlim_{(\cdot)^p} \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K \\ &= \{(x_0 \bmod p\mathfrak{o}_K, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_K, ...) \in (\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K)^{\mathbb{N}_0} \mid x_{i+1}^p \equiv x_i \bmod p\mathfrak{o}_K\}.\end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.1 (siehe Remark 1.4.4 in [18]). Da Potenzierung mit p ein Endomorphismus von $\mathfrak{o}_K/(p)$ als $\mathbb{F}_p$-Algebra ist, ist $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ eine $\mathbb{F}_p$-Algebra. Diese ist perfekt.

Beweis. Sei $x = (x_0 \bmod p\mathfrak{o}_K, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_K, ...) \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Falls $x^p = 0$ ist, dann ist $x_i \equiv x_{i+1}^p \equiv 0 \bmod p\mathfrak{o}_K$ für alle $i \geq 0$. Andererseits sei

$$x^{1/p} := (x_1 \bmod p\mathfrak{o}_K, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_K, ...).$$

Dann gilt $(x^{1/p})^p = x$. □

Bemerkung 5.2.2. Wir können Lemma 5.1.2 und 5.1.4 auf die Projektion auf den ersten Eintrag $\bar{\theta}_K = \bar{\theta} : \mathfrak{o}_{K^\flat} = \varprojlim \mathfrak{o}_K/(p) \to \mathfrak{o}_K/(p)$ anwenden und erhalten eine multiplikative Abbildung $\theta_K = \theta : \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_K$ sowie einen Homomorphismus $\Theta_K = \Theta : W(\mathfrak{o}_{K^\flat}) \to \mathfrak{o}_K$ (siehe auch [18, Lemma 1.4.18]).

Bemerkung 5.2.3. Wir können θ auch etwas konkreter angeben (siehe [18, Abschnitt 1.4]):
Sei $x = (x_0 \bmod p\mathfrak{o}_K, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_K, ...,) \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ ein beliebiges Element. Wir wählen für jedes $i \geq 0$ einen Repräsentanten $x_i \in \mathfrak{o}_K$. Dann gilt $x_{i+1}^p \equiv x_i \bmod p\mathfrak{o}_K$ und somit nach Lemma 5.1.1 $x_{i+1}^{p^{i+1}} \equiv x_i^{p^i} \bmod p^{i+1}\mathfrak{o}_K$. Damit existiert der Limes

$$\theta(x) := \lim_{i\to\infty} x_i^{p^i} \in \mathfrak{o}_K.$$

Wenn $y_i \in \mathfrak{o}_K$ andere Elemente mit $y_i \equiv x_i \bmod p\mathfrak{o}_K$ sind, dann gilt nach Lemma 5.1.1 $y_i^{p^i} \equiv x_i^{p^i} \bmod p^{i+1}\mathfrak{o}_K$. Damit ist $\lim_{i\to\infty} y_i^{p^i} = \lim_{i\to\infty} x_i^{p^i}$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}_{K^\flat} &\to \mathfrak{o}_K, \\ x &\mapsto \theta(x)\end{aligned}$$

eine wohldefinierte multiplikative Abbildung ist, sodass $\theta(x) \equiv x_0 \bmod p\mathfrak{o}_K$ gilt. Damit ist θ die eindeutige multiplikative Abbildung aus Lemma 5.1.2.

Lemma 5.2.4. *Die Abbildung*

$$\varprojlim_{(\cdot)^p} \mathfrak{o}_K \xrightarrow{\cong} \mathfrak{o}_{K^\flat}$$
$$(x_0..., x_i, ...) \mapsto (x_0 \operatorname{mod} p\mathfrak{o}_K, ..., x_i \operatorname{mod} p\mathfrak{o}_K, ...)$$

ist eine multiplikative Bijektion mit Inversem $x \mapsto (\theta(x), ..., \theta(x^{1/p^i}), ...,)$.

Beweis. Analog wie Lemma 1.4.5 in [18]. □

Lemma 5.2.5. *Die Abbildung*

$$|\cdot|_\flat : \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$x \mapsto |\theta(x)|$$

ist ein nichtarchimedischer Absolutbetrag. Außerdem gilt

(i) $|\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat = |\mathfrak{o}_K|$.

(ii) $x\mathfrak{o}_{K^\flat} \subseteq y\mathfrak{o}_{K^\flat}$ *gilt für alle* $x, y \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ *genau dann, wenn* $|x|_\flat \leq |y|_\flat$ *ist.*

(iii) $\mathfrak{m}_{K^\flat} := \{x \in \mathfrak{o}_{K^\flat} : |x|_\flat < 1\}$ *ist das einzige maximale Ideal in* $\mathfrak{o}_{K^\flat}$.

(iv) Sei $z \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ *ein Element mit* $|z|_\flat = |p|$. *Dann induziert die Projektionsabbildung* $(x_0 \operatorname{mod} p\mathfrak{o}_K, ..., x_i \operatorname{mod} p\mathfrak{o}_K, ...) \mapsto x_0 + p\mathfrak{o}_K$ *einen Ringisomorphismus* $\mathfrak{o}_{K^\flat}/z\mathfrak{o}_{K^\flat} \cong \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$. *Insbesondere gibt es einen Isomorphismus* $\mathfrak{o}_{K^\flat}/\mathfrak{m}_{K^\flat} \cong \mathfrak{o}_K/\mathfrak{m}_K$.

Beweis. Analog wie Lemma 1.4.6 in [18]. □

Nach dem vorherigen Lemma ist $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ ein Integritätsbereich. Sei $z \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ ein Element mit $|z|_\flat = |p|$. Wir bezeichnen den Quotientenkörper von $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ mit $K^\flat$. Wir können jedes Element aus $K^\flat$ als $\frac{x}{z^m}$ mit $x \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ und $m \geq 0$ schreiben. Die Funktion $|\cdot|_\flat$ setzt sich per Multiplikativität auf $K^\flat$ fort und definiert einen nichtarchimedischen Absolutbetrag auf $K^\flat$. Es gilt nach vorherigem Lemma $|K| = |K^\flat|_\flat$ und $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ ist der Bewertungsring von $K^\flat$. Wir nennen $K^\flat$ den *Tilt* von K.

Satz 5.2.6. $K^\flat$ *mit* $|\cdot|_\flat$ *ist ein perfekter und vollständiger nichtarchimedisch bewerteter Körper von Charakteristik* p.

Beweis. Analog wie Proposition 1.4.7 in [18]. □

Lemma 5.2.7 (siehe Lemma 1.4.18 in [18])**.** *Der Homomorphismus*

$$\Theta : W(\mathfrak{o}_{K^\flat}) \to \mathfrak{o}_K$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n] \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n \theta(\bar{x}_n)$$

ist surjektiv.

Beweis. Da K perfektoid ist, finden wir für jedes $x \in \mathfrak{o}_K$ ein Element $y_0 \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ der Form $y_0 = (x \bmod p\mathfrak{o}_K, ...)$. Dann gilt $x - \theta(y_0) = x_2 \cdot p$ für ein $x_2 \in \mathfrak{o}_K$. Induktiv finden wir Elemente $x_n \in \mathfrak{o}_K$ und $y_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$, sodass $x_n - \theta(y_n) = x_{n+1} \cdot p$ für alle $n \geq 1$ gilt. Dann gilt

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \theta(y_n) = \Theta(\sum_{n=0}^{\infty} p^n [y_n]).$$

□

Sei nun K^{alg} ein algebraischer Abschluss von K und $\widehat{K^{alg}}$ seine Vervollständigung (dabei setzen wir $|\cdot|$ eindeutig auf K^{alg} und kanonisch auf $\widehat{K^{alg}}$ fort) . Alle im Folgenden betrachteten perfektoiden Körper in Charakteristik 0 seien Zwischenkörper von $\widehat{K^{alg}}/K$, sofern nichts anderes gesagt wird.

Lemma 5.2.8 (siehe Remark 1.4.1 in [18])**.** *$\widehat{K^{alg}}$ ist algebraisch abgeschlossen. Insbesondere ist $\widehat{K^{alg}}$ perfektoid.*

Beweis. Wir nehmen an, dass eine nichttriviale endliche Erweiterung $E/\widehat{K^{alg}}$ existiert. Wir finden einen Erzeuger x dieser Körpererweiterung in $\mathfrak{o}_E$. Der ganze Abschluss von $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$ in E stimmt mit $\mathfrak{o}_E$ überein. Damit ist x ganz über $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$. Da $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$ ganzabgeschlossen ist, liegen die Koeffizienten des Minimalpolynoms $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0$ von x in $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$. Sei A die Menge der Nullstellen von $P(X)$. Wir wählen eine reelle Zahl $0 < r < \min\{|a' - a| \,|\, a \neq a' \text{ in } A\}$ sowie Elemente $b_i \in \mathfrak{o}_{K^{alg}}$ für $0 \leq i < d$, sodass $|b_i - a_i| < r^d$ ist. Das Polynom $Q(X) := X^d + b_{d-1}X^{d-1} + ... + b_0 \in \mathfrak{o}_{K^{alg}}[X]$ hat eine Nullstelle $b \in \mathfrak{o}_{K^{alg}}$ (da $\mathfrak{o}_{K^{alg}}$ ganzabgeschlossen ist, liegen alle Nullstellen in $\mathfrak{o}_{K^{alg}}$). Dann gilt

$$P(b) = P(b) - Q(b) = (a_{d-1} - b_{d-1}b^{d-1} + ... + (a_0 - b_0), \text{ also } |P(b)| < r^d.$$

Andererseits haben wir

$$P(b) = \Pi_{a' \in A}(b - a'),$$

also

$$r^d > |P(b)| \geq (\min\{|b - a'| \,|\, a' \in A\})^d = |b - c|^d$$

für ein $c \in A$. Daraus folgt $|b - c| < r$. Nach Krasners Lemma (siehe zum Beispiel [18, Remark 1.4.1]) gilt nun $c \in \widehat{K^{alg}}(b) = \widehat{K^{alg}}$. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung 5.2.9 (siehe 24.14 und 24.15 in [14]). Wenn $(F, |\cdot|)$ ein nichtarchimedisch bewerteter Körper von Charakteristik p ist, dann ist die Vervollständigung eines algebraischen Abschlusses $\widehat{F^{alg}}$ algebraisch abgeschlossen.

Beweis der Bemerkung. Wir können mit demselben Beweis wie in Bemerkung 5.2.8 folgern, dass die Vervollständigung eines separabel-algebraischen Abschlusses $\widehat{F^{sep}}$ von F separabel-algebraisch abgeschlossen ist. Dann ist $\widehat{F^{sep}}$ aber schon algebraisch abgeschlossen, denn sei $a \in \widehat{F^{sep}} \setminus \{0\}$ ein Element und α das eindeutige Element in einem algebraischen Abschluss von $\widehat{F^{sep}}$, das $\alpha^p = a$ erfüllt. Wir müssen zeigen, dass α in $\widehat{F^{sep}}$ liegt. Sei dazu $t \in \widehat{F^{sep}} \setminus \{0\}$ ein Element mit $|t| < 1$ und $f_n(X) := X^p - t^n X - a$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(X) = X^p - a$. Es ist $f_n'(X) = t^n$, also ist f_n separabel. Damit zerfällt f_n über $\widehat{F^{sep}}$ in Linearfaktoren. Wir können annehmen, dass $|a| \leq 1$ gilt, also erfüllt mindestens eine Nullstelle α_n von f_n auch $|\alpha_n| \leq 1$. Daraus folgt $|\alpha_n^p - a| \to 0$ für $n \to \infty$. Aber dann ist $(\alpha_n)_n$ eine Cauchy-Folge mit Grenzwert α, da die Nullstellen eines Polynoms stetig als Funktionen in den Koeffizienten sind. □

Seien $K \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \widehat{K^{alg}}$ perfektoide Körper. Es gilt $\mathfrak{o}_{L_1} \cap p\mathfrak{o}_{L_2} = p\mathfrak{o}_{L_1}$. Damit ist die natürliche Abbildung $\mathfrak{o}_{L_1}/p\mathfrak{o}_{L_1} \hookrightarrow \mathfrak{o}_{L_2}/p\mathfrak{o}_{L_2}$ injektiv, also können wir $L_1^\flat$ in natürlicher Weise als Unterkörper von $L_2^\flat$ betrachten.

