COSSART JAN 17 -02

VALUATIONS II

Uniformisation et désingularisation des surfaces d'après Zariski

Vincent COSSART

Laboratoire de Mathématiques LAMA
Bâtiment FERMAT
Université de Versailles-Saint Quentin
45 avenue des États-Unis
78035 VERSAILLES
cossart@math.uvsq.fr

et

Laboratoire GAGE
Centre de Mathématiques
École Polytechnique
91128 PALAISEAU Cedex
cossart@ariana.polytechnique.fr

Abstract

With the help of Zariski's methods (valuations and complete ideals), you can get a proof of the desingularization of projective surfaces over any field.

Les méthodes de Zariski (valuations et idéaux complets) permettent de désingulariser les surfaces projectives sur un corps quelconque.

INTRODUCTION

Ce papier se compose de deux parties. Dans la première nous allons donner les ingrédients essentiels d'une preuve de la désingularisation des surfaces par *uniformisation et recollement*, [V, §8]. Dans la seconde, nous allons donner une preuve originale, utilisant la théorie des idéaux complets, du très beau théorème suivant : si on sait résoudre le problème d'*uniformisation*, pour une surface projective on désingularise cette surface projective par une suite finie de normalisations suivies de l'éclatement du lieu singulier.

UNIFORMISATION ET RECOLLEMENT

§1 Géométrie birationnelle

Dans cette section, nous nous proposons de reprendre les notions de points correspondants, points fondamentaux, etc. avec les définitions de Zariski et de montrer l'équivalence avec les définitions utilisées actuellement. Notre référence pour les définitions "actuelles" est le livre de Hartshorne [H].

Dans toute cette section, V et $\widehat{V}$ sont deux variétés projectives sur un corps de base k et birationnellement équivalentes, on note $\pi\ : V \cdots \to \widehat{V}$ l'application entre ces deux variétés [H], Z est leur variété de Riemann (que Zariski appelle surface de Riemann abstraite) [V §7]. Si π est défini sur V tout entier, on dira que V **domine** $\widehat{V}$.

Définition 1. *Un point $P \in V$ et un point $\widehat{P} \in \widehat{V}$ sont en correspondance si il existe une valuation $\nu \in Z$ dont le centre sur V est P et sur $\widehat{V}$ est $\widehat{P}$.*

Proposition 1. *Soit F un fermé de V, l'ensemble des points $\widehat{P}$ de $\widehat{V}$ en correspondance avec les points de F est un fermé de $\widehat{V}$.*

Preuve : Soit W une variété qui domine V et $\widehat{V}$. Soit $\widehat{F}$ le fermé de $\widehat{V}$ qui est la projection sur $\widehat{V}$ de l'image réciproque de F dans W, il est clair que $\widehat{F}$ est la projection sur $\widehat{V}$ de toutes les valuations de Z dont les centres sur V sont des points de F et que c'est donc l'ensemble des points de $\widehat{V}$ en correspondance avec les points de F.

Proposition 2. *Reprenons les hypothèses de la proposition 1 et supposons de plus que V est normale, si P est fermé, alors, l'ensemble des points de $\widehat{V}$ en correspondance avec P est un point fermé ou bien contient une courbe.*

Preuve : C'est un corollaire du "théorème principal" de Zariski [H, 11.4 p.280] qui nous assure que le fermé des points en correspondance avec P dans W est connexe et comme l'image d'un connexe est connexe, il en est de même pour les points de $\widehat{V}$ en correspondance avec P.

Malheureusement pour lui, en 1939, Zariski ne faisait que conjecturer le "théorème principal" et il a du faire une preuve *ad hoc* de la proposition 2, preuve qui nécessite l'hypothèse k infini.

Voici l'argument de Zariski. Supposons la proposition fausse. Alors, les points fermés $\widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_m$ en correspondance avec P sont en nombre fini $m \geq 2$. Comme k est infini, on peut trouver un ouvert affine U de $\widehat{V}$ contenant tous les $\widehat{P}_i$. Posons $\Delta = O_{\widehat{V},\widehat{P}_1} \cap \ldots \cap O_{\widehat{V},\widehat{P}_m}$. Comme V est normale, $O_{V,P}$ est égal à l'intersection des anneaux de valuation le dominant, on a donc les inclusions

$$O_{\widehat{V}}(U) \subset \Delta \subset O_{V,P}.$$

Notons $\mathfrak{P}_i$, $1 \leq i \leq m$ la trace sur Δ de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_i$ de $O_{\widehat{V},\widehat{P}_i}$, ces idéaux $\mathfrak{P}_i$ sont distincts deux à deux car, U contenant les P_i, $1 \leq i \leq m$, les traces sur $O_V(U)$ des $\mathfrak{M}_i$ sont les idéaux de définition des $\widehat{P}_i$ et sont distincts deux à deux. Soit $x \in \mathfrak{P}_1$ avec $x \notin \mathfrak{P}_2$, soit ν une valuation dont le centre sur $\widehat{V}$ est $\widehat{P}_1$, donc $x \in (M_\nu \cap \Delta) \subset M$ où M_ν et M sont les maximaux de R_ν et de $O_{V,P}$. Donc x est de valuation strictement positive pour toute valuation μ dominant P, on peut prendre μ dominant $\widehat{P}_2$, et donc $x \in \mathfrak{P}_2$, contradiction.

Proposition 3. *Reprenons les hypothèses et notations de la proposition 1 (on ne suppose plus que V est normale). Si π est définie en P, alors, $\widehat{P} = \pi(P)$ est le seul point de $\widehat{V}$ en correspondance avec P et on a $O_{\widehat{V},\widehat{P}} \subset O_{V,P}$, où l'inclusion est donnée par l'isomorphisme naturel entre les corps de fonctions de V et $\widehat{V}$ qui sont aussi les corps de fraction des anneaux locaux $O_{\widehat{V},\widehat{P}}$ et $O_{V,P}$.*

Preuve : Reprenons les notations de la preuve de la proposition 1, désignons par $e : W \longrightarrow V$ et par $\widehat{e} : W \longrightarrow \widehat{V}$, dans un voisinage de $e^{-1}(P)$, $\pi \circ e$ est défini et coïncide avec $\widehat{e}$, on en déduit que $\pi(P) = \widehat{e}(e^{-1}(P))$, d'après la démonstration précédente, $e(e^{-1}(P))$ est l'ensemble des points de $\widehat{V}$ en correspondance avec P, d'où la première assertion.

Maintenant, puisque $\widehat{P} = \pi(P)$, on a un morphisme $O_{\widehat{V},\widehat{P}} \longrightarrow O_{V,P}$ qui se prolonge à leurs corps de fractions, c'est une injection.

Proposition 4. *Soient P un point de V et $\widehat{P}$ un point de $\widehat{V}$, (P et $\widehat{P}$ pas forcément fermés), si on a $O_{\widehat{V},\widehat{P}} \subset O_{V,P}$, où l'inclusion est donnée par l'isomorphisme naturel entre les corps de fonctions de V et $\widehat{V}$, alors π est défini dans un voisinage de P et $\pi(P) = \widehat{P}$.*

Preuve : Soit $\omega = \mathrm{Spec}(k[\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n])$ un ouvert affine de $\widehat{V}$ contenant $\widehat{P}$, notons $\widehat{\mathfrak{P}}$ l'idéal de définition de P. On désigne par π^* l'isomorphisme naturel entre les corps de fonctions $K(\widehat{V}) = k(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ et $K(V)$.

Par restriction, π^* nous donne un morphisme

$$k[\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n] \longrightarrow k[\pi^*(\widehat{x}_1), \ldots, \pi^*(\widehat{x}_n)],$$

dont un prolongement est l'inclusion $O_{\widehat{V},\widehat{P}} \subset O_{V,P}$, donc $O_{V,P}$ est un localisé de

$k[\pi^*(\widehat{x}_1), \ldots, \pi^*(\widehat{x}_n)]$, $P \in \mathrm{Spec}(k[\pi^*(\widehat{x}_1), \ldots, \pi^*(\widehat{x}_n)])$, $\pi(P) = \widehat{P}$ et π est défini sur $\mathrm{Spec}(k[\pi^*(\widehat{x}_1), \ldots, \pi^*(\widehat{x}_n)])$. ∎

Ces propositions 3 et 4 impliquent que la définition de **point fondamental** utilisée par Zariski est équivalente à celle utilisée de nos jours [H, p. 410]. Constatons le en lisant ces deux définitions.

Définition 2 (Zariski). *Un point P de V est fondamental pour π si, pour tout point $\widehat{P} \in \widehat{V}$, π^* ne se restreint pas à une inclusion entre les anneaux locaux $O_{\widehat{V},\widehat{P}} \not\subset O_{V,P}$.*

Définition 2 bis [H] . *Le lieu fondamental de π est le complémentaire du plus grand ouvert de V où π est défini.*

Définition 3 (Joint de deux variétés birationnellement équivalentes). *On appelle joint de $\widehat{V}$ et de V l'adhérence du graphe de π dans $V \ \times_k \ \widehat{V}$.*

Proposition 5. *Désignons par p_1 et p_2 les projections du joint sur V d'une part et $\widehat{V}$ d'autre part. Soit U l'ouvert de définition de π. Alors, $p_1^{-1}(U)$ est isomorphe à U.*

Preuve : On a deux morphismes inverses l'un de l'autre :

$$p_1^{-1}(U) \ \longrightarrow \ U, \ (x, \pi(x)) \ \longmapsto \ x,$$

$$U \ \longrightarrow \ p_1^{-1}(U), \ x \ \longmapsto \ (x, \pi(x)).$$

Ces deux ouverts sont donc isomorphes en tant qu'espaces topologiques. Il suffit de se reporter à la proposition 3 ou plutôt à sa preuve pour constater que ces isomorphismes topologiques induisent des isomorphismes sur les anneaux locaux de x et $(x, \pi(x))$.

§2 Le problème du recollement en dimension 2.

Avant de nous atteler au recollement, prouvons un résultat fondamental [Z2, th. 10 p. 681] que nous allons prouver ici *sans supposer k algébriquement clos*. Dorénavant, une surface est une variété projective irréductible de dimension 2 sur un corps k.

Théorème 1 (Zariski). *Soit V une surface projective sur k, on définit par récurrence $V_i \longleftarrow V_{i+1}$, $0 \leq i$, $V_0 = V$ la flèche est l'éclatement suivi d'une normalisation d'un point fermé $P_i \in V_i$, P_i se projetant sur P_{i-1}, $1 \leq i$.*

Alors,

$$\Omega := \varinjlim(O_{V_i, P_i})$$

est un anneau de valuation et sa valuation est un point fermé de Z.

Preuve :

Rappelons qu'une valuation est *divisorielle* si son degré de transcendance est 1 et si l'inégalité d'Abhyankar est pour elle une égalité (et donc son groupe est $\mathbb{Z}$).

Lemme 1. *Soit R_ν, $\nu \in Z$, un anneau de valuation divisorielle contenant Ω, alors, pour i assez grand, le centre de ν dans V_i est de dimension 1.*

Preuve du lemme : En fait, il suffit de prouver que, pour un i, le centre de ν sur V_i est de dimension 1, car la dimension des centres est croissante avec i. Supposons le contraire, alors, le centre de ν dans V_i est un point fermé contenant P_i puisque $O_{V_i, P_i} \subset R_\nu$. Donc, pour tout i, $\frac{O_{V_i, P_i}}{\mathfrak{M}_i} = k_i$ est une extension algébrique de k. Mais, l'extension $k \subset \frac{R_\nu}{\mathfrak{M}_\nu}$ est transcendante, il existe donc un élément $x \in R_\nu$ de valuation nulle et dont l'image dans $\frac{R_\nu}{\mathfrak{M}_\nu}$ est transcendante sur k. Pour tout $i, 0 \leq i$, on a une égalité $x = \frac{p(i)}{q(i)}$ avec $p(i) \ \in O_{V_i, P_i}$, $q(i) \in O_{V_i, P_i}$. Comme l'image de x dans le corps résiduel de R_ν est transcendante sur k_i, ces éléments $p(i)$ et $q(i)$ ne sont pas inversibles dans O_{V_i, P_i}, ils sont donc de (même) valuation strictement positive, prenons les de valuation minimale, soit $\omega_i \in \mathbb{N}$ cette valuation. Je dis que

$$(1) \ \omega_{i+1} \ < \ \omega_i, \ 0 \leq i.$$

Ce qui est évidemment impossible pour une suite d'entiers positifs et ce qui nous donne la contradiction cherchée.

Prouvons (1). Comme $p(i) \in \mathfrak{M}_i$, dans $O_{V_{i+1},P_{i+1}}$, on a des factorisation $p(i) = tp'(i)$ et $q(i) = tq'(i)$ où t est un générateur du diviseur exceptionnel. Comme P_{i+1} est sur le diviseur exceptionnel, t n'est pas inversible dans $O_{V_{i+1},P_{i+1}}$, bref

$$\omega_{i+1} = \nu(p(i+1)) \leq \nu(p(i)) - \nu(t) < \nu(p(i)) = \omega_i.$$

Ce qui prouve (1) et le lemme.

Fin de la preuve du théorème.