Lemma 5.2.10 (siehe Lemma 1.4.10 in [18])**.** *Es ist $(\widehat{K^{alg}})^\flat$ algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Sei $P(X) = X^d + x_{(d-1)}X^{d-1} + ... + x_{(0)} \in \mathfrak{o}_{(\widehat{K^{alg}})^\flat}[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom mit $d \geq 1$. Wir zeigen, dass dann schon $d = 1$ gilt, indem wir eine Nullstelle von $P(X)$ in $\mathfrak{o}_{(\widehat{K^{alg}})^\flat}$ konstruieren. Wenn $x_{(j)} = (x_{j,0}, ..., x_{j,i}, ...)$ ist, dann haben wir eine Familie von Polynomen $P_i(X) = X^d + x_{d-1,i}X^{d-1} + ... + x_{0,i}$ in $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}[X]$. Sei $B_i \subseteq \mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}[X]$ die Menge der Nullstellen von $P_i(X)$. Da $\widehat{K^{alg}}$ algebraisch abgeschlossen ist, sind alle diese B_i nichtleer.. Außerdem gilt $B_{i+1}^p \subseteq B_i$ für alle $i \geq 0$. Es ist $B := \varprojlim_{(\cdot)^p} B_i$ genau die Menge der Nullstellen von $P(X)$ in $\mathfrak{o}_{(\widehat{K^{alg}})^\flat}$. Wir müssen also zeigen, dass B nichtleer ist.
Wir wählen für alle $i \geq 0$ ein normiertes Polynom $\tilde{P}_i(X)$ in $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}[X]$, das modulo $p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$ gleich $P_i(X)$ ist. Sei $\tilde{A}_i \subseteq \mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$ die Menge der Nullstellen von $\tilde{P}_i(X)$, die nichtleer ist, da $\widehat{K^{alg}}$ algebraisch abgeschlossen ist (da $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$ ganzabgeschlossen ist, liegen alle Nullstellen in $\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$). Wir setzen $A_i := \{a^{p^{d-1}} \mod p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}} \,|\, a \in \tilde{A}_{i+d-1}\}$. Nach Konstruktion gilt $A_i \subseteq B_i$. Wir wollen nun zeigen, dass $A_{i+1}^p \subseteq A_i$ gilt. Sei dazu $a \in \tilde{A}_{i+d}$ Dann ist

$$P_{i+d-1}(a^p \mod p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}) = P_{i+d}(a \mod p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}})^p = 0,$$

also $\tilde{P}_{i+d-1}(a^p) \in p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$. Es ist $\tilde{P}_{i+d-1}(X) = \Pi_{b\in\tilde{A}_{i+d-1}}(X-b)^{m_b}$ mit geeigneten $m_b \geq 1$. Daraus folgt

$$\Pi_{b\in\tilde{A}_{i+d-1}}(a^p - b)^{m_b} \in p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}.$$

Damit erfüllt mindestens einer der d Faktoren $a^p - b \in p^{1/d}\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$. Nach Lemma 5.1.1 erhalten wir $a^{p^d} - b^{p^{d-1}} \in p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}}$, also

$$(a^{p^{d-1}} \mod p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}})^p = b^{p^{d-1}} \mod p\mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}} \in A_i.$$

Wir wollen zeigen, dass $\varprojlim_{(\cdot)^p} A_i \subseteq B$ nichtleer ist. Dazu bemerken wir, dass wir für alle $i \geq 0$ eine absteigende Sequenz von nichtleeren Teilmengen

$$A_i \supseteq A_{i+1}^p \supseteq A_{i+2}^{p^2} \supseteq ...$$

haben. Da A_i endlich ist, wird diese Sequenz stabil, das heißt wir finden ein $j(i) \geq 0$, sodass

$$A_i' := A_{i+j(i)}^{p^{j(i)}} = A_{i+j(i)+1}^{p^{j(i)+1}} = ...$$

gilt. Wir können die $j(i)$ so wählen, dass $i_1 + j(i_1) \leq i_2 + j(i_2)$ gilt, wenn $i_1 \leq i_2$ ist. Dann haben wir $j(i+1) - j(i) + 1 \geq 0$. Wir berechnen

$$(A_{i+1}')^p = A_{i+1+j(i+1)}^{p^{j(i+1)+1}} = A_{i+j(i)+(j(i+1)-j(i)+1)}^{p^{j(i)+(j(i+1)-j(i)+1)}} = A_{i+j(i)}^{pj(i)} = A_i'$$

für alle $i \geq 0$. Damit ist $\varprojlim_{(\cdot)^p} A_i \supseteq \varprojlim_{(\cdot)^p} A_i' \neq \emptyset$, denn die Abbildungen im rechten projektiven Limes sind surjektiv. $\square$

5.3 Untilting

In diesem Abschnitt definieren wir den "Untilt" eines perfektoiden Körpers von Charakteristik p und zeigen, dass Tilten und Untilten invers zueinander sind.

Im Folgenden sei $\mathfrak{o}_F$ der Bewertungsring eines perfekten Körpers F von Charakteristik p mit multiplikativer nichtarchimedischer Norm $|\cdot|_\flat$, bezüglich derer F vollständig ist, das heißt F ist ein perfektoider Körper von Charakteristik p (dabei ist die Wertegruppe des Betrags dicht in $\mathbb{R}$, weil F perfekt ist).

Lemma 5.3.1. *Die Polynome $S_n(X_0, X_1^p, ..., X_n^{p^n}, Y_0, Y_1^p, ..., Y_n^{p^n})$ sind homogen von Grad p^n. Die Polynome $S_n(X_0, 0, ..., 0, Y_0, 0, ..., 0)$ sind außerdem durch $X_0 + Y_0$ teilbar (in $\mathbb{Z}[X_0, Y_0]$).*

Beweis. Wir zeigen die Aussage per Induktion nach n.[1].
Setze $\tilde{S}_n = \tilde{S}_n(X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_n) := S_n(X_0, X_1^p, ..., X_n^{p^n}, Y_0, Y_1^p, ..., Y_n^{p^n})$.
Es gilt $S_0(X_0, Y_0) = X_0 + Y_0$, also gilt die Behauptung für $n = 0$.
Gelte die Behauptung für $n-1$ für ein beliebiges n. Es gilt

$$\begin{aligned} p^n \tilde{S}_n &= \Phi_n(X_0, ..., X_n^{p^n}) + \Phi_n(Y_0, ..., Y_n^{p^n}) - \Phi_{n-1}(\tilde{S}_0^p, ..., \tilde{S}_{n-1}^p) \\ &= X_0^{p^n} + ... + p^n X_n^{p^n} + Y_0^{p^n} + ... + p^n Y_n^{p^n} - \tilde{S}_0^{p^n} - ... - p^{n-1}\tilde{S}_{n-1}^p. \end{aligned}$$

[1]Der Beweis stammt aus einem Vortrag, den Danial Sanusi im Wintersemester 15/16 im Seminar "Ausgewählte Themen zu (φ, Γ)-Moduln" in Münster gehalten hat.

Die Behauptung folgt damit aus der Induktionsvoraussetzung.
Setzen wir $X_1 = ... = X_n = Y_1 = ...Y_n = 0$, haben wir

$$\begin{aligned} p^n \tilde{S}_n &= X_0^{p^n} + Y_0^{p^n} - \tilde{S}_0^{p^n} - ... - p^{n-1}\tilde{S}_{n-1}^p \\ &= (X_0 + Y_0) \cdot (\sum_{i+j=p^n-1} X_0^i Y_0^j) - \tilde{S}_0^{p^n} - ... - p^{n-1}\tilde{S}_{n-1}^p, \end{aligned}$$

und wir folgern ebenfalls per Induktion nach n, dass $S_n(X_0, ..., 0, Y_0, ..., 0)$ durch $X_0 + Y_0$ teilbar ist.

□

Lemma 5.3.2 (siehe Lemma 1.7.2 in [12]). *Sei $r \in (0,1]$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} || \cdot ||_r : W(\mathfrak{o}_F) &\to [0,1], \\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n] &\mapsto \sup_{n\geq 0} \{r^n |\bar{x}_n|_\flat\} \end{aligned}$$

definiert eine multiplikative Norm auf $W(\mathfrak{o}_F)$, bezüglich derer $W(\mathfrak{o}_F)$ vollständig ist.

Beweis. [2] Es ist klar, dass $||x||_r = 0$ für $x \in W(\mathfrak{o}_F)$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ ist.
Um die strikte Dreiecksungleichung zu zeigen, betrachten wir Elemente $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$ und $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{y}_n]$ aus $W(\mathfrak{o}_F)$.
Für ein Monom $g = X_0^{i_0} \cdot ... \cdot X_n^{i_n} Y_0^{j_0} \cdot ... \cdot Y_n^{j_n} \in \mathbb{Z}[X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_n]$ mit $i_0 + ... + i_n + j_0 + ... + j_n = p^n$ gilt

$$\begin{aligned} r^{np^n} |\bar{x}_0^{i_0} ... \bar{x}_n^{i_n} \bar{y}_0^{j_0} ... \bar{y}_n^{j_n}|_\flat &= r^{n(i_0+...+i_n+j_0+...+j_n)} |\Pi_{m=0}^n \bar{x}_m^{i_m} \Pi_{m=0}^n \bar{y}_m^{j_m}|_\flat \\ &\leq \Pi_{m=0}^n (r^n |\bar{x}_m|_\flat)^{i_m} \Pi_{m=0}^n (r^n |\bar{y}_m|_\flat)^{j_m} \\ &\leq \max\{||x||_r, ||y||_r\}^{i_0+...+i_n+j_0+...+j_n} \\ &= \max\{||x||_r, ||y||_r\}^{p^n}. \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 5.3.1 folgt

$$r^{np^n} |S_n(\bar{x}_0, \bar{x}_1^p, ..., \bar{x}_n^{p^n}, \bar{y}_0, \bar{y}_1^p, ..., \bar{y}_n^{p^n})|_\flat \leq \max\{||x||_r, ||y||_r\}^{p^n}$$

und damit

$$r^n |S_n(\bar{x}_0, \bar{x}_1^p, ..., \bar{x}_n^{p^n}, \bar{y}_0, \bar{y}_1^p, ..., \bar{y}_n^{p^n})^{p^{-n}}|_\flat \leq \max\{||x||_r, ||y||_r\}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} ||x + y||_r &= \sup_{n\geq 0} \{r^n |S_n(\bar{x}_0, \bar{x}_1^p, ..., \bar{x}_n^{p^n}, \bar{y}_0, \bar{y}_1^p, ..., \bar{y}_n^{p^n})^{p^{-n}}|_\flat\} \\ &\leq \max\{||x||_r, ||y||_r\}. \end{aligned}$$

[2] Der Beweis stammt aus einem Vortrag, den Danial Sanusi im Wintersemester 15/16 im Seminar "Ausgewählte Themen zu (φ, Γ)-Moduln" in Münster gehalten hat.

Nun sei zunächst $r < 1$.
Wir zeigen die Multiplikativität: Seien $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[x_n]$ und $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[y_n]$ aus $W(\mathfrak{o}_F)$ beliebig. Falls $xy = 0$ gilt, ist klarerweise $||xy||_r = 0 \leq ||x||_r \cdot ||y||_r$. Sei also $xy \neq 0$, also auch $||xy||_r \neq 0$. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $r^N < ||xy||_r$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} xy &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \sum_{l+m=n} [\bar{x}_l \bar{y}_m] \\ &= \sum_{l+m<N} p^{l+m}[\bar{x}_l \bar{y}_m] + p^N \cdot \sum_{n \geq N} p^{n-N} \sum_{l+m=n} [\bar{x}_l \bar{y}_m]. \end{aligned}$$

Setze $a := \sum_{n \geq N} p^{n-N} \sum_{l+m=n} [\bar{x}_l \bar{y}_m] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{a}_n]$ für bestimmte $\bar{a}_n \in \mathfrak{o}_F$.
Da $(r^n|\bar{a}_n|_\flat)_n$ eine Nullfolge ist, gibt es ein n_0, sodass $||a||_r = \sup_{n\geq 0} \{r^n|\bar{a}_n|_\flat\} = r^{n_0}|\bar{a}_{n_0}|_\flat$ gilt. Es folgt

$$||p^N a||_r = r^{n_0+N}|\bar{a}_{n_0+N}|_\flat \leq r^N < ||xy||_r.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt dann

$$\begin{aligned} ||xy||_r = ||xy - p^N a||_r &\leq \max_{l+m<N}\{||p^{l+m}[\bar{x}_l \bar{y}_m]||_r\} \\ &= \max_{l+m<N}\{r^l|\bar{x}_l|_\flat \cdot r^m|\bar{y}_m|_\flat\} \\ &\leq \max_{l\in\mathbb{N}}\{r^l|\bar{x}_l|_\flat\} \cdot \max_{m\in\mathbb{N}}\{r^m|\bar{y}_m|_\flat\} \\ &= ||x||_r \cdot ||y||_r. \end{aligned}$$

Andersherum seien $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$ und $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{y}_n]$ Elemente aus $W(\mathfrak{o}_F)$ mit $x, y \neq 0$. Wir finden, da $(r^n|\bar{x}_n|_\flat)_{n\geq 0}$ beziehungsweise $(r^n|\bar{y}_n|_\flat)_{n\geq 0}$ Nullfolgen sind, minimale Indizes i, j, sodass $||x||_r = r^i|\bar{x}_i|_\flat$ und $||y||_r = r^j|\bar{y}_j|_\flat$ gilt. Setze

$$x' := \sum_{n=i}^{\infty} p^n[\bar{x}_n] \quad \text{und} \quad y' := \sum_{n=j}^{\infty} p^n[\bar{y}_n].$$

Dann gilt $||x'||_r = ||x||_r$ und $||y'||_r = ||y||_r$. Wir schreiben $x'y' = c = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{c}_n]$. Es gilt $\bar{c}_n = 0$ für $n \leq i + j - 1$ und $\bar{c}_{i+j} = \bar{x}_i \cdot \bar{y}_j$. Also ist

$$||x'y'||_r \geq r^{i+j}|\bar{x}_i \cdot \bar{y}_j|_\flat = ||x||_r \cdot ||y||_r. \tag{5.4}$$

Aufgrund der Minimalität von i gilt

$$||x - x'||_r = ||\sum_{n=0}^{i-1} p^n[\bar{x}_n]||_r < r^i|\bar{x}_i|_\flat = ||x||_r.$$

Analog gilt $||y - y'||_r < ||y||_r$, und es folgt mit den vorangehenden Resultaten

$$\begin{aligned} ||xy - x'y'||_r &= ||(x - x')y + x'(y - y')||_r \\ &\leq \max\{||(x - x')y||_r, ||x'(y - y')||_r\} \\ &\leq \max\{||(x - x')||_r||y||_r, ||x'||_r||(y - y')||_r\} \\ &< ||x||_r \cdot ||y||_r. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung und (5.4) erhalten wir

$$||xy||_r = ||(xy - x'y') + x'y'||_r = ||x'y'||_r \geq ||x||_r \cdot ||y||_r.$$

Insgesamt erhalten wir

$$||xy||_r = ||x||_r \cdot ||y||_r.$$

Um die Vollständigkeit zu zeigen, sei $(x^{(i)})_i$ eine Cauchy-Folge in $W(\mathfrak{o}_F)$ bezüglich $||\cdot||_r$ mit Elementen $x^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}]$.

Zuerst zeigen wir, dass die Abbildung $[\cdot]$ stetig ist: Seien $x, y \in W(\mathfrak{o}_F)$. Die Aussage von Lemma 5.3.1 gilt analog auch für die D_n, also gilt

$$\begin{aligned} ||[\bar{x}_0] - [\bar{y}_0]||_r &\leq r^n \sup_n\{|D_n(\bar{x}_0, 0, ..., 0, \bar{y}_0, ..., 0)^{p^{-n}}|_\flat\} \\ &\leq r^n \sup\{|\bar{x}_0 - \bar{y}_0|_\flat^{p^{-n}}\}. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite für $|\bar{x}_0 - \bar{y}_0|_\flat \to 0$ gegen 0 konvergiert, folgt die (gleichmäßige) Stetigkeit von $[\cdot]$.
Nun zeigen wir per Induktion über n, dass $(\bar{x}_n^{(i)})_i$ für alle n eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{o}_F$ bezüglich $|\cdot|_\flat$ ist. Der Ringhomomorphismus Φ_0 ist Lipschitz-stetig, da klarerweise $||\Phi_0(x)||_r \leq ||x||_r$ gilt. Damit bildet Φ_0 Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen ab. Das zeigt die Behauptung für $n = 0$.
Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle $n \leq N$ für ein beliebiges festes N gilt. Da $\mathfrak{o}_F$ vollständig ist, gibt es für alle $n \leq N$ ein Element $\bar{x}_n \in \mathfrak{o}_F$, gegen das $(\bar{x}_n^{(i)})_i$ konvergiert. Da $[\cdot]$ stetig ist, konvergiert $([\bar{x}_n^{(i)}])_i$ gegen $[\bar{x}_n]$ für $n \leq N$. Damit gilt

$$||\sum_{n\leq N} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] - \sum_{n\leq N} p^n[\bar{x}_n]||_r \leq \max_{n\leq N}\{||[\bar{x}_n^{(i)}] - [\bar{x}_n]||_r\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also konvergiert $(\sum_{n\leq N}[\bar{x}_n^{(i)}])_i$ bezüglich $||\cdot||_r$ gegen $\sum_{n\leq N}[\bar{x}_n]$ und ist damit insbesondere eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir i, j, sodass

$$\begin{aligned} ||x^{(i)} - x^{(j)}||_r &= ||\sum_{n\leq N} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] + \sum_{n>N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] - \sum_{n\leq N} p^n[\bar{x}_n^{(j)}] - \sum_{n>N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(j)}]||_r \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Es folgt aufgrund der strikten Dreiecksungleichung (für genügend große i', j')

$$||\sum_{n>N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i')}] - \sum_{n>N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(j')}]||_r \leq \varepsilon.$$

Damit ist $(\sum_{n>N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}])_i$ eine Cauchy-Folge und wie im Induktionsanfang folgt, dass $(\bar{x}_{N+1}^{(i)})_i$ eine Cauchy-Folge ist.
Damit existiert für alle n ein Grenzwert $\bar{x}_n \in \mathfrak{o}_F$ von $(\bar{x}_n^{(i)})_i$.

Wir zeigen nun, dass dann $(\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}])_i$ bezüglich $||\cdot||_r$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$ konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden wegen $r < 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $r^N < \varepsilon$. Es gilt dann

$$||\sum_{n \geq N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] - \sum_{n \geq N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]||_r \leq r^N < \varepsilon.$$

Aufgrund von Stetigkeit konvergiert $([\bar{x}_n^{(i)}])_i$ gegen $[\bar{x}_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$||\sum_{n<N} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] - \sum_{n<N} p^n[\bar{x}_n]||_r \leq \max_{n<N}\{||[\bar{x}_n^{(i)}] - [\bar{x}_n]||_r\} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

und damit für genügend großes i

$$\begin{aligned}||\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] - \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]||_r &\leq \max\{||\sum_{n<N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] - \sum_{n<N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]||_r, ||\sum_{n\geq N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}] - \sum_{n\geq N}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]||_r\}\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert $(\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n^{(i)}])_i$ bezüglich $||\cdot||_r$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$.

Sei nun $r \in (0,1]$ beliebig. Sei $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n] \in W(\mathfrak{o}_F)$ ein beliebiges Element. Da $(0,1] \to [0,1], r \mapsto r^n|\bar{x}_n|_\flat$ für alle n stetig und monoton steigend ist, ist auch $(0,1] \to [0,1], r \mapsto ||x||_r$ stetig und monoton steigend. Es gilt insbesondere $||x||_1 = \lim\limits_{r\to 1}||x||_r$. Damit folgen die noch nicht gezeigten Behauptungen für $r = 1$. □

Definition (Definition 1.4.3 in [12])**.** Ein Element $b = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$ heißt *primitiv*, wenn $|\bar{x}_0|_\flat = p^{-1}$ und $\bar{x}_1 \in \mathfrak{o}_F^\times$ gilt.

Definition (Definition 1.4.4 in [12])**.** Ein Element $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$ heißt *stabil*, wenn $|\bar{x}_n|_\flat \leq |\bar{x}_0|_\flat$ für alle n gilt.

Lemma 5.3.3. [3] *Sei $x \in W(\mathfrak{o}_F)$ stabil und $z \in W(\mathfrak{o}_F)$ primitiv. Dann gilt für alle $y \in W(\mathfrak{o}_F)$*

$$||x + yz||_1 \geq ||x||_1$$

Beweis. Sei im Folgenden $r = p^{-1}$.
Da x stabil ist, gilt $||x||_r = ||x||_1$. Falls $||yz||_r \neq ||x||_r$, folgt mit der strikten Dreiecksungleichung

$$||x||_1 = ||x||_r \leq \max\{||x||_r, ||yz||_r\} = ||x + yz||_r \leq ||x + yz||_1.$$

Wir nehmen also $||yz||_r = ||x||_r$ an. Da z primitiv ist, gilt $||z||_r = r$ und somit $||z||_1 = 1 > ||z||_r$. Außerdem ist $||y||_1 \geq ||y||_r$. Damit gilt

$$||yz||_1 = ||y||_1 \cdot ||z||_1 > ||y||_r \cdot ||z||_r = ||yz||_r = ||x||_r = ||x||_1.$$

[3] Das Lemma stammt aus einem Vortrag, den Danial Sanusi im Wintersemester 15/16 im Seminar "Ausgewählte Themen zu (φ, Γ)-Moduln" in Münster gehalten hat.

Damit erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$||x + yz||_1 = \max\{||x||_1, ||yz||_1\} = ||yz||_1 > ||x||_1 = ||x||_r.$$

□

Lemma 5.3.4 (Lemma 1.4.7. in [12])**.** *Sei $z \in W(\mathfrak{o}_F)$ primitiv. Dann finden wir für jede Äquivalenzklasse von $W(\mathfrak{o}_F)/(z)$ einen stabilen Repräsentanten.*

Beweis. Schreibe $z = [\bar{z}] + pz_1$ mit $z_1 \in W(\mathfrak{o}_F)^\times$. Sei $x \in W(\mathfrak{o}_F)$ und setze $x_0 = x$. Sei $x_l = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [x_{l,n}]$ ein zu x modulo z kongruentes Element aus $W(\mathfrak{o}_F)$. Setze $x_{l,1} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{x}_{l,n+1}]$ und $x_{l+1} = x_l - x_{l,1} z_1^{-1} z$. Dann ist x_{l+1} ebenfalls kongruent zu x modulo z. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} x_{l+1} &= x_l - x_{l,1} z_1^{-1} z \\ &= x_l - x_{l,1} z_1^{-1}([\bar{z}] + pz_1) \\ &= x_l - x_{l,1} z_1^{-1}[\bar{z}] - px_{l,1} \\ &= [\bar{x}_{l,0}] - x_{l,1} z_1^{-1}[\bar{z}]. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass es ein l gibt, sodass $|\bar{x}_{l,n}|_\flat < p|\bar{x}_{l,0}|_\flat$ für alle $n > 0$ gilt. Dann gilt $||x_{l+1}||_1 \leq \max\{||[\bar{x}_{l,0}]||_1, p^{-1} \cdot ||x_{l,1}||_1\} = |\bar{x}_{l,0}|_\flat$.
Es gilt $|\bar{x}_{l+1,0}|_\flat = |\bar{x}_{l,0} + \bar{z}\bar{x}_{l,1}(\bar{z}_1^{-1})|_\flat = \max\{|\bar{x}_{l,0}|_\flat, p^{-1}|\bar{x}_{l,1}|_\flat\} = |\bar{x}_{l,0}|_\flat$. Also ist x_{l+1} ein stabiler Repräsentant der Kongruenzklasse von x modulo z.
Angenommen, ein solches l existiert nicht. Dann gilt aufgrund von Lemma 5.3.2

$$\sup_n\{|\bar{x}_{l+1,n}|_\flat\} \leq p^{-1}\sup_n\{|\bar{x}_{l,n}|_\flat\}$$

für alle $l \geq 0$, also $||x_l||_1 \to 0$ für $l \to \infty$ und

$$\begin{aligned} ||x_{l,1} z_1^{-1}[\bar{z}]||_1 &= ||[\bar{x}_{l,0}] - x_{l+1}||_1 \\ &\leq \max\{||[\bar{x}_{l,0}]||_1, ||x_{l+1}||_1\} \\ &\leq p^{-1}\sup_n\{|\bar{x}_{l,n}|_\flat\} \\ &\leq p^{-l-1} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Da $W(\mathfrak{o}_F)$ bezüglich $||\cdot||_1$ vollständig ist, konvergiert die Summe $\sum_{l=0}^{\infty} x_{l,1} z_1^{-1}$

somit bezüglich $||\cdot||_1$ gegen ein $y \in W(\mathfrak{o}_F)$. Da Multiplikation mit z stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
yz &= (\sum_{l=0}^{\infty} x_{l,1} z_1^{-1}) \cdot z \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (x_{l,1} z_1^{-1} \cdot ([\bar{z}] + p z_1)) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} ([\bar{z}] x_{l,1} z_1^{-1} + p x_{l,1}) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} ([\bar{x}_{l,0}] - x_{l+1} + p x_{l,1}) \\
&= [\bar{x}] - x_1 + p x_{0,1} + [\bar{x}_1] - x_2 + p x_{1,1} + ... \\
&= x,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus $[\bar{x}_l] + p x_{l,1} = x_l$ folgt. Damit ist 0 ein stabiler Repräsentant der Kongruenzklasse von x modulo (z). □

Lemma 5.3.5 (Lemma 1.4.9. aus [12])**.** *Ein stabiles Element $x \in W(\mathfrak{o}_F)$, das durch ein primitives Element z teilbar ist, ist schon gleich* 0*.*

Beweis. Sei $x \in W(\mathfrak{o}_F)$ ein stabiles, durch ein primitives Element z teilbares Element. Setze $y = x/z$ und $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{x}_n]$ bzw. $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{y}_n]$ sowie $z = [\bar{z}] + p z_1$ mit $z_1 \in W(\mathfrak{o}_F)^{\times}$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
(x - p z_1 y) &= (zy - p z_1 y) \\
&= (z - p z_1) \cdot y \\
&= [\bar{z}] \cdot y.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Wir zeigen nun per Induktion nach n, dass

$$|\bar{y}_n|_\flat = p^{n+1} |\bar{x}_0|_\flat \qquad \text{für alle } n \geq 0 \tag{5.6}$$

gilt. Das beweist die Behauptung, denn es ist $\bar{y}_n \in \mathfrak{o}_F$ für alle $n \geq 0$, d.h. $|\bar{y}_n|_\flat \leq 1$ für $\bar{y}_n \neq 0$. Deswegen ist (5.6) nur möglich, wenn $x = 0$ gilt.
Wir zeigen (5.6): Wir gehen von $\bar{x}_0 \neq 0$ aus. Für $n = 0$ gilt aufgrund von (5.5)

$$|\bar{y}_0|_\flat = |\bar{z}^{-1} \cdot \bar{x}_0|_\flat = p |\bar{x}_0|_\flat.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ eine beliebige feste natürliche Zahl und sei die Behauptung für alle $n \leq N$ gezeigt. Es gilt

$$\begin{aligned}
x - p z_1 y &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{x}_n] - p \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} p^n (\sum_{l+m=n} [\bar{z}_{m+1} \cdot \bar{y}_l])) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{x}_n] - \sum_{n=0}^{\infty} p^{n+1} (\sum_{l+m=n} [\bar{z}_{m+1} \cdot \bar{y}_l]) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{x}_n] - \sum_{n=1}^{\infty} p^n (\sum_{l+m=n-1} [\bar{z}_{m+1} \cdot \bar{y}_l])
\end{aligned}$$