L'anneau Ω est intègralement clos, donc, on a $\Omega = \bigcap R_\nu,\ \nu \in Z,\ \Omega \subset R_\nu$. Je dis que

$$(2)\ \Omega = \bigcap R_\nu,\ \nu \in Z,\ \nu \text{ fermée},\ \Omega \subset R_\nu.$$

En effet, les valuations non fermées de Z sont les valuations de degré de transcendance 1 ou 2. En degré 2, on a la valuation impropre d'anneau $K(V)$ dont les centres sont les points génériques des modèles. En degré 1, le groupe de la valuation n'étant pas trivial, il est de rang au moins 1, l'inégalité d'Abhyankar est alors une égalité et donc, le groupe de la valuation est $\mathbb{Z}$, la valuation est divisorielle [V, Th. 9.3] théorème d'Abhyankar §4). D'après le lemme, si ν est divisorielle, pour i assez grand, le centre Y_i de ν dans V_i est de dimension 1, mais, comme les V_i sont normalisées, O_{V_i,Y_i} est un anneau de valuation discrète dominé par R_ν , c'est donc R_ν. Il est clair que Y_{i+1} est le transformé strict de Y_i et donc, pour i assez grand, Y_i est une courbe régulière et tous les Y_i se projettent isomorphiquement les unes sur les autres, les P_i se correspondant dans ces isomorphismes. Les anneaux O_{V_i,Y_i} sont donc tous naturellement isomorphes, nous les confondons abusivement et les notons R. Cet anneau R est l'anneau local d'un point régulier sur une courbe : c'est un anneau de valuation discrète, $R = R_\nu$. D'autre part, les anneaux O_{Y_i,P_i} sont tous isomorphes pour i assez grand, nous les confondons tous et notons $\mathbf{R} = O_{Y_i,P_i}$, avec i assez grand.

On définit alors une valuation μ de $K(V)$ ainsi :

$$R_\mu = \{a \in R_\nu; \overline{a} \in \mathbf{R}\},$$

où $\overline{a}$ désigne la classe de a dans $\frac{R_\nu}{\mathfrak{M}_\nu} = K(Y_i) = Frac(\mathbf{R})$.

Il est clair que R_μ est un anneau, montrons que c'est un anneau de valuation de $K(V)$. Soit $x \in K(V)$ avec $x^{-1} \notin R_\mu$; si $x^{-1} \in R_\nu$, alors, $x^{-1} \notin \mathfrak{M}_\nu$ parce que $\mathfrak{M}_\nu \subset R_\mu$, donc $x \in R_\nu$ et donc, $\overline{x} \in R$ ou $\overline{x}^{-1}$, x ou x^{-1} est dans R_μ; si $x^{-1} \notin R_\nu$, alors, $x \in \mathfrak{M}_\nu$, et donc, $x \in R_\mu$. Maintenant, il est clair que μ est composée de ν et de la valuation d'anneau $\mathbf{R}$ et donc, le centre de μ sur V_i est P_i, pour tout i. Donc

$$O_{V_i,P_i} \subset R_\mu \subset R_\nu,\ 0 \leq i,$$

ce qui prouve (2).

Supposons que deux valuations fermées distinctes dominent Ω, soient ν_1 et ν_2, on peut trouver un modèle W où les centres de ν_1 et ν_2 sont deux points (fermés) distincts Q_1 et Q_2. Alors, d'après la proposition 2 de la section géométrie birationnelle, le fermé F_i des points de W en correspondance avec P_i contient une courbe, d'autre part, $F_i \supset F_{i+1},\ 0 \leq i$. Il existe donc une courbe irréductible C de W qui est dans l'intersection de tous les F_i, le point générique ξ de cette courbe est en correspondance avec tous les P_i, on peut prendre W lisse en ξ, auquel cas, la valuation divisorielle ν attachée au point ξ a pour centre P_i sur V_i, $0 \leq i$, ce qui contredit le lemme 1. Ainsi, un seul anneau R_ν avec ν fermée domine Ω, on a $\Omega = R_\nu$.

Remarque. *L'argument de la preuve de (2) nous permet de prouver le résultat suivant : si $O_{V,P}$ est normal, alors, $O_{V,P}$ est intersection des anneaux de valuations fermées qui le dominent.*

En effet, $O_{V,P}$ est intersection des anneaux des anneaux de valuation qui le contiennent, et on a prouvé que, pour toute valuation ν dont l'anneau R_ν contient $O_{V,P}$, il existe une valuation fermée μ telle que $O_{V,P} \subset R_\mu \subset R_\nu$, d'où le résultat.

Solution du problème du recollement

(Pb.) *Étant donnés deux modèles projectifs normaux F et F' de la surface V, construire un modèle $\widehat{F}$ telle que toute valuation ayant un centre régulier sur F ou F' a son centre régulier sur $\widehat{F}$* [V, §8].

Lemme 2. *Si F est normale, il n'y a dans F qu'un nombre fini de points fondamentaux pour $\pi : F \cdots \longrightarrow F'$.*

De plus, on pose $F_0 = F$, pour $0 \leq i$, soit $F_i \longleftarrow F_{i+1}$ le morphisme obtenu en éclatant les points fondamentaux de F_i pour sa correspondance avec F' et en normalisant l'éclaté. Pour i assez grand, F_i domine F'.

Preuve : Soit P un point fondamental de F. Éclatons P, normalisons l'éclaté, prenons dans cet éclaté-normalisé que nous notons abusivement F_1 un point fermé P_1 au-dessus de P, recommençons, d'après le théorème 1 ci-dessus, $\Omega := \varinjlim(O_{V_i,P_i})$ est un anneau de valuation, la valuation associée est fermée, soit P' le centre de cette valuation sur F', on a $O_{F',P'} \subset \Omega$, tous ces anneaux étant des localisés de k-algèbres de type fini, pour i assez grand, $O_{F',P'} \subset O_{F_i,P_i}$, donc P_i n'est pas fondamental pour F_i. Si la première assertion du lemme 2 est vraie, cela termine la preuve. Mais, cela prouve aussi la première assertion du lemme, en effet, si le lieu fondamental de F (qui est un fermé, cf. proposition 1 ci-dessus) contenait une infinité de points, il serait de dimension 1, on pourrait prendre P sur une composante C de dimension 1 de ce lieu fondamental de F, on prendrait les P_i sur le transformé strict de C, on obtiendrait une contradiction car le transformé strict de C est évidemment dans le lieu fondamental de F_i (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que F est normale, F et F_i sont isomorphes au-dessus du point générique de C).