Es gilt aufgrund von (5.5) und der Induktionsvoraussetzung

$$||[\bar{z} \cdot \bar{y}_{N+1}]||_1 = ||[\bar{x}_{N+1} + \sum_{l+m=n-1} \bar{z}_{m+1} \cdot \bar{y}_l] + R||_1,$$

wobei $R \in W(\mathfrak{o}_F)$ ein Element mit kleinerem Betrag als

$$||[\bar{x}_{N+1} + \sum_{l+m=n-1} \bar{z}_{m+1} \cdot \bar{y}_l]||_1 = |\bar{x}_{N+1} + \sum_{l+m=n-1} \bar{z}_{m+1} \cdot \bar{y}_l|_\flat = |\bar{y}_N|_\flat$$

ist. Also gilt $||[\bar{z} \cdot \bar{y}_{N+1}]||_1 = |\bar{y}_N|_\flat$, und da $||[\bar{z}]||_1 = p^{-1}$ gilt, folgt die Behauptung. □

Korollar 5.3.0.1 (Corollary 1.4.10 in [12])**.** *Sei $z \in W(\mathfrak{o}_F)$ primitiv und seien $x, y \in W(\mathfrak{o}_F)$ stabil und kongruent modulo z. Dann gilt $|\bar{x}_0|_\flat = |\bar{y}_0|_\flat$.*

Beweis. Schreibe $w = x - y$. Es gilt aufgrund der strikten Dreiecksungleichung $|w_n|_\flat \leq \max\{|x_0|_\flat, |y_0|_\flat\}$ für alle n nach Lemma 5.3.2. Angenommen, es gilt $|x_0|_\flat \neq |y_0|_\flat$, dann ist $|w_0|_\flat = \max\{|x_0|_\flat, |y_0|_\flat\} > 0$, also ist w stabil, Widerspruch zu Lemma 5.3.5. □

Lemma 5.3.6. *Das Produkt zweier stabiler Elemente $a, b \in W(\mathfrak{o}_F)$ ist stabil.*

Beweis. Sei $ab = \sum p^n[\bar{c}_n]$. Dann gilt

$$|\bar{c}_0|_\flat = |\bar{a}_0|_\flat \cdot |\bar{b}_0|_\flat = ||a||_1 \cdot ||b||_1 = ||ab||_1.$$

Also ist ab stabil. □

Bemerkung 5.3.7. Ein Element $x = \sum_{n=0}^{\infty}[\bar{x}_n] \in W(\mathfrak{o}_F)$ ist genau dann eine Einheit, wenn $\Phi_0(x) = \bar{x}_0 \in \mathfrak{o}_F$ eine Einheit ist.

Beweis der Bemerkung. Wenn x eine Einheit ist, dann auch $\Phi_0(x)$, da Φ_0 ein Ringhomomorphismus ist. Andersherum sei $\bar{x}_0 = \Phi_0(x)$ eine Einheit in $\mathfrak{o}_F$. Dann ist $[\bar{x}_0]$ eine Einheit in $W(\mathfrak{o}_F)$ mit multiplikativ Inversem $[\bar{x}_0]^{-1} = [\bar{x}_0^{-1}]$. Wir schreiben $x = [\bar{x}_0] + px_1$ für ein $x_1 \in W(\mathfrak{o}_F)$. Dann ist, da $W(\mathfrak{o}_F)$ p-adisch vollständig ist, das multiplikativ Inverse von $[\bar{x}_0^{-1}] \cdot x = 1 + p[\bar{x}_0^{-1}]x_1$ durch die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - (-p[\bar{x}_0^{-1}]x_1)} = \sum_{n \geq 0}^{\infty} p^n(-[\bar{x}_0^{-1}]x_1)^n$$

gegeben. Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 5.3.8. *Ein Element $x = \sum_{n=0}^{\infty}[\bar{x}_n] \in W(\mathfrak{o}_F)$ ist genau dann stabil, wenn es gleich einer Einheit multipliziert mit einem Teichmüller-Lift ist.*

Beweis. Sei $\bar{y} \in \mathfrak{o}_F$. Es gilt $[\bar{y}] \cdot \sum p^n[\bar{x}_n] = \sum p^n[\bar{y}\bar{x}_n]$, da $[\cdot]$ multiplikativ ist.
Wenn $x = [\bar{y}] \cdot e$ für ein $e = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{e}_n] \in W(\mathfrak{o}_F)^\times$ ist, dann gilt wegen $\bar{e}_0 \in \mathfrak{o}_F^\times$, dass $|\bar{x}|_\flat = |\bar{y}\bar{e}|_\flat = |\bar{y}|_\flat \geq |\bar{y}\bar{e}_n|_\flat$ für alle $n \geq 0$, d.h. x ist stabil.
Andersherum sei x stabil. Wegen $|\bar{x}_0|_\flat \geq |\bar{x}_n|_\flat$ ist $\bar{x}_n$ durch $\bar{x}_0$ teilbar für alle $n \geq 0$, also gilt $x = [\bar{x}] \cdot ([1] + \sum_{n=1}^{\infty} p^n[\bar{x}_n/\bar{x}]$. Dabei ist $[1] + \sum_{n=1}^{\infty} p^n[\bar{x}_n/\bar{x}]$ eine Einheit. □

Nun betrachten wir wieder einen perfektoiden Zwischenkörper $K \subseteq L \subseteq \widehat{K^{alg}}$.

Lemma 5.3.9 (siehe Lemma 1.4.19 in [18])**.** *Wir betrachten den Homomorphismus $\Theta_L : W(\mathfrak{o}_{L^\flat}) \to \mathfrak{o}_L$. Dann erzeugt jedes primitive Element, das im Kern von $\Theta_L : W(\mathfrak{o}_{L^\flat}) \to \mathfrak{o}_L$ liegt, schon* $\mathrm{Ker}(\Theta_L)$.

Beweis. Sei $z = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{z}_n] \in W(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ ein primitives Element mit $\Theta_L(z) = 0$. Dann gilt klarerweise $z \cdot W(\mathfrak{o}_{L^\flat}) \subseteq \mathrm{Ker}(\Theta_L)$.
Sei $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n] \in W(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ ein Element im Kern von Θ_L. Dann gilt $0 = \Theta_L(x) = \theta_L(\bar{x}_0) + p(\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}\theta_L(\bar{x}_n))$. Daraus folgt $|\bar{x}_0|_\flat = |\theta_L(\bar{x}_0)| \leq |p| = |\bar{z}|_\flat$. Damit gibt es ein $\bar{y} \in \mathfrak{o}_{L^\flat}$ mit $\bar{x}_0 = \bar{z}\bar{y}$ und es gilt $x - z[\bar{y}] = 0$. Somit ist $\mathrm{Ker}(\Theta_L) \subseteq zW(\mathfrak{o}_{L^\flat}) + pW(\mathfrak{o}_{L^\flat})$.
Sei nun $a \in \mathrm{Ker}(\Theta_L)$ irgendein Element. Dann finden wir Elemente $a_1, b_0 \in W(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ mit $a = zb_0 + pa_1$. Wegen $z \cdot W(\mathfrak{o}_L^\flat) \subseteq \mathrm{Ker}(\Theta_L)$ gilt $a_1 \in \mathrm{Ker}(\Theta_L)$. Wir erhalten nun induktiv Folgen $(b_n)_{n\geq 0}$ in $W(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ und $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathrm{Ker}(\Theta_L)$ mit $a_n = zb_n + pa_{n+1}$. Da $W(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ nach Lemma 5.1.5 p-adisch vollständig ist, konvergiert $b = \sum_{n=0}^{\infty} p^n b_n$ in $W(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ und erfüllt $a = zb$, woraus $\mathrm{Ker}(\Theta_L) \subseteq zW(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ folgt. □

Bemerkung 5.3.10 (Corollary 1.4.14 in [12]). Es existiert ein primitives Element $z \in \mathrm{Ker}(\Theta_L : W(\mathfrak{o}_{L^\flat}) \to \mathfrak{o}_L)$, sodass $\mathrm{Ker}(\Theta_L)$ nach Lemma 5.3.9 von z erzeugt wird.

Beweis. L und $L^\flat$ haben dieselbe Wertegruppe, darum finden ein $\bar{z} \in \mathfrak{o}_{L^\flat}$ mit $|\theta_L(\bar{z})| = |\bar{z}|_\flat = p^{-1}$. Dann ist $\theta_L(\bar{z})$ durch p teilbar (in $\mathfrak{o}_L$). Da Θ_L surjektiv ist, finden wir ein $z_1 \in W(\mathfrak{o}_{L^\flat})$ mit $\Theta_L(z_1) = -\theta_L(\bar{z})/p$. Dann gilt $|\Theta_L(z_1)| = |-\theta_L(\bar{z})/p| = 1$. Damit ist $z_1 \in W(\mathfrak{o}_{L^\flat})^\times$, denn andererseits wäre $|\Theta_L(z_1)| < 1$. Dann ist $z = [\bar{z}] + pz_1$ das gesuchte Element, denn es gilt $\Theta_L(z) = \Theta_L([\bar{z}]) + p\Theta_L(z_1) = \theta_L(\bar{z}) - \theta_L(\bar{z}) = 0$. □

Sei nun z ein primitives Element im Kern von $\Theta_K : W(\mathfrak{o}_{K^\flat}) \to \mathfrak{o}_K$. Dann erzeugt z den Kern von Θ_K und ebenso den Kern von $\Theta_L : W(\mathfrak{o}_{L^\flat}) \to \mathfrak{o}_L$ für einen perfektoiden Zwischenkörper $K \subseteq L \subseteq \widehat{K^{alg}}$, da z auch im Kern von Θ_L liegt. Sei im Folgenden $\Theta = \Theta_{\widehat{K^{alg}}}$ und $\theta = \theta_{\widehat{K^{alg}}}$.

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W(\mathfrak{o}_{(\widehat{K^{alg}})^\flat}) \arrow[r, "\Theta"] & \mathfrak{o}_{\widehat{K^{alg}}} \\
W(\mathfrak{o}_F) \arrow[u, "\subseteq"] & \\
W(\mathfrak{o}_{K^\flat}) \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\Theta_K"] & \mathfrak{o}_K \arrow[uu, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Das Argument in Bemerkung 5.3.9 zeigt, dass $\mathrm{Ker}(\Theta_{\widehat{K}^{alg}|W(\mathfrak{o}_F)}) = z \cdot W(\mathfrak{o}_F)$ gilt. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W(\mathfrak{o}_{(\widehat{K}^{alg})^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{(\widehat{K}^{alg})^\flat}) \arrow[r, "\bar{\Theta}"] & \mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}} \\
W(\mathfrak{o}_F)/zW(\mathfrak{o}_F) \arrow[u, "\subseteq"] & \\
W(\mathfrak{o}_{K^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K^\flat}) \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\bar{\Theta}_K"] & \mathfrak{o}_K \arrow[uu, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die waagerechten Pfeile Isomorphismen.

Satz 5.3.11 (siehe Theorem 1.4.13 in [12]). *Sei $W_z := W(\mathfrak{o}_F)/zW(\mathfrak{o}_F)$ und sei $x \in W_z$. Wir finden einen stabilen Repräsentanten $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{y}_n] \in W(\mathfrak{o}_F)$ und definieren $|x|' := |\bar{y}_0|_\flat$. Dann gilt*

(i) $|\cdot|'$ *ist eine multiplikative Norm auf W_z, bezüglich derer W_z vollständig ist.*

(ii) *Es gibt einen Isomorphismus $W_z/(p) \cong \mathfrak{o}_F/(\bar{z})$.*

(iii) *Der Ring W_z ist der Bewertungsring eines perfektoiden Körpers von Charakteristik* 0.