On se ramène donc à résoudre (Pb.) dans le cas où F domine F'. Nous ne sommes pas au bout de nos peines car il se peut qu'il y ait des points réguliers de F' au-dessus desquels se trouvent des points singuliers de F. Ces points sont fondamentaux pour la correspondance de $F' \cdots \to F$, sinon, localement, les correspondances $F \longrightarrow F'$ et $F' \cdots \to F$ seraient des isomorphismes. Notons les $P_1, \ldots, P_m$.

On recommence notre processus d'éclatements suivis de normalisation en prenant pour centres des éclatements les points fermés de F' et des transformés de F' fondamentaux pour la correspondance avec F et *se projetant sur les P_i*. J'obtiens une nouvelle surface $\overline{F}'$ qui domine F' et dont le lieu fondamental pour sa correspondance avec F ne rencontre pas les fibres des P_i. Soit $\widehat{F}$ le joint de F et de $\overline{F}'$. En dehors de l'image réciproque des P_i, $\widehat{F}$ est isomorphe à F, dans un voisinage de ces points, $\widehat{F}$ est régulière et est isomorphe à $\overline{F}'$. Il est clair que $\widehat{F}$ résoud (Pb.).

§3 Résolution du problème d'uniformisation

Nous allons répertorier les valuations $\nu \in Z$ où Z est la surface de Riemann d'une surface singulière S par le triplet $(\text{rat.rk}(\nu), \text{rk}(\nu), \text{tr.deg}_k(\nu))$, de plus, nous séparerons les deux cas où $\text{rat.rk}(\nu) = 1 = \text{rk}(\nu)$ suivant que le groupe de ν est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou pas. On note $\text{tr.deg}_k(\nu)$ le degré de transcendance de l'extension $k \subset R_\nu/\mathcal{M}_\nu$ et $\text{rat.rk}(\nu)$ désigne le *rang rationnel* de ν, c'est à dire la dimension de $\Gamma_\nu \otimes \mathbb{Q}$, où Γ_ν est le groupe des valeurs (ou des ordres) de ν [V, §9]. Bien sûr, l'anneau de valuation associée à ν est noté R_ν. Nous nous contentons de rédiger les deux premiers cas, donner la preuve d'un lemme essentiel pour résoudre le troisième cas, et de citer les cas suivants. En effet, l'étude de ces cas dans [Z2] est limpide. Le lecteur qui lira la preuve dans [Z2] pourra s'amuser à noter les points où l'hypothèse $\text{char}(k) = 0$ intervient. Il y a maintenant des preuves de l'uniformisation en toute caractéristique, même en cas d'inégale caractéristique, mais elles sont fort compliquées [A2] et [CGO].

Premier cas, $\text{tr.deg}_k(\nu) = 2$. Par l'inégalité d'Abhyankar, on a $\text{rat.rk}(\nu) = 0$, ν est la valuation stupide dont l'anneau est $K(S)$, son centre sur S est le point générique de S qui est régulier.

Deuxième cas, $\text{tr.deg}_k(\nu) = 1$. Dans ce cas, l'anneau R_ν n'est pas $K(S)$. Le groupe de ν n'est pas trivial, donc, $\text{rat.rk}(\nu) \geq 1$, par l'inégalité d'Abhyankar, on a $\text{rat.rk}(\nu) = 1$, la valuation ν est divisorielle. D'après le corollaire de I, §4, il existe une surface S' où le centre de ν est de dimension 1, sur la normalisée $\widehat{S}'$ de S', le centre de ν est une courbe irréductible dont le point générique n'est pas singulier dans $\widehat{S}'$, donc $\widehat{S}'$ uniformise μ.

Troisième cas, $\text{rat.rk}(\nu) = 2 = \text{rk}(\nu), \text{tr.deg}_k(\nu) = 0$ le groupe de ν est alors $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique. (Zariski appelle une telle valuation *valuation discrète*, ce qui n'est plus la terminologie actuelle.)

Bien sûr, il s'agit d'une valuation fermée qui est adhérente à la valuation divisorielle μ ainsi définie :

$$\forall x \in K(S),\ \mu(x) = \text{première coordonnée de } \nu(x).$$

On commence par construire un modèle projectif F de S avec :

1- F est dans un voisinage du centre de ν une hypersurface de $\mathbb{P}^3(k)$ d'un espace régulier.

2- Le centre C de μ sur F est une courbe irréductible qui n'est pas dans le lieu singulier de F.

Pour cela, on peut supposer qu'on a 2 pour S : on prend un modèle où le centre C de μ est de dimension 1, puis on normalise, soit F' ce modèle. Si F' est plongée dans $\mathbb{P}^3(k)$, il n'y a rien à faire. Sinon, on choisit un point fermé $M \in C \subset F' \subset \mathbb{P}^n(k)$, $4 \leq n$, et M régulier sur C et sur F'. (Donc M n'est en général pas le centre de ν.) L'ensemble des droites de passant par M est une variété de dimension n-1 dans la grassmanienne des droites de $\mathbb{P}^n(k)$, tandis que l'ensemble des tangentes et des multi-sécantes de F' est une variété de dimension 2, (l'ensemble des droites passant par M est un $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ et l'ensemble des tangentes et des multi-sécantes à F' est isomorphe à la projection de F' depuis M sur $\mathbb{P}^{n-1}(k)$). On peut donc trouver une droite passant par M qui n'est ni tangente, ni multi-sécante à F'. On prend un point P sur cette droite et on projette depuis P sur un $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, la projection restreinte à F' et à la projection de F' est un isomorphisme dans un voisinage de M, bref, par projections successives, une récurrence décroissante sur n finit par donner 1 sans perdre 2, F est la projection de F' dans $\mathbb{P}^3(k)$. (Cette construction est dûe à l'auteur, dans [Z2], Zariski met en référence [Z1, §16, théorème 11] où il consruit F par des méthodes algébriques.)

Quatrième cas, $\text{rat.rk}(\nu) = 2, \text{rk}(\nu) = 1, \text{tr.deg}_k(\nu) = 0$, le groupe de ν est alors le groupe ordonné $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{R}$ où τ est un nombre irrationnel.

Cinquième cas, $\text{rat.rk}(\nu) = 1 = \text{rk}(\nu), \text{tr.deg}_k(\nu) = 0$, et le groupe de ν est un sous-groupe ordonné non discret de $\mathbb{Q}$.

Sixième cas, $\text{rat.rk}(\nu) = 1, \text{tr.deg}_k(\nu) = 0$ et le groupe de ν est $\mathbb{Z}$.

DÉSINGULARISATION PAR ÉCLATEMENTS NORMALISÉS

Théorème 1 ([Z2] et II §2). *Soit V une surface, on définit par récurrence $V_i \longleftarrow V_{i+1}$, $0 \leq i$, $V_0 = V$ la flèche est l'éclatement suivi d'une normalisation d'un point fermé $P_i \in V_i$, P_i se projetant sur P_{i-1}, $1 \leq i$.*

Alors,

$$\Omega := \varinjlim(O_{V_i, P_i})$$

est un anneau de valuation et sa valuation est un point fermé de Z.