Beweis. Zu (*i*):
Nach Korollar 5.3.0.1 ist $|\cdot|'$ eine wohldefinierte Funktion von W_z nach $[0,1]$. Außerdem gilt $|W_z|' = |\mathfrak{o}_F|_\flat$, denn es ist $|[\bar{y}] \mod (z)|' = |\bar{y}|_\flat$ für $y \in \mathfrak{o}_F$.
Da jedes Element $x \in W_z \setminus \{0\}$ einen stabilen Repräsentanten $y \neq 0$ hat, gilt $x = 0 \Leftrightarrow |x|' = 0$.
Um die strikte Dreiecksungleichung zu zeigen, seien $x', y' \in W(\mathfrak{o}_F)$ stabile Repräsentanten von Elementen $x, y \in W_z$. Dann gilt nach Lemma 5.3.3 für einen stabilen Repräsentanten $x' + y' + az$ von $x + y$

$$||x' + y'||_1 = ||x' + y' + az - az||_1 \geq ||x' + y' + az||_1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |x+y|' = ||x' + y' + az||_1 \leq ||x' + y'||_1 &\leq \max\{||x'||_1, ||y'||_1\} \\ &= \max\{|\bar{x}'_0|^\flat, |\bar{y}'_0|^\flat\} \\ &= \max\{|y|', |x|'\}, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus der Stabilität von x' und y' folgt.
Als nächstes zeigen wir die Multiplikativität: Seien $a, b \in W_z$ zwei Elemente mit stabilen Repräsentanten $a', b' \in W(\mathfrak{o}_F)$. Dann ist nach Lemma 5.3 auch $a'b'$ stabil, also ein stabiler Repräsentant von ab. Es gilt

$$|ab|' = |\bar{a}'_0 \bar{b}'_0|_\flat = |\bar{a}'_0|_\flat \cdot |\bar{b}'_0|_\flat = |a|' \cdot |b|'.$$

Jetzt zeigen wir die Vollständigkeit: Da $W(\mathfrak{o}_F)$ ein Integritätsbereich ist, haben wir die exakte Sequenz

$$0 \to W(\mathfrak{o}_F) \xrightarrow{\cdot z} W(\mathfrak{o}_F) \to W_z \to 0.$$

Sei $x \in W(\mathfrak{o}_F)$ ein Element mit $zx \in pW(\mathfrak{o}_F)$. Dann ist die Reduktion modulo p $\bar{z}\bar{x} = \bar{z} \cdot \bar{x}$ gleich 0. Da z primitiv ist, ist $\bar{z} \neq 0$, also folgt, da $\mathfrak{o}_F$ nullteilerfrei ist, $\bar{x} = 0$, d.h. $x \in pW(\mathfrak{o}_F)$. Per Induktion und wegen $p \neq 0$ in $W(\mathfrak{o}_F)$ folgt $x \in p^m W(\mathfrak{o}_F)$, wenn $zx \in p^m W(\mathfrak{o}_F)$ gilt. Damit haben wir für alle $m \geq 1$ die exakte Sequenz

$$0 \to W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F) \xrightarrow{\cdot z} W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F) \to W_z/p^m W_z \to 0.$$

Da die Projektionen $W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F) \to W(\mathfrak{o}_F)/p^n W(\mathfrak{o}_F)$ für $n \geq m$ surjektiv sind, bekommen wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \varprojlim_m W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F) \xrightarrow{\cdot z} \varprojlim_m W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F) \to \varprojlim_m W_z/p^m W_z \to 0.$$

Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W(\mathfrak{o}_F) \arrow[r, "\cdot z"] \arrow[d, "\cong"] & W(\mathfrak{o}_F) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & W_z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_m W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F) \arrow[r, "\cdot z"] & \varprojlim_m W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F) \arrow[r] & \varprojlim_m W_z/p^m W_z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da $W(\mathfrak{o}_F)$ p-adisch vollständig ist, gilt $W(\mathfrak{o}_F) \cong \varprojlim W(\mathfrak{o}_F)/p^m W(\mathfrak{o}_F)$, deswegen sind die mittleren senkrechten Homomorphismen Isomorphismen, also ist auch die Abbildung $W_z \to \varprojlim W_z/p^m W_z$ ein Isomorphismus. Damit ist W_z p-adisch vollständig.
Um zu zeigen, dass W_z bezüglich $|\cdot|'$ vollständig ist, zeigen wir weiterhin, dass $|x|' \leq |p|'$ äquivalent ist zu $x \in (p)$ für ein $x \in W_z$:
Wenn x im von p erzeugten Ideal liegt, gilt $|x|' \leq |p|'$, da $|\cdot|'$ multiplikativ ist. Andersherum sei $|x|' \leq |p|'$. Sei $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{y}_n]$ ein stabiler Repräsentant der Äquivalenzklasse von x. Dann gilt $|\bar{y}_0|_\flat = |x|' \leq |p|'$. Da $p + az \equiv az \bmod (p)$ für alle $a \in W(\mathfrak{o}_F)$ gilt, ist $|p|' \leq p^{-1}$ nach der Definition eines primitiven Elements. Deswegen gilt $|\bar{y}_0|_\flat \leq p^{-1} = |\bar{z}_0|_\flat$. Wir finden also ein $\bar{b} \in \mathfrak{o}_F$ mit $\bar{y}_0 = \bar{b}\bar{z}_0$. Dann gilt $y - z \cdot [\bar{b}] \in pW(\mathfrak{o}_F)$, also $x \in pW_z$.
Zu (ii):
Nach Satz 5.1.5 gilt $W(\mathfrak{o}_F)/(p) \cong \mathfrak{o}_F$. Damit gilt

$$W_z/(p) = (W(\mathfrak{o}_F)/(z))/(p) = W(\mathfrak{o}_F)/(z,p) \cong W(\mathfrak{o}_F)(p,[\bar{z}]) \cong \mathfrak{o}_F/(\bar{z}).$$

Wir haben also einen Isomorphismus $W_z/(p) \to \mathfrak{o}_F/(\bar{z}), \sum_{n=0}^{\infty} p^n [\bar{x}_n] + (p,z) \mapsto \bar{x}_0 + (\bar{z})$. Insbesondere ist der Frobenius auf $W_z/(p)$ surjektiv.
Zu (iii):

W_z ist nach (i) ein Integritätsbereich. Wenn $x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n]$ und $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{y}_n]$ stabil sind und $|\bar{x}_0|_\flat \leq |\bar{y}_0|_\flat$ gilt, dann ist x durch y teilbar in $W(\mathfrak{o}_F)$ (dies folgt aus Lemma 5.3.8). Damit ist W_z ein Bewertungsring. Der Quotientenkörper Quot(W_z) hat Charakteristik 0, denn wir haben den Ringhomomorphismus $\bar{\Theta}_{|W_z} : W_z \to \mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}$, und $\widehat{K^{alg}}$ hat Charaktersitik 0. $\square$

Wir setzen $\mathfrak{o}_{F^\sharp} := \bar{\Theta}(W_z)$. Sei $x \in W_z$ ein Element mit stabilem Repräsentanten $y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{y}_n] \in W(\mathfrak{o}_F)$. Dann gilt $|\bar{\Theta}(x)| = |\bar{\Theta}(y + (z))| = |\sum_{n=0}^{\infty} p^n \theta(\bar{y}_n)| = |\theta(\bar{y}_0)| = |\bar{y}_0|_\flat = |x|'$. Aus dem vorherigen Satz folgern wir, dass $\mathfrak{o}_{F^\sharp}$ der Bewertungsring eines perfektoiden Körpers $F^\sharp := \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_{F^\sharp})$ mit $K \subseteq F^\sharp \subseteq \widehat{K^{alg}}$ ist.

Wir berechnen nun den Tilt von $F^\sharp$ (siehe [18, Proposition 1.4.23]):
Sei $x \in \mathfrak{o}_F \subseteq \mathfrak{o}_{(\widehat{K}^{alg})^\flat}$. Wir schreiben

$$x = (x_0 \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ...) \in \mathfrak{o}_{(\widehat{K}^{alg})^\flat} = \varprojlim \mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}.$$

Es ist $(\theta(x) \bmod p\mathfrak{o}_{F^\sharp}, ..., \theta(x^{1/p^i}) \bmod p\mathfrak{o}_{F^\sharp}, ...)$ ein Element in $\mathfrak{o}_{(F^\sharp)^\flat}$. Als Element in $\mathfrak{o}_{(\widehat{K}^{alg})^\flat}$ betrachtet, ist

$$(\theta(x) \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ..., \theta(x^{1/p^i}) \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ...) = (x_0 \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ...),$$

also gleich x. Damit gilt $\mathfrak{o}_F \subseteq \mathfrak{o}_{(F^\sharp)^\flat}$.
Sei umgekehrt $x \in \mathfrak{o}_{(F^\sharp)^\flat}$. Wir benötigen das folgende Lemma:

Lemma 5.3.12. *Die Abbildung*

$$\varprojlim_{(\cdot)^p} \mathfrak{o}_F \to \varprojlim_{(\cdot)^p} \mathfrak{o}_F/(\bar{z}),$$
$$(x_0, ..., x_i, ...) \mapsto (x_0 \bmod (\bar{z}), ..., x_i \bmod (\bar{z}), ...)$$

ist ein Ringisomorphismus.

Beweis. Siehe Lemma 1.4.22 aus [18]. $\square$

Mit Lemma 5.3.12 und dem Isomorphismus $\mathfrak{o}_{F^\sharp}/p\mathfrak{o}_{F^\sharp} \cong W_z/(p) \cong \mathfrak{o}_F/\bar{z}\mathfrak{o}_F$ können wir

$$x = (\theta(x_0) \bmod p\mathfrak{o}_{F^\sharp}, ..., \theta(x_j) \bmod p\mathfrak{o}_{F^\sharp}, ...) \in \mathfrak{o}_{(F^\sharp)^\flat} = \varprojlim_{(\cdot)^p} \mathfrak{o}_{F^\sharp}/p\mathfrak{o}_{F^\sharp}$$

mit Elementen $x_j = (x_{0j} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ..., x_{ij} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ...) \in \mathfrak{o}_F$, sodass $x_{j+1}^p = x_j$ für alle $j \geq 0$ gilt, schreiben. Dann gilt für alle $i, j \geq 0$

$$x_{i+1j}^p \equiv x_{ij} \equiv x_{ij+1}^p \mod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}},$$

also

$$\begin{aligned}
x &= (\lim_{i\to\infty} x_{i0}^{p^i} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ..., \lim_{i\to\infty} x_{ij}^{p^i} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ...) \\
&= (\lim_{i\to\infty} x_{i0}^{p^i} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ..., \lim_{,i>j,i\to\infty} x_{i0}^{p^{i-j}} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ...) \\
&= (x_{00} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ..., x_{j0} \bmod p\mathfrak{o}_{\widehat{K}^{alg}}, ...) \\
&= x_0 \in \mathfrak{o}_F.
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathfrak{o}_{(F^\sharp)^\flat} \subseteq \mathfrak{o}_F$.

Satz 5.3.13. *Wir haben eine Bijektion*

Perfektoide Körper $K \subseteq L \subseteq \widehat{K}^{alg} \leftrightarrow$ *Vollständige und perfekte Körper* $K^\flat \subseteq F \subseteq (\widehat{K}^{alg})^\flat$

$$\begin{aligned}
(L, |\cdot|) &\mapsto (L^\flat, |\cdot|_\flat), \\
(F^\sharp, |\cdot|_\flat) &\leftarrow\!\shortmid (F, |\cdot|).
\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt $(F^\sharp)^\flat = F$. Umgekehrt haben wir einen Isomorphismus $W(\mathfrak{o}_{L^\flat})/(z) \cong \mathfrak{o}_L$, also gilt $(L^\flat)^\sharp = L$. □

5.4 Kompatibilität mit endlichen Erweiterungen

Lemma 5.4.1 (Remark 1.4.25 in [18])**.** *Sei F ein perfektoider Körper von Charakteristik p. Wenn F algebraisch abgeschlossen ist, dann auch $F^\sharp$.*

Beweis. Sei $E/F^\sharp$ eine nichttriviale endliche Erweiterung. Sei $x \in \mathfrak{o}_E$ ein Element mit $F^\sharp(x) = E$. Da $\mathfrak{o}_E$ der ganze Abschluss von $\mathfrak{o}_{F^\sharp}$ in E ist und x damit ganz über $\mathfrak{o}_{F^\sharp}$ ist, hat das Minimalpolynom $P(X)$ von x Koeffizienten in $\mathfrak{o}_{F^\sharp}$. Sei $d \geq 2$ der Grad von $P(X)$. Da $F^\sharp$ vollständig und damit henselsch ist, haben alle Nullstellen von $P(X)$ in einem algebraischen Abschluss von $F^\sharp$ denselben Betrag. Da $F^\sharp$ perfektoid ist, finden wir ein normiertes Polynom $Q(X) \in \mathfrak{o}_F[X]$, sodass $Q(X)$ und $P(X)$ dasselbe Bild in $\mathfrak{o}_{F^\sharp}/p\mathfrak{o}_{F^\sharp}[X] \cong \mathfrak{o}_F/(\bar{z})[X]$ haben. Es gilt $\theta(Q(X)) \equiv P(X) \bmod (p)$.
Da F algebraisch abgeschlossen ist, hat $Q(X)$ eine Nullstelle $\alpha \in \mathfrak{o}_F$ Das Element $y_1 := \theta(\alpha) \in \mathfrak{o}_{F^\sharp}$ erfüllt dann $0 < |P(y_1)| \leq p^{-1} = |p|$.
Es gilt $|\mathfrak{o}_{F^\sharp}| = |\mathfrak{o}_F|_\flat$, und da F algebraisch abgeschlossen ist, hat jede reelle Zahl aus $|\mathfrak{o}_F|_\flat$ eine d-te Wurzel. Damit finden wir ein $c_1 \in \mathfrak{o}_{F^\sharp}$ mit $|c_1|^d = |P(y_1)| \leq p^{-1}$. Das Polynom $P_1(X) := c_1^{-d}P(c_1X + y_1)$ ist normiert und irreduzibel von Grad d. Der konstante Koeffizient von $P_1(X)$ hat nach Konstruktion den Betrag 1, also haben auch alle Nullstellen den Betrag 1, da alle Nullstellen denselben Betrag haben. Damit gilt $P_1(X) \in \mathfrak{o}_{F^\sharp}[X]$. Das Polynom $P_1(X)$ hat damit dieselben Eigenschaften wie das Polynom $P(X)$. Wir können also mit $P_1(X)$ analog verfahren und erhalten

induktiv Sequenzen $(y_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ in $\mathfrak{o}_{F^\sharp}$ und eine Sequenz von irreduziblen normierten Polynomen $(P_n)_{n\geq 0}$ von Grad d in $\mathfrak{o}_{F^\sharp}[X]$. sodass gilt

$P_0 = P, |c_n|^d = |P_{n-1}(y_n)| \leq p^{-1}$ und $P_n(X) = c_n^{-d}P_{n-1}(c_nX + y_n)$ für alle $n \geq 1$.