Rappelons que la démonstration de ce théorème n'utilise aucune hypothèse sur le corps k. Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 2 (Zariski, Lipman). *Soit V une surface normale projective sur un corps k quelconque, si on sait résoudre le problème d'uniformisation pour toute valuation fermée de V, alors, l'algorithme suivant est fini :*

on note $V_0 = V$, on définit V_i par récurrence, si V_i est régulière, on s'arrête, sinon, on éclate le lieu singulier de V_i et on normalise cet éclaté, V_{i+1} est la surface obtenue.

Avant de faire une preuve de ce théorème, effectuons quelques simplifications.

Remarque 3. *Il suffit de montrer que, pour toute valuation ν fermée dans la surface de Riemann de V, il existe un i tel que le centre de ν dans V_i est régulier.*

En effet, supposons le théorème 2 faux. Alors, l'algorithme des éclatements normalisés du lieu singulier serait infini, on pourrait donc trouver une suite infinie de points fermés non réguliers P_i se projetant les uns sur les autres tels que les O_{V_i,P_i} vérifieraient les hypothèses du théorème 1. Donc, la limite inductive des O_{V_i,P_i} est l'anneau d'une valuation fermée ν [V §7], cela contredit le résultat annoncé dans la remarque.

Théorème 4. *On prend les hypothèses du théorème 2, on désigne par P_i le centre de ν dans V_i. Il existe un i tel que O_{V_i,P_i} domine un anneau local régulier R et est dominé par un anneau local régulier S.*

$$R \subset O_{V_i,P_i} \subset S,\ \mathit{Frac}(R) = \mathit{Frac}(O_{V_i,P_i}) = \mathit{Frac}(S).$$

Preuve

En effet, si le théorème 2 est vrai, l'algorithme s'arrête i_0 avec $O_{V_{i_0},P_{i_0}}$ régulier et on prend $R = O_{V_{i_0},P_{i_0}} = S$.

Sinon, l'algorithme est infini, il existe un modèle V' de V où le centre P' de ν est régulier. L'anneau $R = O_{V',P'}$ est essentiellement de type fini sur k et inclus dans la limite inductive des O_{V_i,P_i}, donc, pour un i_0, $R \subset O_{V_{i_0},P_{i_0}}$.

Maintenant, j'applique l'algorithme du théorème 1 à V' et aux points P'_j centres de ν, ces P'_j sont réguliers, $O_{V_{i_0},P_{i_0}}$ est essentiellement de type fini sur k, donc, pour j assez grand, $S = O_{V'_j,P'_j}$ domine $O_{V_{i_0},P_{i_0}}$.

Théorème 5. *Avec les notations précédentes, désignons par $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $O_{V_{i_0},P_{i_0}}$, alors, $\mathfrak{M}S$ est un idéal inversible de S.*

Remarque 6. *Le théorème 5 implique le résultat annoncé dans la remarque 3 et donc implique le théorème 2.*

En effet, soit $O_{V_{i_0},P_{i_0}}$ est régulier et il n'y a rien à prouver, soit il n'est pas régulier, mézalor, $\mathfrak{M}S$ est un idéal inversible de $S = O_{V'_j,P'_j}$, l'éclaté de V_{i_0} en P_{i_0} est dominé par S dans un voisinage du centre de ν, mais, comme V'_j est normale, la normalisation V_{i_0+1} de cet éclaté est aussi dominée par S au voisinage de P_{i_0+1} centre de ν. Donc $O_{V_{i_0+1},P_{i_0+1}}$ satisfait aux hypothèses du théorème 5, bref, si le résultat annoncé dans la remarque 3 est faux, pour tout entier n,

$$R \subset O_{V_{i_0+n},P_{i_0+n}} \subset S.$$

Mais, une fois de plus, cela contredit le théorème 1 car $S = O_{V'_j,P'_j}$ est essentiellement de type fini sur k.

Remarque historique 7. Le théorème 5 ci-dessus se trouve dans [L3] avec les hypothèses les plus minimales qui soient (V surface excellente), encore une fois, nous n'avons pas jugé utile de recopier ici la preuve, très courte, qui utilise la cohomologie et la suite spectrale de Leray [L3, 3.1]. La démonstration de [Z2] utilise l'hypothèse k algébriquement clos, le lecteur attentif s'apercevra qu'elle n'utilise aucune hypothèse sur la caractéristique de k. La preuve ci-dessous est dûe à l'auteur très fortement inspiré par Z. Elle ne suppose pas que k est algébriquement clos.

Hypothèses et Notations 8. On note très abusivement $V = V_{i_0}$ et $P = P_{i_0}$. Le morphisme $V'_j \longrightarrow V$ est un l'éclatement d'un idéal $I \subset O_V$, on note $g : W \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ l'éclatement de $IO_{V,P}$ et Q le centre de ν dans W (qui existe bien d'après le critère valuatif de propreté). Comme l'éclatement commute au changement de base plat, on a : $S = O_{W,Q}$.

Nous avons donc trois anneaux locaux emboités, chacun dominant le précédent :

$$R \ = \ O_{V',P'} \ \subset O_{V,P} \ \subset \ S \ = \ O_{W,Q}.$$

On passe de R à S par une suite d'éclatements normalisés de points fermés suivis de localisation. D'autre part, quitte à remplacer V par son joint avec V' puis W par son joint avec V, nous pouvons supposer que les morphismes $V \to V'$ et $W \to V$ sont définis partout. Enfin, nous désignons par Z la surface de Riemann-Zariski de V, V', W. L'anneau $O_{V,P}$ est le localisé d'une R-algèbre de type fini. On a donc, avec des notations évidentes :

$$O_{V,P} = R[\frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \ldots, \frac{\Phi_n}{\Phi_0}]_{\mathfrak{M}},$$

où $\Phi_i \in R$, $0 \leq i \leq n$, nous supposons qu'on peut extraire de $\frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \ldots, \frac{\Phi_n}{\Phi_0}$ un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{M}$ définissant P. Nous allons supposer que :

l'éclatement normalisé de V' en P' localisé en le centre de ν n'est pas dominé par P.

Désignons par V_1 l'éclaté de V' le long de P'. La condition ci-dessus implique que **le fermé des points de V_1 en correspondance avec P est le diviseur exceptionnel E de V_1**. En effet, d'après le théorème principal de Zariski, ce fermé est connexe, s'il se réduit à un point P_1, on a $O_{V_1,P_1} \subset \cap_{\mu \in \mathbf{V}} R_\mu = O_{V,P}$, où $\mathbf{V}$ est l'ensemble des valuations de Z qui dominent P. Donc P dominerait P_1, ce qui contredirait notre hypothèse. Bien sûr, ce fermé se projette sur P' : c'est le diviseur exceptionnel de V_1. Comme W domine V, le transformé strict du point générique de E dans W domine P, donc **le point générique de E domine P**.

Remarque 9. *Si l'on suppose $\frac{\Phi_1}{\Phi_0}$ irréductible pour tout i, $1 \leq i \leq n$, les idéaux*

$$J = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \subset I = (\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n) \subset R,$$

sont M'-primaires, où M' désigne l'idéal maximal de R.

Pour I, c'est évident : R est factoriel, les Φ_i sont premiers entre eux, comme R est régulier de dimension 2, un idéal premier minimal appartenant à I serait engendré par un élément irréductible qui diviserait tous les Φ_i, $0 \leq i \leq n$, mais, les Φ_i sont premiers entre eux, il y a une contradiction. Supposons que J ne soit pas M'-primaire. Alors il existerait un irréductible $a \in R$ qui diviserait les Φ_i, $1 \leq i \leq n$. Posons $\Phi_i = a\phi_i$, $1 \leq i \leq n$. Tous les éléments de l'idéal I' de $O_{V,P}$ engendré par les $\frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \ldots, \frac{\Phi_n}{\Phi_0}$ sont de valuation a-adique positives, mais alors, I' étant l'idéal maximal de $O_{V,P}$, il est divisible par a qui, n'étant pas inversible dans R ne l'est pas dans $O_{V,P}$, ce qui est absurde.

Notations 10. *On note $\mathbf{V}$ l'ensemble des valuations de Z qui dominent P. On pose*

$$\mathfrak{I} = \{x \in R; \mu(x) \geq \mu(\Phi_0),\ \mu \in \mathbf{V}\},$$

$$\mathfrak{J} = \{x \in R; \mu(x) > \mu(\Phi_0),\ \mu \in \mathbf{V}\}.$$

Définition 11. *Soit $\mathfrak{A}$ un idéal d'un anneau local R, $\mathbf{V}$ un ensemble de valuations dominant R, on dit que $\mathfrak{A}$ est $\mathbf{V}$-complet si on a*

$$\mathfrak{A} = \cap_{\mu \in \mathbf{V}} \mathfrak{A} R_\mu \cap R,$$

où R_μ désigne l'anneau de valuation de μ.

Remarque 12. *Il est clair qu'une intersection d'idéaux $\mathbf{V}$-complets est un idéal $\mathbf{V}$-complet. Si $\mathfrak{A}$ est $\mathbf{V}$-complet et si I est un idéal quelconque de R, alors le transporteur $\mathfrak{A} : I$ est égal à $\{x \in R | \forall \mu \in \mathbf{V},\ \mu(x) + \mu(I) \geq \mu(\mathfrak{A})\}$, $\mathfrak{A} : I = \cap_{\mu \in \mathbf{V}} (\mathfrak{A} : I) R_\mu \cap R$, l'idéal $\mathfrak{A} : I$ est $\mathbf{V}$-complet.*

Proposition 13. *Les idéaux $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont complets, $\mathbf{V}$-complets (et M'-primaires si on suppose de plus que $\frac{\Phi_i}{\Phi_0}$ irréductible pour tout i, $1 \leq i \leq n$).*

Preuve : Il est clair que ces idéaux sont complets et $\mathbf{V}$-complets. Pour la deuxième assertion, remarquons d'abord que Φ_0 n'est pas inversible dans R, en effet, sinon, on aurait $R = O_{V,P}$, avec R régulier et $O_{V,P}$ non régulier. Donc, pour toute valuation μ de centre P', en particulier, pour toute valuation de $\mathbf{V}$, on a $\mu(\Phi_0) > 0$, on en déduit que

$$I \subset \mathfrak{I} \subset M'.$$

Il est facile de voir que :

$$\mathfrak{I}^2 \subset \mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}.$$

Ce qui termine la preuve.

Désormais, on suppose de plus que $\frac{\Phi_i}{\Phi_0}$ irréductible pour tout i, $1 \leq i \leq n$, c'est à dire $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont M'-primaires.

Proposition 14. *Soit a un élément de $\mathfrak{I}$, on a équivalence entre les assertions suivantes :*
(i) $\exists \mu \in \mathbf{V},\ \mu(a) > \mu(\Phi_0)$
(ii) $\frac{a}{\Phi_0} \in \mathfrak{M}O_{V,P}$
(iii) $\forall \mu \in \mathbf{V},\ \mu(a) > \mu(\Phi_0)$.

De plus, si ces trois conditions équivalentes sont vérifiées, alors, pout toute valuation μ de $K(V)$ avec $O_{V,P} \subset R_\mu$, on a $\mu(a) \geq \mu(\Phi_0)$.

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii). Comme $O_{V,P}$ est normal, $O_{V,P}$ est intersection des anneaux de valuations qui le dominent, on a :

$$O_{V,P} = \cap_{\mu \in \mathbf{V}} R_\mu,$$

donc $\frac{a}{\Phi_0}$ est dans $O_{V,P}$, maintenant, $\frac{a}{\Phi_0}$ n'est pas inversible dans tous les R_μ, il n'est donc pas inversible dans $O_{V,P}$.
Les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i)sont triviales. Enfin, $\frac{a}{\Phi_0} \in \mathfrak{M}O_{V,P}$ implique la dernière assertion.

Corollaire 15. *Soit $\mathfrak{A}$ un idéal complet pour le système $\mathbf{V}$ avec $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{I}$, alors $\mathfrak{A} = \mathfrak{I}$ ou $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}$.*

Preuve : Supposons que $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{J}$, alors, d'après la proposition 14, il existe dans $\mathfrak{A}$ un élément a avec $\mu(a) = \mu(\phi_0)$ et donc, $\mathfrak{A}R_\mu = \mathfrak{I}R_\mu$, pour tout $\mu \in \mathbf{V}$ ce qui implique $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$.

Proposition 16. *Soient a et b deux éléments de $\mathfrak{I}$, $b \notin \mathfrak{J}$, alors $\frac{a}{b} \in O_{V,P}$, de plus, $\frac{a}{b} \in \mathfrak{M}O_{V,P}$ si et seulement si $a \in \mathfrak{J}$.*

Preuve : En effet, d'après la proposition 14, pour tout $\mu \in \mathbf{V}$, on a $\mu(a) \geq \mu(\Phi_0)$ et $\mu(b) = \mu(\Phi_0)$. Donc, $\mu(\frac{a}{b}) \geq 0$ pour tout $\mu \in \mathbf{V}$, comme $O_{V,P} = \cap_{\mu \in \mathbf{V}} R_\mu$, on a $\frac{a}{b} \in O_{V,P}$. D'autre part, $\frac{a}{b} \in \mathfrak{M}O_{V,P}$ si et seulement si pour tout $\mu \in \mathbf{V}$, on a $\mu(a) > \mu(b)$, c'est à dire, si et seulement si $a \in \mathfrak{J}$.