Damit gilt

$$|P(c_1...c_ny_{n+1} + c_1...c_{n-1}y_n + ... + c_1y_2 + y_1)| \leq p^{-n}|P_n(y_{n+1})| \leq p^{-(n+1)}$$

für alle $n \geq 1$. Außerdem gilt $|c_1...c_i| \leq p^{-i/d}$ für alle $i \geq 1$. Damit folgt, dass

$$c := \sum_{n=1}^{\infty}(\Pi_{i=1}^{n-1}c_i)y_n$$

in $\mathfrak{o}_{F^\sharp}$ konvergiert und eine Nullstelle von $P(X)$ ist, was einen Widerspruch zur angenommenen Irreduzibilität von $P(X)$ darstellt.
Es gibt keinen echten algebraisch abgeschlossenen und vollständigen Unterkörper von $\widehat{K}^{alg}$. Daraus folgt $F^\sharp = \widehat{K}^{alg}$ und somit $F = (\widehat{K}^{alg})^\flat$. □

Seien $K \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \widehat{K}^{alg}$ zwei perfektoide Körper. Wenn $K_2^\flat/K_1^\flat$ eine echte endliche Erweiterung ist, dann ist $K_2^\flat$ nicht algebraisch abgeschlossen (siehe [4, 6.3, Satz 2]), also ist auch K_2 nicht algebraisch abgeschlossen. Dann ist $\sigma \in \mathrm{Aut}(K_2/K_1)$ stetig, denn andernfalls würde durch $x \mapsto |\sigma(x)|$ eine nicht zu $|\cdot|$ äquivalente Norm definiert werden, was aber [1, Theorem 4.4.1] widerspricht. Außerdem folgt aus [15, II, Satz 3.3], dass σ den Betrag erhält.

Sei K_2/K_1 eine Erweiterung perfektoider Körper in Charakteristik 0, sodass $K_2^\flat/K_1^\flat$ endlich ist. Wir erhalten einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(K_2/K_1) &\to \mathrm{Aut}(K_2^\flat/K_1^\flat) \\ \sigma &\mapsto \sigma^\flat, \end{aligned}$$

wobei wir $\sigma^\flat(x_0 \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...) := (\sigma(x_0) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., \sigma(x_i) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...)$ für $x = (x_0 \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...) \in \mathfrak{o}_{K_2^\flat}$ setzen. Dabei gilt $\theta(\sigma^\flat(x)) = \lim_{i\to\infty}\sigma(x_i)^{p^i} = \sigma(\theta(x))$, also $|\sigma^\flat(x)|_\flat = |\theta(\sigma^\flat(x))| = |\sigma(\theta(x))| = |\theta(x)| = |x|_\flat$.
Weiterhin definieren wir durch

$$\sigma(\sum_{n=0}^{\infty}p^n[\bar{x}_n]) = \sum_{n=0}^{\infty}p^n[\sigma(\bar{x}_n)]$$

eine $\mathrm{Aut}^{\mathrm{cont}}(K_2^\flat/K_1^\flat)$-Operation auf $W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})$.

Lemma 5.4.2 (Lemma 1.6.1. aus [18])**.** *Sei $K_2^\flat/K_1^\flat$ endlich. Der Homomorphismus $\Theta_{K_2} : W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}) \to \mathfrak{o}_{K_2}$ erfüllt*

$$\Theta_{K_2}(\sigma^\flat(x)) = \sigma(\Theta_{K_2}(x))$$

für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(K_2/K_1)$ und alle $x = \sum_{n=0}^{\infty}p^n[\bar{x}_n] \in W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})$.

Beweis. Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(K_2/K_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Theta_{K_2}(\sigma^\flat(\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n])) &= \Theta_{K_2}(\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\sigma^\flat(\bar{x}_n)]) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \theta_{K_2}(\sigma^\flat(\bar{x}_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \sigma(\theta_{K_2}(\bar{x}_n)) = \sigma(\sum_{n=0}^{\infty} p^n \theta_{K_2}(\bar{x}_n)) \\ &= \sigma(\Theta_{K_2}(\sum_{n=0}^{\infty} p^n[\bar{x}_n])).\end{aligned}$$

Dabei folgt die dritte beziehungsweise vierte Gleichheit aus der Stetigkeit von σ zusammen mit Bemerkung 5.2.3. □

Lemma 5.4.3 (siehe Proposition 1.6.2. aus [18])**.** *Sei K_2/K_1 eine Erweiterung perfektoider Körper, sodass $K_2^\flat/K_1^\flat$ endlich ist. Dann ist der Homomorphismus*

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(K_2/K_1) &\to \mathrm{Aut}(K_2^\flat/K_1^\flat) \\ \sigma &\mapsto \sigma^\flat\end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Um die Injektivität zu zeigen, sei $\sigma^\flat$ die Identität. Es operiert $\sigma^\flat$ als Identität auf $W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})$. Lemma 5.4.2 und die Surjektivität von Θ_{K_2} implizieren, dass ein Urbild σ von $\sigma^\flat$ schon die Identität ist.
Nun zeigen wir die Surjektivität. Das Element $z \in \mathrm{Ker}(\Theta_{K_1})$ ist ein Erzeuger von $\mathrm{Ker}(\Theta_{K_1})$. Die Operation von $\mathrm{Aut}(K_2^\flat/K_1^\flat)$ auf $W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})$ lässt z fest. Das führt zu einer Operation auf $W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}) \cong \mathfrak{o}_{K_2}$ und damit auf K_2. Die so definierte Operation von $\mathrm{Aut}(K_2^\flat/K_1^\flat)$ auf $\mathfrak{o}_{K_2}$ lässt $W(\mathfrak{o}_{K_1^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K_1^\flat}) \cong \mathfrak{o}_{K_1}$ fest. Wir erhalten damit einen Automorphismus $\sigma^\sharp$ von K_2, der K_1 festlässt. Damit haben wir einen Homomorphismus

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(K_2^\flat/K_1^\flat) &\to \mathrm{Aut}^{\mathrm{cont}}(K_2/K_1) \\ \sigma &\mapsto \sigma^\sharp.\end{aligned}$$

Nach Definition gilt

$$\Theta_{K_2}([\sigma(x)]) = \sigma^\sharp(\Theta_{K_2}([x])) \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{o}_{K_2^\flat}.$$

Wir müssen zeigen, dass $(\sigma^\sharp)^\flat = \sigma$ gilt. Für jedes

$$x = (x_0 \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., x_n \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...) \in \mathfrak{o}_{K_2^\flat}$$

gilt

$$x_n \equiv \theta_{K_2}(x^{1/p^n}) \equiv \Theta_{K_2}([x^{1/p^n}]) \qquad \mathrm{mod}\ (p)$$

und damit

$$x = (\Theta_{K_2}([x]) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., \Theta_{K_2}([x^{1/p^n}]) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...). \tag{5.7}$$

Nun können wir berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= (\Theta_{K_2}([\sigma(x)]) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., \Theta_{K_2}([\sigma(x)^{1/p^i}]) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...)\\ &= (\sigma^\sharp(\Theta_{K_2}([x])) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., \sigma^\sharp(\Theta_{K_2}([x^{1/p^i}])) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...)\\ &= (\sigma^\sharp)^\flat((\Theta_{K_2}([x])) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ..., \Theta_{K_2}([x^{1/p^i}]) \bmod p\mathfrak{o}_{K_2}, ...))\\ &= (\sigma^\sharp)^\flat(x).\end{aligned}$$

□

Lemma 5.4.4 (Lemma 1.6.3. in [18]). *Seien $K_1 \subseteq K_2$ zwei perfektoide Körper in Charakteristik 0, sodass $K_2^\flat/K_1^\flat$ eine endliche Galoiserweiterung ist. Dann ist K_2/K_1 eine endliche Galoiserweiterung, und die Abbildung*

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(K_2/K_1) &\to \mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat),\\ \sigma &\mapsto \sigma^\flat\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Lemma 5.4.3 ist der Homomorphismus $\mathrm{Aut}(K_2/K_1) \to \mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)$ bijektiv. Außerdem ist der Isomorphismus $\overline{\Theta}_{K_2} : W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}) \to \mathfrak{o}_{K_2}$ äquivariant für die Aktion dieser beiden Gruppen. Wir bekommen also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})^{\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)} \arrow[r, "\overline{\Theta}_{K_2}"] & \mathfrak{o}_{K_2}^{\mathrm{Aut}(K_2/K_1)} \\ W(\mathfrak{o}_{K_1^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K_1^\flat}) \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\overline{\Theta}_{K_1}"'] & \mathfrak{o}_{K_1} \arrow[u, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

Dabei sind die waagerechten Pfeile Isomorphismen.
Andererseits haben wir die exakte Sequenz

$$0 \to W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}) \xrightarrow{z\cdot} W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}) \to W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}) \to 0,$$

und damit die exakte Sequenz

$$\begin{aligned}0 \to W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})^{\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)} \xrightarrow{z\cdot} W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})^{\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)} &\to (W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})/zW(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}))^{\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)}\\ &\to H^1(\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat), W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})).\end{aligned}$$

Es gilt $W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})^{\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)} = W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}^{\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)}) = W(\mathfrak{o}_{K_1^\flat})$. Nach [20, VII, §2, Cor. 1] wird $H^1(\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat), W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}))$ durch die Ordnung von $\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat)$ annuliert.

Die Gruppe $H^1(\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat), W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}))$ ist ein $\mathbb{Z}_p$-Modul [4]. Da in $\mathbb{Z}_p$ alle Primzahlen bis auf p invertierbar sind, wird $H^1(\mathrm{Gal}(K_2^\flat/K_1^\flat), W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat}))$ von einer p-Potenz annuliert. Zusammengenommen ergibt sich, dass der Kokern des linken senkrechten Pfeils in obigem Diagramm von einer p-Potenz annuliert wird und damit auch der Kokern des rechten senkrechten Pfeils. Geht man zu den Quotientenkörpern über, erhält man also $K_1 = K_2^{\mathrm{Aut}(K_2/K_1)}$. Nach Artins Theorem ist damit K_2/K_1 galoissch mit Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(K_2/K_1)$. □

Satz 5.4.5 (Proposition 1.6.8. in [18]). *Es gilt:*

(i) Jede endliche Erweiterung K_1/K ist perfektoid.

(ii) Wenn K_1 perfektoid ist, dann ist K_1/K genau dann endlich, wenn $K_1^\flat/K^\flat$ endlich ist. In diesem Fall gilt $[K_1 : K] = [K_1^\flat : K^\flat]$.