Proposition 17. *Soit V'' l'éclaté de V' le long de $\mathfrak{I}$ et soit P'' le centre sur V'' pour une valuation $\mu \in \mathbf{V}$. Alors, $O_{V,P} = O_{V'',P''}$.*

C'est à dire que, dans un voisinage de P, Vcoïncide avec V''.

Preuve : Il est clair que $\mathfrak{I}O_{V,P} = \Phi_0 O_{V,P}$. Donc, par la propriété universelle de l'éclatement, on a :

$$O_{V'',P''} \subset O_{V,P}.$$

Mais, comme on a

$$O_{V,P} = R[\frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \ldots, \frac{\Phi_n}{\Phi_0}]_{\mathfrak{M}},$$

les éléments $\frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \ldots, \frac{\Phi_n}{\Phi_0}$ sont de valeurs positives pour toute valuation $\mu \in \mathbf{V}$. Donc tous ces éléments sont dans $O_{V'',P''}$ et donc

$$O_{V,P} \subset O_{V'',P''}.$$

D'où le résultat.

Proposition 18.

$$\mathfrak{J}\ O_{V,P} \ = \ \Phi_0\mathfrak{M} \ = \ \mathfrak{M}\mathfrak{I}\ O_{V,P}.$$

Preuve : D'après la construction de Φ_0, on a : $\mathfrak{M} = (\frac{a_1}{\Phi_0}, \ldots, \frac{a_p}{\Phi_0})$ avec $(a_1, \ldots, a_p)$ éléments de $\mathfrak{J}$. D'où $\mathfrak{J}\ O_{V,P} \supset \Phi_0\mathfrak{M}$. D'autre part, on a $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}$ et donc $\mathfrak{J}\ O_{V,P} \subset \mathfrak{I}O_{V,P} = \Phi_0\ O_{V,P}$, d'où le résultat.

Théorème 19. *$\mathfrak{J}O_{W,Q}$ est inversible.*

Remarque 20. *Le théorème 19 prouve le théorème 5.* En effet, en utilisant la proposition 18, on a :

$$\mathfrak{J}\, O_{W,Q} \;=\; \Phi_0 \mathfrak{M}\, O_{W,Q}.$$

Comme $O_{W,Q}$ est factoriel, un générateur de $\mathfrak{J}\, O_{W,Q}$ divisé par Φ_0 engendre $\mathfrak{M}\, O_{W,Q}$.

Preuve du théorème 19.

Lemme 21. *On a* $ord_{M'}(\mathfrak{J}) = ord_{M'}(\mathfrak{I}) + 1$.

Preuve : On remarque que l'on a les inclusions : $\mathfrak{I} \supset \mathfrak{J} \supset M'\mathfrak{I}$. Ce qui implique $\mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{I}) \leq \mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{J}) \leq \mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{I}) + 1$. Comme la valuation $\mathrm{ord}_{M'}$ (cf. hypothèses et notations 8) est dans $\mathbf{V}$, la proposition 14 et les définitions de $(\mathfrak{I})$ et $(\mathfrak{J})$ impliquent $\mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{I}) \neq \mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{J})$.

Maintenant que le lemme 21 est prouvé, finissons la preuve du théorème 19.

Lemme 22. *L'idéal M' n'apparait pas dans la décomposition de $\mathfrak{I}$ en produits d'idéaux complets simples, mais apparait dans celle de $\mathfrak{J}$, on définit alors l'idéal complet $\mathfrak{J}_1$ par $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 M'$, on a :*

$$\mathfrak{J}_1 \;=\; \mathfrak{I} : M'.$$

Preuve : Soit $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 \dots \mathfrak{I}_n$ la décomposition de $\mathfrak{I}$ en produits d'idéaux complets simples. Nous allons montrer que $\mathfrak{I}_i O_{V,P}$ est principal, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, comme P ne domine pas un point de l'éclaté de M', $M'O_{V,P}$ n'est pas principal et donc n'apparait pas parmi les $\mathfrak{I}_i$. On peut trouver un élément $a \in \mathfrak{I} - \mathfrak{J}$ de la forme $a = a_1 \dots a_n$ où $a_i \in \mathfrak{I}_i$, $1 \leq i \leq n$. D'après la proposition 14, pour toute valuation $\mu \in \mathbf{V}$, $\mu(a) = \mu(\Phi_0)$, donc, $\mu(a_i) = \mu(\mathfrak{I}_i)$, $1 \leq i \leq n$, comme $O_{V,P} = \cap_{\mu \in \mathbf{V}} R_\mu$ et les $\mathfrak{I}_i$ sont complets, on en déduit que $\mathfrak{I}_i = a_i O_{V,P}$.

Nous avons vu (hypothèses et notations 8) que $\mathrm{ord}'_M \in \mathbf{V}$, on en déduit facilement que l'idéal ${M'}^{\rho+1}$ est $\mathbf{V}$-complet. Donc (cf. remarques 12), l'idéal $\mathfrak{I} \cap {M'}^{\rho+1}$ est $\mathbf{V}$-complet, cet idéal est strictement inclus dans $\mathfrak{I}$ et contient $\mathfrak{J}$, d'après le corollaire 15, $\mathfrak{I} \cap {M'}^{\rho+1} = \mathfrak{J}$. Il est clair que $M'\mathfrak{I} \subset \mathfrak{J}$, d'après le lemme 21, la valuation M'-adique de ces deux idéaux est $\rho + 1$. Donc l'idéal $\mathrm{cl}^{\rho+1}_{M'}(\mathfrak{J}) \subset \mathrm{Gr}_{M'}(O_{V',P'})$ n'est pas principal, donc M' apparait dans la décomposition de $\mathfrak{J}$ en produits d'idéaux complets.

Pour terminer, montrons que $\mathfrak{J}_1 \;=\; \mathfrak{I} : M'$. L'inclusion $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{I} : M'$ est claire. Prouvons l'inclusion inverse. Notons $\mathfrak{B} = \mathfrak{I} : M'$. Posons $\mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{I}) = \rho$, on a $\rho \geq \mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{B}) \geq \rho - 1 = \mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{J}_1)$. Comme $M'\mathfrak{B} \subset \mathfrak{I}$, et que l'idéal initial de $\mathfrak{I}$ est principal, on a $\rho + 1 = \mathrm{ord}_{M'}(M'\mathfrak{B}) > \mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{I})$. Donc $\mathrm{ord}_{M'}(\mathfrak{B}) = \rho$ et $M'\mathfrak{B} \subset {M'}^{\rho+1}$. Ce qui donne :

$$M'\mathfrak{B} \subset {M'}^{\rho+1} \cap \mathfrak{I} = \mathfrak{J} = M'\mathfrak{J}_1 \subset M'\mathfrak{B}.$$

Ainsi, $M'\mathfrak{B} = M'\mathfrak{J}_1$, comme $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{J}_1$ sont complets, on a $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_1$.

Lemme 23. *Si $\mathfrak{A}$ est un idéal complet d'un anneau local R régulier de dimension 2 essentiellement de type fini sur un corps k et $\mathfrak{b}$ un idéal quelconque de cet anneau, alors tout facteur simple de $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} : \mathfrak{b}$ est un prédecesseur ou coïncide avec un facteur simple de $\mathfrak{A}$.*

Nous rappelons qu'un idéal complet simple est soit principal irréductible, soit M-primaire, M désignant le maximal de R, si cet idéal est M-primaire, son arbre de principalisation est unibranche. On dit qu'un idéal complet simple J est un prédécesseur de l'idéal complet simple I si l'arbre de principalisation de J est un sous-arbre de celui de I.

Admettons ce lemme pour le moment et montrons qu'il prouve le théorème 19. En effet, comme nous l'avons vu dans la remarque 20, l'idéal $\mathfrak{I}$ est principalisé en $O_{W,Q}$, donc, d'après le lemme 23, $\mathfrak{J}_1 = \; I : M'$ aussi, donc, $\mathfrak{J} = M'\mathfrak{J}_1$ aussi.

Prouvons le lemme 23.

Soit R' l'anneau local d'un point de l'éclaté de R en M. On a : $\mathfrak{B} = \{x \in R | \mu(x) + \mu(\mathfrak{b}) \geq \mu(\mathfrak{A}), R \subset R_\mu\}$, c'est un idéal complet. Donc [SZ2, appendice 5], $\mathfrak{B}R'$ est complet, $\mathfrak{B}R' = \{x' \in R | \mu(x') + \mu(\mathfrak{b}) \geq \mu(\mathfrak{A}), R' \subset$

$R_\mu\}$, donc $\mathfrak{B}R' = \mathfrak{A}R' : \mathfrak{b}R'$. Si $\mathfrak{A}R'$ est principal, $\mathfrak{A}R' = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} R'$ et $\mathfrak{b}R' = x_1^{b_1} \cdots x_r^{b_r} B'$ avec $B' = R'$ ou B' est un idéal M'-primaire, on vérifie que $\mathfrak{B}R' = x_1^{c_1} \cdots x_r^{c_r}$ où $c_i = a_i - b_i$ si $a_i \geq b_i$, $c_i = 0$ sinon, $1 \leq i \leq r$. Le lemme est donc vrai si $\mathfrak{A}R'$ est principal, sinon, une récurrence sur le max des longueurs des arbres de principalisation des facteurs simples de $\mathfrak{A}$ donne le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] S.S. ABHYANKAR : *On the valuations centered in a local domain*, Amer. J. Math., 78 (1956), pp. 321-348.

[A2] S.S. ABHYANKAR : *Resolution of singularities of arithmetical surfaces*, in Arithmetical algebraic geometry (edited by O.F.G. Schilling), New York, Harper and Row, (1965), pp 111-152.

[AM] M.F. ATIYAH et I.G. MAC DONALD : *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley.

[CGSLJ] A. CAMPILLO, G. GONZALEZ-SPRINGBERG, M. LEJEUNE-JALABERT : *Clusters of infinitely near points.* Prépublication de l'Institut Fourier, 283 (1994). À paraitre aux Math. Annalen.

[C] V. COSSART : *Sur le polyèdre caractéristique d'une singularité.* Bull. Soc, Math. de France, 103 (1975), pp. 13-19.

[CGO] V. COSSART, J. GIRAUD, U. ORBANZ : *Resolution of Surfaces Singularities.* L.N. 1101 (1984).

[E.G.A III] J. DIEUDONNÉ, A. GROTHENDIECK : *Éléments de géométrie algébrique III.* Publication I.H.E.S. n°11, (1961).

[H] R. HARTSHORNE : *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics n°52, Springer-Verlag.

[LT] M. LEJEUNE-JALABERT, B. TEISSIER : *Cloture intégrale des idéaux et équisingularité.* Séminaire Lejeune-Teissier, Centre de Mathématiques de l'école polytechnique, publication de l'Université scientifique et médicale de Grenoble (1974).

[LJ] M. LEJEUNE-JALABERT : *Linear systems with infinitely near base conditions and complete ideals in dimension two.* Singularity theory. Lê, Saito, Teissier éd., World scientific (1995).

[L1] J. LIPMAN : *Desingularization of two-dimensional schemes.* Ann. Math. 107 (1978), 151-207.

[L2] J. LIPMAN : *On Complete Ideals in Regular Local Rings.* Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of Masayoshi NAGATA. Kinokuniya, Tokyo, (1988), 203-231.

[L3] J. LIPMAN : *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization.* Pub. IHES., 36 (1969) 195-279.

[M] T.T. MOH : Proceedings de La Rabida. Progress in Mathematics, vol. 134, Birkhäuser, (1996).

[N] M. NAGATA : *Local rings*, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New-York (1962).

[SZ1] P. SAMUEL et O. ZARISKI : *Commutative algebra*, vol.1, Graduate Texts in Mathematics n°28, Springer-Verlag.

[SZ2] P. SAMUEL et O. ZARISKI : *Commutative algebra*, vol.2, Graduate Texts in Mathematics n°29, Springer-Verlag.

[S] M. SPIVAKOVSKY : *Valuations in function fields of surfaces*, Am. Jour. of Math., 112, (1990), pp. 107-156.

[V] M. VAQUIÉ : *Valuations I*, dans ce volume.

[Z1] O. ZARISKI : *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*, Amer. J. Math., 61 (1939), pp. 249-294.

[Z2] O. ZARISKI : *The reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math., vol. 40 (1939), pp. 639-689.

[Z3] O. ZARISKI : *Local uniformization on algebraic varieties*, Ann. of Math., vol. 41 (1940), pp. 852-896.

[Z4] O. ZARISKI : *A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math., vol. 43 (1942), pp. 583-593.

[Z5] O. ZARISKI : *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties*, Ann. of Math., vol. 45, No. 3, (July 1944), pp. 472-542.

[Z6] O. ZARISKI : *The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 45 (1944), pp. 683-691.