Beweis. Setze $F := K^\flat$. Sei F^{alg} der algebraische Abschluss von F in $(\widehat{K^{alg}})^\flat$. Dann ist F^{alg} die Vereinigung aller endlichen galoisschen Teilerweiterungen F_2/F. Nach [18, Remark 1.6.4] ist jedes derartige F_2 vollständig und perfekt, also perfektoid. Damit ist $F_2 = K_2^\flat$ damit der Tilt eines eindeutigen perfektoiden Körpers K_2/K. Nach Lemma 5.4.4 ist K_2/K endlich und galoissch und es gilt $\mathrm{Gal}(K_2/K) \cong \mathrm{Gal}(F_2/F)$. Alle Zwischenkörper von F_2/F sind nach [18, Remark 1.6.4] perfektoid, also Tilts von perfektoiden Zwischenkörpern von K_2/K. Wegen des Isomorphismus' der Galoisgruppen sind alle Zwischenkörper von K_2/K perfektoid. Sei K^{perf} die Vereinigung aller solcher endlichen Galoiserweiterungen K_2/K Damit ist jede endliche Erweiterung K_1/K mit $K_1 \subseteq K^{perf}$ perfektoid, denn sie ist in einem K_2 enthalten. Aufgrund von Lemma 5.4.4 und Galoistheorie gilt $[K_1 : K] = [K_1^\flat : K^\flat]$.
Die Vervollständigung von K^{perf} ist ein perfektoider Körper, dessen Tilt $\widehat{F^{alg}}$ ist. Da $\widehat{F^{alg}}$ perfektoid und algebraisch abgeschlossen ist, gilt $\widehat{F^{alg}} = (\widehat{K^{alg}})^\flat$.
Da $\widehat{K^{alg}}$ der eindeutige Körper mit Tilt $\widehat{F^{alg}}$ ist, folgt $\widehat{K^{perf}} = \widehat{K^{alg}}$. Da K^{alg} algebraisch über K ist und K vollständig ist, erhält jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{alg}/K^{perf})$ den Betrag und ist somit stetig. K^{perf} liegt dicht in $\widehat{K^{perf}} = \widehat{K^{alg}}$, also auch in K^{alg}. Damit ist jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{alg}/K^{perf})$ die Identität und es gilt $K^{perf} = K^{alg}$.
Also ist jede endliche Erweiterung K_1/K perfektoid und es gilt $[K_1 : K] = [K_1^\flat : K^\flat]$. Wenn andersherum K_1 perfektoid und $K_1^\flat/K^\flat$ endlich ist, dann ist $K_1^\flat$ in einem F_2 enthalten und K_1 ist im entsprechenden Körper K_2 enthalten. □

Satz 5.4.6 (Theorem 1.6.4. in [12]). *Sei L eine endliche Erweiterung von K. Dann ist die Spur* $\mathrm{Tr} : \mathfrak{m}_L \to \mathfrak{m}_K$ *surjektiv.*

Beweis. Sei zunächst L/K galoissch.
Nach Lemma 5.4.5 ist L ebenfalls perfektoid. Wir betrachten $K^\flat$ und $L^\flat$. Wegen Perfektheit von $K^\flat$ ist $L^\flat$ eine endliche separable Erweiterung von $K^\flat$. Darum finden wir ein $u \in \mathfrak{m}_{K^\flat} \setminus \{0\}$, sodass $u\mathfrak{o}_{K^\flat} \subseteq \mathrm{Tr}(\mathfrak{m}_{L^\flat})$ gilt. Da der Frobenius nach Voraussetzung surjektiv ist, können wir u durch $u^{p^{-n}}$ ersetzen für alle $n \in \mathbb{N}$. Also

[4] $\mathfrak{o}_{K_2^\flat}$ ist eine $\mathbb{Z}_p$-Algebra, also auch $W(\mathfrak{o}_{K_2^\flat})$, siehe [18, Proposition 1.1.8].

ist $\mathrm{Tr}_{L^\flat/K^\flat}: \mathfrak{m}_{L^\flat} \to \mathfrak{m}_{K^\flat}$ surjektiv.
K ist nicht diskret bewertet, deshalb finden wir ein $t \in \mathfrak{m}_K$ mit $p^{-1} < |t| < 1$. Da L eine endliche separable Erweiterung von K ist, finden wir eine positive natürliche Zahl m, sodass $(p/t)^m \mathfrak{m}_K \subseteq \mathrm{Tr}(\mathfrak{m}_L)$ gilt. Sei $x \in \mathfrak{m}_K$. Wir finden ein Element $(x \bmod p\mathfrak{o}_K, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_K, ...) \in \mathfrak{m}_{K^\flat}$. Wegen Lemma 5.4.3 und Satz 5.4.5 ist $L^\flat/K^\flat$ galoissch.
Wir finden ein $y = (y_0 \bmod p\mathfrak{o}_L, ..., y_i \bmod p\mathfrak{o}_L, ...) \in \mathfrak{m}_{L^\flat}$ mit

$$\begin{aligned}(x \bmod p\mathfrak{o}_L, ..., x_i \bmod p\mathfrak{o}_L, ...) &= \mathrm{Tr}_{L^\flat/K^\flat}(y)\\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma^\flat(y)\\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma^\flat((y_0 \bmod p\mathfrak{o}_L, ..., y_i \bmod p\mathfrak{o}_L, ...))\\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} (\sigma(y_0) \bmod p\mathfrak{o}_L, ..., \sigma(y_i) \bmod p\mathfrak{o}_L, ...),\end{aligned}$$

wobei wir den Isomorphismus zwischen den Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(L^\flat/K^\flat) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$ benutzen (Lemma 5.4.4). Anwenden der Projektion $\mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_K/(p)$ ergibt

$$x \equiv \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0) \quad \bmod (p),$$

wir finden also ein $a \in \mathfrak{o}_K$ mit $x = \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0) + pa$. Dann gilt, indem wir dasselbe Verfahren wiederholen,

$$\begin{aligned}x &= \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0) + pa\\ &= \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0) + p/t \cdot ta\\ &= \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0) + p/t(\mathrm{Tr}_{L/K}(y') + pa')\\ &= \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0) + \mathrm{Tr}_{L/K}(p/t \cdot y') + (p/t)^2 \cdot ta'\\ &= \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0 + p/t \cdot y') + (p/t)^2(\mathrm{Tr}_{L/K}(y'') + pa'')\\ &= \mathrm{Tr}_{L/K}(y_0 + p/t \cdot y' + (p/t)^2 y'') + (p/t)^3 \cdot ta''\end{aligned}$$

für bestimmte Elemente $y', y'' \in \mathfrak{m}_L$ und $a', a'' \in \mathfrak{o}_K$. Wir können iterativ so verfahren, bis schließlich der letzte Summand in $(p/t)^m \mathfrak{m}_K$ und damit im Bild der Spur liegt.
Daraus folgt $x \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{m}_L)$ und damit die Behauptung.
Für eine beliebige endliche Erweiterung L/K betrachten wir die normale Hülle L^n von L über K und wenden das bereits bewiesene auf L^n/L und L^n/K an und benutzen die Transitivität der Spurabbildung. □

Bemerkung 5.4.7. Aus dem ersten Teil des Beweises ist ersichtlich, dass die Aussage des vorherigen Satzes auch für perfektoide Körper von Charakteristik p gilt.

Korollar 5.4.0.1. *Sei $\mathcal{F}$ eine separable Erweiterung eines lokalen Körpers, sodass die Vervollständigung $\widehat{\mathcal{F}}$ perfektoid ist. Sei $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine separable endliche Erweiterung. Dann gilt* $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}) = \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$.

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ galoissch. Sei x ein Element mit $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}'$. Dann gilt $\widehat{\mathcal{F}'} = \widehat{\mathcal{F}}(x)$, denn einerseits gilt klarerweise $\widehat{\mathcal{F}}(x) \subseteq \widehat{\mathcal{F}'}$, und andererseits gilt $\mathcal{F}' \subseteq \widehat{\mathcal{F}}(x)$ und $\widehat{\mathcal{F}}(x)$ ist vollständig und die Bewertung von $\widehat{\mathcal{F}'}$ setzt die Bewertung auf $\widehat{\mathcal{F}}$ eindeutig auf $\widehat{\mathcal{F}}(x)$ fort, also gilt $\widehat{\mathcal{F}}(x) = \widehat{\mathcal{F}'}$. Also ist $\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}}$ eine endliche separable Erweiterung. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{F}'/\mathcal{F})$ ein beliebiges Element. Wir können σ per (gleichmäßiger) Stetigkeit zu einem $\widehat{\mathcal{F}}$-Automorphismus von $\widehat{\mathcal{F}'}$ fortsetzen. Andererseits gilt $\operatorname{ord}\mathrm{Aut}(\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}}) \le [\widehat{\mathcal{F}'} : \widehat{\mathcal{F}}] \le [\mathcal{F}' : \mathcal{F}] = \operatorname{ord}\mathrm{Gal}(\mathcal{F}'/\mathcal{F})$, also ist die Abbildung $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}'/\mathcal{F}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}})$ ein Isomorphismus, $\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}}$ ist galoissch und es gilt $\mathrm{Tr}_{\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}}}(y) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(y)$ für alle $y \in \mathcal{F}'$.
Es ist $\widehat{\mathcal{F}'}$ als endliche Erweiterung von $\widehat{\mathcal{F}}$ ebenfalls perfektoid.
Sei zunächst $\mathrm{char}(\mathcal{F}) = 0$, und sei $x \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ ein beliebiges Element. Wir finden wegen Satz 5.4.6 ein $y_0 \in \mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}'}}$ mit $x = \mathrm{Tr}_{\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}}}(y_0)$. Da $\mathcal{F}'$ dicht in $\widehat{\mathcal{F}'}$ liegt, finden wir ein $y \in \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ mit $|y_0 - y| < |p|$, also gilt

$$x \equiv \mathrm{Tr}_{\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}}}(y) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(y) \qquad \mathrm{mod}\ (p).$$

Wir erhalten durch ähnliche Argumentation wie im obigen Beweis die Surjektivität der Spur.
Sei nun $\mathrm{char}(\mathcal{F}) = p$. Sei $b \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ ein Element mit $1 > |b| > 0$. Wir finden ein $t \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ mit $|b| < |t| < 1$ und eine natürliche Zahl m mit $(b/t)^m \mathfrak{m}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{F}'})$ (da $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ nach Voraussetzung separabel ist). Sei $x \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$. Wir finden aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{F}'$ in $\widehat{\mathcal{F}'}$ und wegen Bemerkung 5.4.7 ein Elements $y \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}'}$ mit

$$x \equiv \mathrm{Tr}_{\widehat{\mathcal{F}'}/\widehat{\mathcal{F}}}(y) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}'/\mathcal{F}}(y) \qquad \mathrm{mod}\ (b),$$

und ähnlich wie im Beweis von Satz 5.4.6 im Fall $\mathrm{char}(\mathcal{F}) = 0$ folgern wir die Behauptung.
Wenn $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ nicht galoissch ist, können wir wieder zur normalen Hülle von $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ übergehen und die Transitivität der Spur ausnutzen. □

Wenn also $\mathcal{F}/F$ eine separable Erweiterung des lokalen Körpers F ist, sodass die Vervollständigung von $\mathcal{F}$ perfektoid ist, dann ist $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt. Wenn $\mathcal{F}$ ein perfektoider Zwischenkörper von $\mathbb{C}_p/\mathbb{Q}_p$ ist, dann ist $\mathcal{F} \cap \mathbb{Q}_p^{alg}$ tief verzweigt, denn jeder vollständige Zwischenkörper von $\mathbb{C}_p/\mathbb{Q}_p$ ist die Vervollständigung einer algebraischen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ (siehe Proposition 1.6.6 in [18]).

Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren:

Satz 5.4.8. *[Theorem 1.6.2 in [12]] Wenn L/K eine endliche Erweiterung ist, dann ist $\Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_K} = 0$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es ein $z \in \mathfrak{o}_L$ gibt, sodass $z \cdot \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_K} = 0$ gilt. Dazu betrachten wir die exakte Sequenz (Lemma 3.2.2)

$$\Omega_{K/\mathfrak{o}_K} \otimes_K L \to \Omega_{L/\mathfrak{o}_K} \to \Omega_{L/K} \to 0.$$

Nach [7, Proposition 16.9] gilt $\Omega_{K/\mathfrak{o}_K} = K \otimes_{\mathfrak{o}_K} \Omega_{\mathfrak{o}_K/\mathfrak{o}_K} = 0$. Außerdem ist $\Omega_{L/K} = 0$, da L/K separabel ist. Also ist $0 = \Omega_{L/\mathfrak{o}_K} = L \otimes_{\mathfrak{o}_L} \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_K}$, wobei wir wieder [7, Proposition 16.9] benutzen. Nun können wir aus [5, I, § 2.11, Proposition 13] folgern, dass für alle $x \in \mathfrak{o}_L$ ein $v \in \mathfrak{o}_L \setminus \{0\}$ existiert, sodass $v \cdot dx = 0$ gilt.
Sei nun $e_1, ..., e_d \in \mathfrak{o}_L$ eine Basis von L/K. Dann finden wir ein $t \in \mathfrak{o}_L \setminus \{0\}$, sodass $t \cdot \mathfrak{o}_L \subseteq \bigoplus e_i \mathfrak{o}_K$ gilt (siehe den Beweis von Lemma 4.2.1). Wir wählen ein u, sodass $u \cdot de_i = 0$ für alle $i = 1, ..., d$ gilt. Dann ist $z := tu$ das gesucht Element.
Da K und damit auch L perfektoid sind, finden wir für alle $x \in \mathfrak{o}_L$ Elemente $y, z \in \mathfrak{o}_L$, sodass $x = y^p + pz$ gilt. Dann haben wir

$$dx = p \cdot dy^{p-1} + p \cdot dz,$$

also gilt $\Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_K} = p \cdot \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_K}$ und iterativ folgt für alle natürlichen Zahlen n

$$\Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_K} = p^n \cdot \Omega_{\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_K}.$$

Wir finden ein n, sodass $z | p^n$, und die Aussage folgt mit dem ersten Teil des Beweises.
Wenn $\mathcal{F}$ eine separable Erweiterung eines lokalen Körpers ist, dessen Vervollständigung $\widehat{\mathcal{F}}$ perfektoid ist, und $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ eine endliche separable Erweiterung ist, können wir in Charakteristik 0 analog argumentieren, denn es gilt, da $\mathcal{F}'$ dicht in der Vervollständigung $\widehat{\mathcal{F}}'$ liegt, $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}'}/p\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}'} \cong \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/p\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$. In Charakteristik p wählen wir ein Element $b \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$. Dann ist der Frobenius surjektiv auf $\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}'}/b\mathfrak{o}_{\widehat{\mathcal{F}}'} \cong \mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}/b\mathfrak{o}_{\mathcal{F}'}$ und wir können ähnlich wie im ersten Teil des Beweises argumentieren. $\square$

6 Arithmetisch proendliche Körpererweiterungen

Sei $\mathcal{F}/F$ eine Erweiterung, $\mathcal{F} \subseteq F^{sep}$. Wir bezeichnen die absoluten Galoisgruppen von F beziehungsweise $\mathcal{F}$ mit $G_F = \mathrm{Gal}(F^{sep}/F)$ bezeihungsweise $G_{\mathcal{F}} = \mathrm{Gal}(F^{sep}/\mathcal{F})$. Die folgende Definition stammt aus [21].

Definition (Arithmetisch proendlich)**.** Die Erweiterung $\mathcal{F}/F$ heißt *arithmetisch proendlich (APF)*, wenn die Gruppe $G_F^u G_{\mathcal{F}}$ für alle $u \geq -1$ offen in G_F ist.

Lemma 6.0.1. *Unendliche arithmetisch proendliche Erweiterungen sind tief verzweigt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}/F$ eine unendliche APF-Erweiterung. Wenn es ein $u \in [-1, \infty)$ gäbe, sodass $\mathcal{F} \subseteq F^{(u)}$ gilt, dann wäre $G_F^u G_{\mathcal{F}} = G_{\mathcal{F}}$ nicht mehr von endlichem Index in G_F. Insbesondere hat $\mathcal{F}/F$ unendlichen Führer und ist damit nach Lemma 3.1.10 tief verzweigt.
Andersherum ist die Restklassenkörpererweiterung von $\mathcal{F}/F$ notwendigerweise endlich (denn andernfalls wäre $G_F^0 G_{\mathcal{F}}$ nicht von endlichem Index in G_F). Wenn man eine Erweiterung eines lokalen Körpers mit unendlicher Restklassenkörpererweiterung mit einer tief verzweigten Erweiterung kompositioniert, erhält man eine Erweiterung, die tief verzweigt, aber nicht arithmetisch proendlich ist. Zum Beispiel ist das Kompositum von $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ mit der maximal unverzweigten Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ über $\mathbb{Q}_p$ tief verzweigt, aber nicht arithmetisch proendlich. $\square$

Sei im Folgenden $\mathcal{F}/F$ eine unendliche Erweiterung, $\mathcal{F} \subseteq F^{sep}$. Setze $B := \{b \in \mathbb{R}_+^* \mid G_F^{b+\varepsilon} G_{\mathcal{F}} \neq G_F^b G_{\mathcal{F}}\}$. Das ist die Menge der *Sprünge* von $\mathcal{F}/F$.

Lemma 6.0.2. *Wenn $\mathcal{F}/F$ APF ist, dann ist B diskret und unbeschränkt.*

Beweis. B ist diskret, denn andernfalls gäbe es unendliche viele Sprünge $\leq n$ für eine reelle Zahl n und $G_F^n G_{\mathcal{F}}$ hätte keinen endlichen Index in G_F.
Angenommen, B wäre endlich. Dann gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $G_F^x G_{\mathcal{F}} = G_F^{x+\varepsilon} G_{\mathcal{F}} = G_{\mathcal{F}}$ für alle $\varepsilon > 0$ gelten würde (nämlich $x = \max B$). Dann wäre aber der Index von $G_F^x G_{\mathcal{F}}$ in G_F nicht mehr endlich, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. $\square$

Das folgende Beispiel ist eine tief verzweigte Erweiterung M von $\mathbb{Q}_p$, deren Menge der Sprünge B dicht in $[0, \infty)$ liegt. Insbesondere ist sie nicht APF.

Beispiel (Ch. IV, Sect. 6, Exercise 10 in [9]). Sei M die maximale abelsche Erweiterung der maximalen abelschen Erweiterung der maximalen abelschen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Dann liegt die Menge der Sprünge B dicht in $[0, \infty)$.

Beweis. [1] Sei r/n eine rationale Zahl mit $p \nmid n$. Wir konstruieren eine endliche Erweiterung $L/\mathbb{Q}_p$ in M, die einen oberen Sprung an der Stelle r/n hat. Dann hat auch $M/\mathbb{Q}_p$ einen Sprung an der Stelle r/n.
Sei $L_0 := \mathbb{Q}_p(\zeta)$ mit einer primitiven n-ten Einheitswurzel ζ. Dann ist $L_0/\mathbb{Q}_p$ unverzweigt von Grad m, wobei m die kleinste natürliche Zahl ist, sodass $p^m \equiv 1 \bmod n$ (siehe [15, V, § 6, Satz 6.3]). Außerdem ist $L_0/\mathbb{Q}_p$ abelsch.
Dann definieren wir $L_1 := L_0(p^{1/n})$ durch Adjungieren einer n-ten Wurzel von p. Diese Erweiterung ist total verzweigt von Grad n. Da $p \nmid n$ gilt, ist sie zahm verzweigt. Da L_0 eine primitive n-te Einheitswurzel enthält, ist L_1/L_0 nach [4, 4.8, Satz 3] zyklisch.
Drittens sei L_2/L_1 eine total verzweigte abelsche Erweiterung, die einen oberen Sprung bei r hat (siehe [20, IV, § 4, Proposition 18]). Dann ist $L_2/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung in M, und es gilt

$$\begin{aligned}\psi_{L_2/\mathbb{Q}_p} &= \psi_{L_2/L_1} \circ \psi_{L_1/L_0} \circ \psi_{L_0/\mathbb{Q}_p}(r/n)\\ &= \psi_{L_2/L_1}(n \cdot r/n)\\ &= \psi_{L_2/L_1}(r).\end{aligned}$$

Da L_2/L_1 einen oberen Sprung an der Stelle r hat, folgt, dass $L_2/\mathbb{Q}_p$ einen oberen Sprung an der Stelle r/n hat.
Bezeichne mit K die Vervollständigung der maximalen unverzweigten Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Dann ist MK/K eine tief verzweigte Erweiterung mit trivialer Restklassenkörpererweiterung, die nicht APF ist. □

Lemma 6.0.3 (Proposition 2.3 in [8]). *Wir nehmen an, dass der Restklassenkörper von F endlich ist. Sei $\mathcal{F}/F$ eine Galoiserweiterung mit endlicher Restklassenkörpererweiterung. Dann ist $\mathcal{F}/F$ genau dann arithmetisch proendlich, wenn $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt ist und die Menge der Sprünge B diskret ist.*

Beweis. Wenn $\mathcal{F}/F$ APF ist, dann ist $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt nach Lemma 6.0.1. Nach Lemma 6.0.2 ist die Menge der Sprünge diskret.
Andersherum sei B diskret und $\mathcal{F}/F$ tief verzweigt. Dann ist B zusätzlich unbeschränkt. Wir zeigen, dass für $n \geq 1$

$$(\mathrm{Gal}(\mathcal{F}/F)^{b_n} : \mathrm{Gal}(\mathcal{F}/F)^{b_{n+1}}) \leq p^f$$

gilt, wobei p^f die Kardinalität des Restklassenkörpers von $\mathcal{F}$ ist.
Sei zunächst M/F eine endliche Galoiserweiterung mit zwei aufeinanderfolgenden oberen Sprüngen u_1 und u_2. Wir bezeichnen die Fixkörper von $\mathrm{Gal}(M/F)^{u_1}$ beziehungsweise $\mathrm{Gal}(M/F)^{u_2}$ mit K_1 beziehungsweise K_2.
Wir finden ganze Zahlen v_1 und v_2 mit $u_1 = \psi_{M/F}(v_1)$ beziehungsweise $u_2 = \psi_{M/F}(v_2)$. Dann stimmt $\mathrm{Gal}(M/F)^{u_2} = \mathrm{Gal}(M/F)_{v_2}$ mit $\mathrm{Gal}(M/F)_{v_1+1}$ überein. Nach [20, IV, §2, Proposition 6 und 7] gibt es eine Injektion von $\mathrm{Gal}(M/F)_{v_1}/\mathrm{Gal}(M/F)_{v_1+1}$

[1] Der Beweis stammt aus einem Post auf math.stackexchange.com, siehe `http://math.stackexchange.com/questions/2116442`

in die multiplikative oder in die additive Gruppe des Restklassenkörpers $\bar{M}$ von M. Daraus folgt, dass der Grad der Erweiterung K_2/K_1 nicht größer als die Kardinalität von $\bar{M}$ sein kann.
Sei nun E_n der Fixkörper von $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}/F)^{b_n}$ für $n \geq 1$ und $E_0 := F$. Wir wollen per Induktion über n zeigen, dass

$$[E_{n+1} : E_n] \leq p^f$$

gilt. Für $n = 0$ stimmt das aufgrund der Voraussetzung an die Restklassenkörpererweiterung.
Nach Induktionsannahme ist $[E_n : F] < \infty$. Wähle einen Turm von endlichen Erweiterungen F_j/F, sodass $\mathcal{F} = \bigcup_j F_j$ gilt. Dann finden wir für jedes n ein j, sodass $E_n \subseteq F_j$ gilt und b_n und b_{n+1} zwei aufeinanderfolgende Sprünge in der oberen Nummerierung von $\mathrm{Gal}(F_j/F)$ sind. Alle Sprünge b_n von $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}/F)$ sind obere Sprünge von endlichen galoisschen Teilerweiterungen, da B nach Voraussetzung diskret ist. Dann sind E_n bzw. $E_{n+1} \cap F_j$ die Fixkörper von $\mathrm{Gal}(F_j/F)^{b_n}$ bzw. $\mathrm{Gal}(F_j/F)^{b_{n+1}}$. Wie bereits im ersten Teil des Beweises gesehen, gilt dann $[E_{n+1} \cap F_j : E_n] \leq p^f$. Damit gilt auch $[E_{n+1} : E_n] \leq q^f$, da wir F_j vergrößern können und dieselbe Ungleichung erhalten. □

Beispiel. Wir betrachten die Erweiterung $\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Q}_p$, die durch Hinzufügen der p^n-ten primitiven Einheitswurzeln für alle $n \in \mathbb{N}$ entsteht. Diese Erweiterung ist abelsch, tief verzweigt und total verzweigt. Außerdem ist die Menge der Sprünge diskret, da die oberen Sprünge sämtlicher endlicher Teilerweiterungen $L/\mathbb{Q}_p$ natürliche Zahlen sind (siehe [20, V, § 7, Theorem 1]). Damit ist $\mathbb{Q}_{p^\infty}/\mathbb{Q}_p$ APF.

Literatur

[1] Antonio J. Engerl und Alexander Prestel. *Valued Fields.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[2] Adrain Iovita und Alexandru Zaharescu. „Galois Theory of B_{dR}^{+}“. In: *Composito Mathematica* 117 (1999).

[3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project.* `http://stacks.math.columbia.edu`. Online abrufbar unter. 2016.

[4] Siegfried Bosch. *Algebra.* 7. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2009. ISBN: 978-3-540-92812-6.

[5] Nicolas Bourbaki. *Commutative Algebra.* Hermann, 1972.

[6] Nikolai Diekert. „Der Tilt von überkonvergenten Potenzreihen“. Magisterarb. 2013. URL: `home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/preprints/diekert-diplom.pdf`.

[7] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Springer-Verlag New York, 1995.

[8] Ivan B. Fesenko. „On deeply ramified extensions“. In: *Journal London Mathematical Society* 57 (1998). URL: `https://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/ibf/drm.pdf`.

[9] Ivan B. Fesenko und Sergei V. Vostokov. *Local Fields and their Extensions.* 2nd. American Math Society. URL: `https://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/ibf/book/book.html`.

[10] Jean-Marc Fontaine. „Formes Differentielles et Modules de Tate des Variétés Abeliénnes sur les Corps Locaux“. In: *Inventiones mathematicae* 65 (1982).

[11] Liang Xiao und Igor Zhukov. „Ramification of higher local fieds, approaches and questions“. In: *St. Pertersburg Math. J.* 26 (2015). URL: `http://dx.doi.org/10.1090/spmj/1355`.

[12] Kiran S. Kedlaya. *New methods for (ϕ, Γ)-modules.* arXiv:1307.2937. Juli 2013.

[13] Chao Li. *Almost mathematics.* Zuletzt abgerufen am 28.03.2017. URL: `http://www.math.columbia.edu/~chaoli/docs/AlmostMathematics.html`.

[14] Falko Lorenz. *Algebra.* Bd. II. Springer, 2008.

[15] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 978-3-540-37663-7.

[16] J. Coates und R. Greenberg. „Kummer theory for abelian varietes over local fields“. In: *Inventiones mathematicae, Springer-Verlag* (1996).

[17] Lorenzo Ramero und Ofer Gabber. *Almost Ring Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[18] Peter Schneider. *Galois representations and* (φ, Γ)*-modules*. `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/phi-Gamma-modules-1.pdf`. Münster, 2015.

[19] Peter Scholze. „Perfectoid Spaces“. In: *Publ. Math. IHES 116, 245-313* (2012).

[20] Jean-Pierre Serre. *Local Fields*. Springer-Verlag New York Inc., 1979. ISBN: 978-1-475-75673-9.

[21] Jean-Pierre Wintenberger. „Le corps des normes de certain extensions infinies de coprs locaux; applications“. In: *Annales scientifiques de l'É.N.S.* (1983).

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

____

(Datum, Unterschrift)